

CALCUL INTEGRAL - EXERCICES CORRIGESExercice n°1.

Calculez les intégrales suivantes :

1) $\int_0^3 (x-4) dx$

2) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2t-1 + \frac{1}{t^2} \right) dt$

3) $\int_{-2}^0 4t^3 dt$

4) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$

5) $\int_0^3 \frac{2}{(2x+3)^2} dx$

6) $\int_4^2 \frac{dx}{(4-3x)^2}$

7) $\int_1^{-1} \frac{dx}{\sqrt{4-2x}}$

8) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{5-3x}} dx$

9) $\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$

10) $\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2} dx$

11) $\int_{-2}^0 \frac{4}{1-5x} dx$

12) $\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x^2} dx$

13) $\int_3^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2-x} - \frac{4}{x+2} \right) dx$

14) $\int_2^5 e^x dx$

15) $\int_2^5 -e^{-x} dx$

16) $\int_0^2 2e^{2x-1} dx$

17) $\int_2^1 (e^{2t} + 2e^t - 3) dt$

18) $\int_{-1}^1 e^{3x+1} dx$

19) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$

20) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

21) $\int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x (e^x - 3) dx$

22) $\int_0^1 \frac{e^{-x}-2}{e^x} dx$

23) $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x-1} dx$

Exercice n°2. Vrai ou Faux ?Soient f et g deux fonctions quelconques continues et positives sur $[0; +\infty[$.1) La fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $x \mapsto \int_5^x f(t) dt$ a pour dérivée f .2) La fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $x \mapsto \int_5^x f(t) dt$ prend des valeurs toutes positives ou nulles.3) Pour tous réels a et b de $[0; +\infty[$, $\int_a^b f(x)g(x) dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right)$.

4) $\int_0^\pi \sin x \cos x dx = 0$

5) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{1}{3}$.

6) $\int_0^{-\pi} \sin^4 x dx = \int_0^\pi \sin^4 x dx$.

Exercice n°3.Calculez l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$ (indication : $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$)Exercice n°4.Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x \ln x - x$ 1) Déterminez la dérivée g' de g

2) Calculez $\int_1^e \ln x dx$

Exercice n°5.Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}$ 1) Montrez que pour tout x de $]1; +\infty[$, $f(x) = x+4 + \frac{3}{x-1}$

2) Calculez $\int_4^2 \frac{x^2+3x-1}{x-1} dx$

Exercice n°6.

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{6x^2 + 13x + 4}{3x + 2}$

1) Trouver trois nombres réels a , b et c tels que pour tout x de $\left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$, $f(x) = ax + b - \frac{c}{3x + 2}$

2) Calculez $\int_0^2 \frac{6x^2 + 13x + 4}{3x + 2} dx$

Exercice n°7.

1) Etudiez le signe de $x^2 - 5x + 6$ sur $[0, 7]$

2) En utilisant la relation de Chasles, calculez $\int_0^7 |x^2 - 5x + 6| dx$

Exercice n°8.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

1) Etudiez les variations de f

2) Démontrez que pour tout x de $[-1; 2]$, $\frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1$

3) Démontrez que $\frac{3}{5} \leq \int_{-1}^2 \frac{1}{1 + x^2} dx \leq 3$

Exercice n°9.

Etablir que $\int_0^1 x^2 \sin x dx \leq \int_0^1 x \sin x dx$

Exercice n°10.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$. Calculez les valeurs moyennes de f sur $[0; 2]$, $[1; 3]$ et $[-1; 1]$

Exercice n°11.

Calculez l'intégrale I en utilisant la formule d'intégration par parties:

$$1) I = \int_{-1}^0 x e^x dx \quad 2) I = \int_{-1}^0 (x + 2) e^x dx \quad 3) I = \int_{-1}^0 (x + 2) e^{x+1} dx \quad 4) I = \int_1^e x \ln x dx \quad 5) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

Exercice n°12.

On considère l'application f_n définie pour tout t de \mathbb{R}^{+*} par $f_n(t) = \frac{1}{t(t^n + 1)}$, où n est un entier strictement positif.

1) Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout réel t strictement positif : $f_n(t) = \frac{1}{t(t^n + 1)} = \frac{at^{n-1} + b}{t^n + 1} + \frac{c}{t}$

2)- Montrer que : $\int_1^2 f_n(t) = \ln \left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n + 1}} \right)$

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_1^2 \frac{t^{n-1} \ln t}{(t^n + 1)^2}$

Exercice n°13.

On considère les réels $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt$ pour tout n entier naturel.

1) Calculer I_0 et I_1

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout n entier naturel non nul, on a $I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{n!}$

3) Montrer que pour tout n entier naturel on a : $I_n = e - \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$

4) Montrer que pour tout n entier naturel non nul, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{2}{n!}$

5) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice n°14.

Calculez l'intégrale I en utilisant deux fois le théorème de l'intégration par parties:

1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

2) $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

3) $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x dx$

CALCUL INTEGRAL - CORRECTION**Exercice n°1**

$$1) \int_0^3 (x-4) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 4x \right]_0^3 = \frac{3^2}{2} - 4 \times 3 - \left(\frac{0^2}{2} - 4 \times 0 \right) = \frac{9}{2} - 12 = -\frac{15}{2}$$

$$2) \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2t - 1 + \frac{1}{t^2} \right) dt = \left[t^2 - t - \frac{1}{t} \right]_{\frac{1}{2}}^2 = 2^2 - 2 - \frac{1}{2} - \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) = 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

$$3) \int_{-2}^0 4t^3 dt = \left[t^4 \right]_{-2}^0 = 0^4 - (-2)^4 = -16$$

$$4) \int_1^4 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{1} \right) = \frac{3}{4}$$

$$5) \int_0^3 \frac{2}{(2x+3)^2} dx = \int_0^3 \frac{u'(x)}{(u(x))^2} dx = \left[-\frac{1}{u(x)} \right]_0^3 = \left[-\frac{1}{2x+3} \right]_0^3 = -\frac{1}{2 \times 3 + 3} + \frac{1}{2 \times 0 + 3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$6) \int_4^2 \frac{dx}{(4-3x)^2} = \int_4^2 -\frac{1}{3} \frac{-3}{(4-3x)^2} dx = \int_4^2 -\frac{1}{3} \frac{u'(x)}{(u(x))^2} dx = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{u(x)} \right]_4^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4-3x} \right]_4^2 = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = -\frac{1}{8}$$

$$7) \int_1^{-1} \frac{dx}{\sqrt{4-2x}} = \int_1^{-1} -\frac{1}{2} \frac{-2dx}{\sqrt{4-2x}} = -\int_1^{-1} \frac{u'(x) dx}{2\sqrt{u(x)}} = -\left[\sqrt{u(x)} \right]_1^{-1} = -\left[\sqrt{4-2x} \right]_1^{-1} = -\sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$8) \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{5-3x}} dx = \int_0^1 -\frac{2}{3} \times \frac{-3}{\sqrt{5-3x}} dx = -\frac{2}{3} \int_0^1 \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = -\frac{2}{3} \left[2\sqrt{u(x)} \right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{3} \left[2\sqrt{5-3x} \right]_0^1 = -\frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{5}}{3} = \frac{4}{3} (\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

$$9) \int_0^2 \frac{dx}{x+1} = F(2) - F(0) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ donc } F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|x+1|).$$

$$\text{Comme pour tout } x \in [0; 2], x+1 > 0, \text{ on aura } F(x) = \ln(x+1) \text{ donc } \int_0^2 \frac{dx}{x+1} = \ln(3) - \ln(0+1) = \ln 3$$

$$10) \int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2} dx = F(-3) - F(-4) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f(x) = \frac{3}{x+2} = \frac{3u'(x)}{u(x)} \text{ donc}$$

$$F(x) = 3 \ln(|u(x)|) = 3 \ln(|x+2|). \text{ Comme pour tout } x \in [-4; -3], x+2 < 0, \text{ on aura}$$

$$F(x) = 3 \ln(-(x+2)) = 3 \ln(-x-2) \text{ donc } \int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2} dx = 3 \ln(-(-3)-2) - 3 \ln(-(-4)-2) = 3 \ln 1 - 3 \ln 2 = -3 \ln 2$$

$$11) \int_{-2}^0 \frac{4}{1-5x} dx = F(0) - F(-2) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f(x) = \frac{4}{1-5x} = -\frac{4}{5} \times \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ donc}$$

$$F(x) = -\frac{4}{5} \times \ln(|u(x)|) = -\frac{4}{5} \times \ln(|1-5x|). \text{ Comme pour tout } x \in [-2; 0], 1-5x > 0, \text{ on aura}$$

$$F(x) = -\frac{4}{5} \times \ln(1-5x) \text{ donc } \int_{-2}^0 \frac{4}{1-5x} dx = -\frac{4}{5} \times \ln(1-5 \times 0) - \left(-\frac{4}{5} \times \ln(1-5 \times (-2)) \right) = \frac{4}{5} \ln(11)$$

$$12) \int_1^2 \frac{x^2 + x - 2}{x^2} dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \left[x + \ln(|x|) + \frac{2}{x} \right]_1^2 = 2 + \ln(|2|) + \frac{2}{2} - \left(1 + \ln(|1|) + \frac{2}{1} \right) = \ln 2$$

$$13) \int_3^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2-x} - \frac{4}{x+2} \right) dx = \left[\frac{1}{4}x + \ln(|2-x|) - 4 \ln(|x+2|) \right]_3^4$$

$$= \left(\frac{1}{4} \times 4 + \ln(|2-4|) - 4 \ln(|4+2|) \right) - \left(\frac{1}{4} \times 3 + \ln(|2-3|) - 4 \ln(|3+2|) \right) = \frac{1}{4} - 4 \ln(3) + 3 \ln 2$$

$$14) \int_2^5 e^x dx = [e^x]_2^5 = e^5 - e^2 \quad 15) \int_2^5 -e^{-x} dx = \int_2^5 u'(x) e^{u(x)} dx = [e^{u(x)}]_2^5 = [e^{-x}]_2^5 = e^{-5} - e^{-2} = \frac{1}{e^5} - \frac{1}{e^2} = \frac{e^2 - e^5}{e^7}$$

$$16) \int_0^2 2e^{2x-1} dx = \int_0^2 u'(x) e^{u(x)} dx = [e^{u(x)}]_0^2 = [e^{2x-1}]_0^2 = e^3 - e^{-1} = e^3 - \frac{1}{e} = \frac{e^4 - 1}{e}$$

$$17) \int_2^1 (e^{2t} + 2e^t - 3) dt = \left[\frac{1}{2} e^{2t} + 2e^t - 3t \right]_2^1 = \left(\frac{1}{2} e^2 + 2e^1 - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} e^4 + 2e^2 - 6 \right) = -\frac{1}{2} e^4 - \frac{3}{2} e^2 + 2e + 3$$

$$18) \int_{-1}^1 e^{3x+1} dx = F(1) - F(-1) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f(x) = e^{3x+1} = \frac{1}{3} u'(x) e^{u(x)}, \text{ donc } F(x) = \frac{1}{3} e^{u(x)} = \frac{1}{3} e^{3x+1}.$$

$$\text{Ainsi } \int_{-1}^1 e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} e^{3 \times 1 + 1} - \frac{1}{3} e^{3 \times (-1) + 1} = \frac{1}{3} (e^4 - e^{-2}) = \frac{1}{3} \left(e^4 - \frac{1}{e^2} \right) = \frac{e^6 - 1}{3e^2}$$

$$19) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)} dx = [\ln(|u(x)|)]_0^1 = [\ln(|e^x + 1|)]_0^1 = [\ln(e^x + 1)]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

$$20) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e u'(x) u(x) dx = \left[\frac{u^2(x)}{2} \right]_1^e = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$21) \int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x (e^x - 3) dx = \int_1^e u'(x) u(x) dx = \left[\frac{u^2(x)}{2} \right]_{\ln 3}^{\ln 10} = \left[\frac{(e^x - 3)^2}{2} \right]_{\ln 3}^{\ln 10} = \frac{(e^{\ln 10} - 3)^2}{2} - \frac{(e^{\ln 3} - 3)^2}{2} \\ = \frac{(10 - 3)^2}{2} = \frac{49}{2}$$

$$22) \int_0^1 \frac{e^{-x} - 2}{e^x} dx = \int_0^1 e^{-x} (e^{-x} - 2) dx = \int_0^1 -u'(x) u(x) dx = - \left[\frac{u(x)^2}{2} \right]_0^1 = - \left[\frac{(e^{-x} - 2)^2}{2} \right]_0^1 \\ = - \frac{(e^{-1} - 2)^2}{2} + \frac{(e^0 - 2)^2}{2} = - \frac{(e^{-1} - 2)^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$23) \int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x-1} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} \ln(1-x) dx = \int_{-1}^0 -u'(x) u(x) dx = - \left[\frac{u(x)^2}{2} \right]_{-1}^0 = - \left[\frac{(\ln(1-x))^2}{2} \right]_{-1}^0 \\ = - \frac{(\ln(1-0))^2}{2} + \frac{(\ln(2))^2}{2} = \frac{(\ln(2))^2}{2}$$

Exercice n°2

1) **VRAI** la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $x \rightarrow \int_5^x f(t) dt$ est LA PRIMITIVE de la fonction f qui s'annule en 5, donc a pour dérivée f .

2) **FAUX** car puisque f est une fonction continue et positive sur $[0; +\infty[$, alors l'intégrale $\int_5^x f(t) dt$ sera négative ou nulle

pour tout $0 \leq x \leq 5$. En effet, si $0 \leq x \leq 5$, $\int_x^5 f(t) dt$ sera positive ou nulle, par positivité de l'intégrale,

et ainsi $\int_5^x f(t) dt = - \int_x^5 f(t) dt$ sera négative ou nulle

3) **FAUX!** Cette formule est fantaisiste. Pour s'en convaincre, choisissons $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, qui sont positives sur

$]0; +\infty[$, ainsi que $a = 0$, $b = 1$. On a alors $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$ tandis que

$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ et $\int_a^b g(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$, donc $\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Les résultats sont différents

4) On calcule $\int_0^\pi \sin x \cos x dx = \int_0^\pi \cos x \sin x dx = \int_0^\pi u'(x)u(x) dx$ où $u(x) = \sin x$. Ainsi

$$\int_0^\pi \sin x \cos x dx = \left[\frac{u^2(x)}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{2} \left((\sin \pi)^2 - (\sin 0)^2 \right) = \frac{1}{2} (0 - 0) = 0. \quad \boxed{\text{L'affirmation est donc VRAIE}}$$

5) On calcule $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times (\ln x)^2 dx = \int_1^e u'(x) \times u^2(x) dx$ où $u(x) = \ln x$. **L'affirmation est donc VRAIE**

$$\text{Ainsi } \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[\frac{(u(x))^3}{3}\right]_1^e = \left[\frac{(\ln(x))^3}{3}\right]_1^e = \frac{(\ln(e))^3}{3} - \frac{(\ln(1))^3}{3} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

6) On peut déjà écrire que $\int_0^{-\pi} \sin^4 x dx = -\int_{-\pi}^0 \sin^4 x dx$. Comme la fonction $x \rightarrow \sin^4 x$ est PAIRE sur $[-\pi; \pi]$, (puisque $(\sin(-x))^4 = (-\sin(x))^4 = (\sin(x))^4$), on a donc $\int_{-\pi}^0 \sin^4 x dx = \int_0^\pi \sin^4 x dx$. **L'égalité proposée est donc**

FAUSSE

Exercice n°3

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$, on utilise cette dernière écriture pour

calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$.

En effet $I = \int_0^1 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^1 1 - \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \left[x - \ln(|u(x)|) \right]_0^1 = \left[x - \ln(|e^x + 1|) \right]_0^1 = \left[x - \ln(e^x + 1) \right]_0^1$ car pour tout

$x \in [0, 1]$, $e^x + 1 > 0$. On conclut donc que $I = 1 - \ln(e^1 + 1) - (0 - \ln(e^0 + 1)) = 1 - \ln(e + 1) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$

Exercice n°4

1) g est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$g'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$. g est donc une primitive de la fonction \ln sur $]0; +\infty[$

2) On en déduit donc que $\int_1^e \ln x dx = [g(x)]_1^e = [x \ln x - x]_1^e = e \ln e - e - (\ln 1 - 1) = 1$

Exercice n°5

1) Pour tout x de $]1; +\infty[$, $x + 4 + \frac{3}{x-1} = \frac{(x+4)(x-1)+3}{x-1} = \frac{x^2 - x + 4x - 4 + 3}{x-1} = \frac{x^2 + 3x - 1}{x-1} = f(x)$

2) Pour calculer l'intégrale $\int_4^2 \frac{x^2 + 3x - 1}{x-1} dx$, on utilise la transformation d'écriture précédente. Ainsi

$\int_4^2 \frac{x^2 + 3x - 1}{x-1} dx = \int_4^2 \left(x + 4 + \frac{3}{x-1} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 4x + 3 \ln|x-1| \right]_4^2 = \left[\frac{x^2}{2} + 4x + 3 \ln(x-1) \right]_4^2$ car pour tout $x \in [2, 4]$,

$x-1 > 0$. On conclut $\int_4^2 \frac{x^2 + 3x - 1}{x-1} dx = \frac{2^2}{2} + 8 + 3 \ln(2-1) - \left(\frac{4^2}{2} + 16 + 3 \ln(4-1) \right) = -14 + 3 \ln(1) - 3 \ln 3 = -14 - 3 \ln 3$

Exercice n°6

Pour tout x de $\left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$, $ax + b - \frac{c}{3x+2} = \frac{(ax+b)(3x+2) - c}{3x+2} = \frac{3ax^2 + (2a+3b)x + 2b - c}{3x+2} = f(x)$ si et

$$\text{seulement si } \begin{cases} 3a = 6 \\ 2a + 3b = 13 \\ 2b - c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 3b = 13 - 2 \times 2 \\ c = 2b - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout x de $\left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$, $f(x) = 2x + 3 - \frac{2}{3x+2}$

2) Pour calculer $\int_0^2 \frac{6x^2 + 13x + 4}{3x+2} dx$, on utilise la transformation d'écriture ci-dessus

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{6x^2 + 13x + 4}{3x+2} dx &= \int_0^2 \left(2x + 3 - \frac{2}{3x+2} \right) dx = \left[x^2 + 3x - \frac{2}{3} \ln(|3x+2|) \right]_0^2 \\ &= 2^2 + 3 \times 2 - \frac{2}{3} \ln(|3 \times 2 + 2|) - \left(0^2 + 3 \times 0 - \frac{2}{3} \ln(|3 \times 0 + 2|) \right) = 10 - \frac{2}{3} \ln 8 + \frac{2}{3} \ln 2 = 10 + \frac{2}{3} \ln \frac{2}{8} \end{aligned}$$

Exercice n°7

1) Déterminons les racines du trinôme $P(x) = x^2 - 5x + 6$ en calculant son discriminant

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$. Le trinôme admet donc deux racines réelles distinctes $x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2$ et

$x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3$. Le signe de $P(x) = x^2 - 5x + 6$ est donné par :

x	2	3
$P(x) = x^2 - 5x + 6$	+	0
	0	+

Ainsi,

Pour tout $x \in]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$, $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

Pour tout $x \in [2; 3]$, $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

2) En utilisant la relation de Chasles, on écrit $\int_0^7 |x^2 - 5x + 6| dx = \int_0^2 |x^2 - 5x + 6| dx + \int_2^3 |x^2 - 5x + 6| dx + \int_3^7 |x^2 - 5x + 6| dx$

Pour tout $x \in]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$, $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ donc $|x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6$

Pour tout $x \in [2; 3]$, $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ donc $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6) = -x^2 + 5x - 6$

La somme $\int_0^2 |x^2 - 5x + 6| dx + \int_2^3 |x^2 - 5x + 6| dx + \int_3^7 |x^2 - 5x + 6| dx$ se réécrit donc

$$\int_0^2 (x^2 - 5x + 6) dx + \int_2^3 (-x^2 + 5x - 6) dx + \int_3^7 (x^2 - 5x + 6) dx$$

En utilisant les deux primitives $F(x) = \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6x$ et $G(x) = -\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 6x$, on calcule séparément :

$$\int_0^2 (x^2 - 5x + 6) dx = F(2) - F(0) = \frac{2^3}{3} - 5\frac{2^2}{2} + 12 - \left(\frac{0^3}{3} - 5\frac{0^2}{2} + 0 \right) = \frac{14}{3}$$

$$\int_2^3 (-x^2 + 5x - 6) dx = G(3) - G(2) = \left(-\frac{3^3}{3} + 5\frac{3^2}{2} - 18 \right) - \left(-\frac{2^3}{3} + 5\frac{2^2}{2} - 12 \right) = -25 + \frac{45}{2} + \frac{8}{3}$$

$$\int_3^7 (x^2 - 5x + 6) dx = F(7) - F(3) = \left(\frac{7^3}{3} - 5\frac{7^2}{2} + 42 \right) - \left(\frac{3^3}{3} - 5\frac{3^2}{2} + 18 \right) = \frac{343}{3} - 85$$

Au final, la valeur de l'intégrale est $\frac{14}{3} - 25 + \frac{45}{2} + \frac{8}{3} + \frac{343}{3} - 85 = \frac{365}{3} + \frac{45}{2} - 110$

Exercice n°8

1) Puisque pour tout réel x , $1+x^2 > 0$, f est définie et dérivable sur \mathbb{R} en tant que quotient de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. $f'(x)$ étant du même signe que $-2x$, on en déduit que pour tout $x \in]-\infty; 0[$,

$f'(x) > 0$ et que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) < 0$. f est donc strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

2) On doit distinguer deux cas : Si $x \in [-1; 0]$, cela signifie que $-1 \leq x \leq 0$. Comme f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$, on en déduit que $f(-1) \leq f(x) \leq f(0)$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$. Si $x \in [0; 2]$, cela signifie que $0 \leq x \leq 2$. Comme f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit que $f(0) \geq f(x) \geq f(2)$, c'est-à-dire $1 \geq f(x) \geq \frac{1}{5}$. Finalement, pour tout x de $[-1; 2]$, $\frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1$

3) On « passe aux intégrales » dans l'inégalité. Si pour tout x de $[-1; 2]$, $\frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1$, alors $\int_{-1}^2 \frac{1}{5} dx \leq \int_{-1}^2 f(x) dx \leq \int_{-1}^2 1 dx$

On calcule séparément $\int_{-1}^2 \frac{1}{5} dx = \left[\frac{1}{5} x \right]_{-1}^2 = \frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{5} \right) = \frac{3}{5}$ et $\int_{-1}^2 1 dx = [x]_{-1}^2 = 2 - (-1) = 3$, ce qui nous permet de

conclure finalement que $\frac{3}{5} \leq \int_{-1}^2 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 3$

Exercice n°9

Pour tout $x \in [0, 1]$, $\sin x \geq 0$ et $x^2 \leq x$, donc $x^2 \sin x \leq x \sin x$

On « passe aux intégrales » dans l'inégalité. Ainsi $\int_0^1 x^2 \sin x dx \leq \int_0^1 x \sin x dx$

Exercice n°10

La valeur moyenne sur $[0; 2]$ de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ est égale à

$$\frac{1}{2-0} \int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{16}{4} - \frac{0}{4} \right] = 2$$

La valeur moyenne sur $[1; 3]$ de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ est égale à

$$\frac{1}{3-1} \int_1^3 x^3 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^3 = \frac{1}{2} \left[\frac{81}{4} - \frac{1}{4} \right] = 10$$

La valeur moyenne sur $[-1; 1]$ de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ est égale à

$$\frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} - \frac{(-1)^4}{4} \right] = 0$$

Exercice n°11

1) $I = \int_{-1}^0 x e^x dx = \int_{-1}^0 u(x) v'(x) dx$ où $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$ sont continûment dérivables.

D'après la formule d'intégration par parties,

$$I = [u(x)v(x)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 u'(x)v(x) dx = [x e^x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 1 \times e^x dx = 0 - (-1) e^{-1} - [e^x]_{-1}^0 = \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{e} \right) = \frac{2}{e} - 1$$

2) $I = \int_{-1}^0 (x+2)e^x dx = \int_{-1}^0 u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = x+2 \Rightarrow u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I = [u(x)v(x)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 u'(x)v(x) dx = [(x+2)e^x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 1 \times e^x dx = 2 - (1)e^{-1} - [e^x]_{-1}^0 = 2 - \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 1$$

3) $I = \int_{-1}^0 (x+2)e^{x+1} dx = \int_{-1}^0 u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = x+2 \Rightarrow u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{x+1} \Rightarrow v(x) = e^{x+1}$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I = [u(x)v(x)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 u'(x)v(x) dx = [(x+2)e^{x+1}]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 1 \times e^{x+1} dx = 2e - (1)e^0 - [e^{x+1}]_{-1}^0 = 2e - 1 - (e - 1) = e$$

4) $I = \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} dx = \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1^2}{2} \ln 1 - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

5) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x) dx = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times (-\cos x) dx = 0 + 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Exercice n°12

1) En réduisant au même dénominateur : Pour tout t strictement positif,

$$\frac{at^{n-1} + b}{t^n + 1} + \frac{c}{t} = \frac{t(at^{n-1} + b) + c(t^n + 1)}{t(t^n + 1)} = \frac{(a+c)t^n + bt + c}{t(t^n + 1)} = \frac{1}{t(t^n + 1)}, \text{ si et seulement si, par identification,}$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}. \text{ Ainsi, pour tout } t \text{ strictement positif, } \boxed{\frac{1}{t(t^n + 1)} = \frac{-t^{n-1}}{t^n + 1} + \frac{1}{t}}$$

2) On utilise l'écriture $f_n(t) = \frac{-t^{n-1}}{t^n + 1} + \frac{1}{t}$ pour calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_1^2 f_n(t) dt &= \int_1^2 \left(\frac{-t^{n-1}}{t^n + 1} + \frac{1}{t} \right) dt = \left[-\frac{1}{n} \ln(t^n + 1) + \ln(t) \right]_1^2 = -\frac{1}{n} \ln(2^n + 1) + \ln(2) + \frac{1}{n} \ln(1^n + 1) + \ln(1) \\ &= \frac{1}{n} \ln(1^n + 1) - \frac{1}{n} \ln(2^n + 1) + \ln(2) = \ln \left[\left(\frac{2}{2^n + 1} \right)^{\frac{1}{n}} \right] + \ln \left((2^n)^{\frac{1}{n}} \right) = \boxed{\ln \left(\frac{\sqrt[n]{2^{n+1}}}{\sqrt[n]{2^n + 1}} \right)} \end{aligned}$$

3) On pose $u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = \frac{t^{n-1}}{(t^n + 1)^2} = \frac{1}{n} \frac{w'(t)}{w^2(t)}$ où $w(t) = t^n + 1$, donc

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{1}{nw(t)} = -\frac{1}{n(t^n + 1)}, \text{ et ainsi : } \int_1^2 \frac{t^{n-1} \ln t}{(t^n + 1)^2} dt = \int_1^2 u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_1^2 - \int_1^2 u'(t)v(t) dt \\ &= \left[-\frac{\ln t}{n(t^n + 1)} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{t} \times \left(-\frac{1}{n(t^n + 1)} \right) dt = -\frac{\ln 2}{n(2^n + 1)} + \frac{1}{n} \int_1^2 \frac{1}{t(t^n + 1)} dt = \boxed{-\frac{\ln 2}{n(2^n + 1)} + \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{2^{n+1}}}{\sqrt[n]{2^n + 1}} \right)} \end{aligned}$$

Exercice n°13 1) Pour $n=0$, on doit calculer $I_0 = \int_0^1 \frac{t^0}{0!} e^{-t} dt$. En convenant que $0! = 1$, et puisque pour tout $t > 0$,

$$t^0 = 1 \text{ (on convient que } 0^0 = 1) \text{ le calcul est donc } I_0 = \int_0^1 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^1 = -e^{-1} + e^0 = \boxed{e-1}$$

Pour $n=1$, on doit calculer $I_1 = \int_0^1 \frac{t^1}{1!} e^{-t} dt = \int_0^1 t e^{-t} dt = \int_0^1 u(t) v'(t) dt$ avec $u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1$ et $v'(t) = e^{-t} \Rightarrow v(t) = -e^{-t}$ qui sont continûment dérivables sur $[0; 1]$.

$$\text{Ainsi } I_1 = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t) dt = [-te^{-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt = -1 \times e^0 + 0 \times e^1 + I_0 = -1 + (e-1) = \boxed{e-2}$$

2) Pour tout entier n non nul, $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt = \int_0^1 u(t) v'(t) dt$ avec $u(t) = \frac{t^n}{n!} \Rightarrow u'(t) = \frac{nt^{n-1}}{n!} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ et

$v'(t) = e^{-t} \Rightarrow v(t) = -e^{-t}$ qui sont continûment dérivables sur $[0; 1]$. Ainsi $I_n = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t) dt$

$$= \left[-\frac{t^n}{n!} e^{-t} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} dt = -\frac{1}{n!} + \frac{0^n}{n!} + I_{n-1} \text{ d'où la relation } \boxed{I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{n!}}$$

3) Montrons par récurrence que pour tout entier n , $I_n = e - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$. Notons $Q(k)$ la propriété « $I_k = e - \sum_{p=0}^k \frac{1}{p!}$ »

Initialisation : La propriété est vraie pour $k=0$ car $e - \sum_{p=0}^0 \frac{1}{p!} = e - \frac{1}{0!} = e - 1$ (par convention $0! = 1$), et puisqu'on a calculé

$I_0 = e - 1$ dans la question 1)

Hérédité : Supposons la propriété vraie $Q(m)$ pour un entier m fixé, à savoir $I_m = e - \sum_{p=0}^m \frac{1}{p!}$.

On a alors, d'après la question 2), $I_{m+1} = I_m - \frac{1}{(m+1)!}$, donc en appliquant l'hypothèse de récurrence,

$$I_{m+1} = e - \sum_{p=0}^m \frac{1}{p!} - \frac{1}{(m+1)!} = e - \sum_{p=0}^{m+1} \frac{1}{p!}, \text{ ce qui est la propriété à l'ordre } m+1, \text{ et achève donc la phase d'hérédité, et la}$$

démonstration par récurrence. La propriété $I_n = e - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$ est vraie pour tout entier n

4) Posons, pour tout entier n non nul, $f_n(t) = t^n e^{-t}$. Pour tout entier n non nul, f_n est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout t réel, $f_n'(t) = nt^{n-1} e^{-t} - t^n e^{-t} = t^{n-1} e^{-t} (n-t)$. Si n est un entier non nul, donc supérieur à 1, on peut affirmer que pour tout $t \in [0, 1]$, $f_n'(t) = t^{n-1} e^{-t} (n-t) \geq 0$, donc que f_n est croissante sur $[0; 1]$. Elle atteint donc son maximum lorsque $t=1$, lequel maximum vaut $f_n(1) = 1^n e^{-1} = 1$. Ainsi, on peut affirmer que pour tout $t \in [0, 1]$, $f_n(t) \leq 1$. On passe aux

inégalités dans l'intégrale. Ainsi $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{n!} dt \leq \frac{1}{n!} (1-0)$. L'inégalité $I_n \leq \frac{2}{n!}$ (et même $I_n \leq \frac{1}{n!}$!) est donc

vérifiée pour tout n non nul. Enfin, puisque pour tout $t \in [0, 1]$, $f_n(t) = t^n e^{-t} > 0$, l'inégalité $I_n \geq 0$ est vérifiée par

positivité de l'intégrale d'une fonction positive. Ainsi, pour tout entier naturel n non nul, $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{2}{n!}}$

5) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n!} = 0$, le théorème d'encadrement « des gendarmes » nous permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ (ce qui

permet, au passage, d'établir le résultat $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} = e$)

Exercice n°14

1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I = \left[u(x)v(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x) dx = \left[x^2 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \times (-\cos x) dx = 0 - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx$$

On calcule l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx$ en effectuant une deuxième intégration par parties :

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$ et $v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$J = \left[u(x)v(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x) dx = \left[2x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \times \cos x dx = \pi - 0 - 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2. \text{ Finalement, } \boxed{I = \pi - 2}$$

2) $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \int_0^{\pi} u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I = \left[u(x)v(x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x) dx = \left[-e^x \cos x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \times (-\cos x) dx = e^{\pi} + 1 + \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$$

On calcule $J = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$ en effectuant une deuxième intégration par parties :

$J = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx = \int_0^{\pi} u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$J = \left[u(x)v(x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x) dx = \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = 0 - 0 - I$$

On aboutit donc à l'équation $I = e^{\pi} + 1 - I$ c'est-à-dire $2I = e^{\pi} + 1$ et on conclut ainsi que $\boxed{I = \frac{e^{\pi} + 1}{2}}$

3) $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x dx = \int_0^{\pi} u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = e^{2x} \Rightarrow u'(x) = 2e^{2x}$ et $v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I = \left[u(x)v(x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x) dx = \left[e^{2x} \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2e^{2x} \sin x dx = 0 - 0 - \int_0^{\pi} 2e^{2x} \sin x dx$$

On calcule $J = \int_0^{\pi} 2e^{2x} \sin x dx$ en effectuant une deuxième intégration par parties :

$J = \int_0^{\pi} 2e^{2x} \sin x dx = \int_0^{\pi} u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = 2e^{2x} \Rightarrow u'(x) = 4e^{2x}$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$J = \left[u(x)v(x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x) dx = \left[-2e^{2x} \cos x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 4e^{2x} (-\cos x) dx = 2e^{2\pi} + 2 + 4 \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x dx = 2e^{2\pi} + 2 + 4I$$

On aboutit donc à l'équation $I = -2e^{2\pi} - 2 - 4I$ c'est-à-dire $5I = -2e^{2\pi} - 2$ et on conclut ainsi que $\boxed{I = -\frac{2}{5}(e^{2\pi} + 1)}$