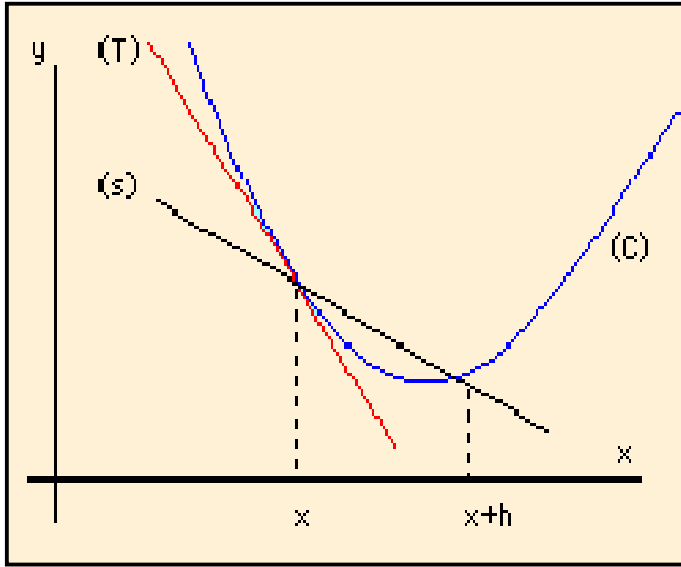


# الاشتقاقية

## الكفاءات المستهدفة



حساب العدد المشتق لدالة عند عدد حقيقي

تعيين معادلة مماس منحن في نقطة منه.

حساب مشتقات الدوال المرجعية  
حساب مشتقات الدوال  $f + g$

$f \times g$  ،  $\frac{1}{g}$  ،  $\frac{f}{g}$  ،  $f(ax + b)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

"ليونارد أولر" من أكبر العلماء الذين عرفهم

التاريخ ، استقرَ في البداية بـ سان بيترسبورق ثم

في برلين سنة 1741 حيث

ترأس أكاديمية العلوم إلى غاية 1766

تخصص في علم الفلك (دراسة مسار المجرات) ،

علم الفيزياء (الحقل المغناطيسي ، البصريات ،

... الرياضيات ( الحساب ، الهندسة التفاضلية ،

مرورا بالتحليل الرقمي و الوظيفي ، حساب ،

تغيرات البيانات ، المساحات الجبرية... ) ، معادلة

أولر (حساب التغيرات)

هو من أحد مؤسسي التحليل الوظيفي و

المعادلات التفاضلية



**EULER Leonhard**  
Suisse, 1707-1783

## الإنشيطه

### نشاط 1:

**الهدف:** إدراج مفهوم العدد المشتق بالسرعة .

$$v_m = \frac{5(2+h)^2 - 5(2)^2}{h} = 5h + 20 \quad (1)$$

$h$	-0.2	-0.1	-0.05	-0.001
$v_m$	19	19.5	19.75	19.995
$h$	0.00001	0.0001	0.005	0.01
$v_m$	20.00005	20.0005	20.025	20.05

$$v(2) \approx 20ms^{-1} \quad (3)$$

### نشاط 2:

**الهدف:** تفسير العدد المشتق هندسيا وكتابة معادلة المماس .

$$g(2) = a \text{ ومنه } g(2) = -\frac{1}{2}(2-a) = -\frac{1}{2} \left( 2 - \frac{3-4}{2+\frac{9}{2}} \right)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4} \quad (EL) \quad (3)$$

### نشاط 3:

**الهدف:** تفسير السرعة اللحظية هندسيا .

$$\frac{5(5+h)^2 - 5(5)^2}{h} = 5h + 50 \quad (2) \quad \text{الرسم .}$$

$$v_m = \lim_{h \rightarrow 0} 5h + 50 = 50ms^{-1}$$

(3) ترتيب النقطة  $M$  هو  $5t^2$  .

$$\frac{5t^2 - 20}{t - 2} = 5(t + 2) \text{ هو } (AM) \text{ معامل توجيه}$$

$$\frac{d(t) - d(2)}{t - 2} = 5(t + 2) : t_0 = 2 \text{ عند } d \text{ ونسبة تزايد}$$

• للحصول بيانيا على السرعة اللحظية عند  $t_0 = 2$  نقرب النقطة  $M$  نحو النقطة  $A$  .

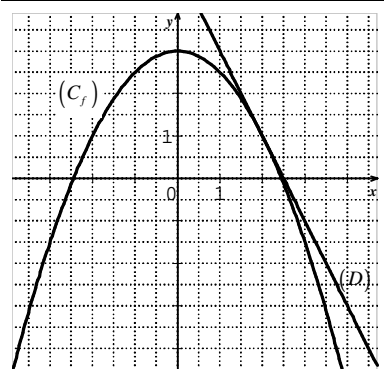
• السرعة اللحظية هي  $\lim_{t \rightarrow 2} 5(t + 2) = 20ms^{-1}$  و هذا

يتناسب مع التفسير الهندسي .

### نشاط 4:

**الهدف:** إدراج مفهوم المماس

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		3	



$$(x-2)^2 \text{ تعني } -\frac{1}{2}x^2 + 3 = -2x + 5 \quad (3)$$

ومنه  $(C_f)$  يقطع  $(D)$  في نقطة وحيدة  $A(2;1)$  .

(4)  $(D)$  يمس  $(C_f)$  .

## الأعمال موجهة

**كيفية إنشاء مماس لقطع مكافئ و لقطع زائد.**

**مسألة 1:** مماس لقطع مكافئ.

$$y = \frac{2a}{k}x - \frac{a^2}{k} \quad \bullet$$

• تقاطع  $(T)$  مع محور الفواصل:  $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$

•  $(T)$  يمر بالنقطتين  $A\left(a; \frac{a^2}{k}\right)$  و  $A'\left(\frac{a}{2}; 0\right)$

**تطبيق:**  $f: x \rightarrow a - 3x^2$  ،  $k = -\frac{1}{3}$  .

• المماس  $(T)$  للمنحنى ، عند النقطة  $A(1; -3)$  يشمل

النقطة  $A'\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

• المماس  $(T)$  للمنحنى ، عند النقطة  $B(-2; 12)$

يشمل النقطة  $B'(-1; 0)$  .

• المماس  $(T)$  للمنحنى ، عند النقطة  $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -1\right)$

يشمل النقطة  $C'\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right)$  .

**مسألة 2:** مماس لقطع زائد.

$$D_f = j^* \quad \bullet$$

• معادلة للمماس  $(T)$  عند  $H \left(a; \frac{1}{a}\right)$  هي :

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} \quad \bullet \quad A\left(0; \frac{2}{a}\right) \text{ و } B(2a; 0)$$

$$\left(\frac{0+2a}{2}; \frac{0+\frac{2}{a}}{2}\right) = \left(a; \frac{1}{a}\right) \quad \bullet$$

• إنشاء  $H$  • المماس  $(T)$  هو المستقيم  $(AB)$

•  $(T_1)$  هو  $(R'R'')$  حيث  $R'(0; -2)$  و  $R''(-2; 0)$

•  $(T_2)$  هو  $(N'N'')$ ؛  $N'(0; -\frac{2}{3})$  و  $N''(-6; 0)$

•  $(T_3)$  هو  $(P'P'')$  حيث  $P'(0; -4)$  و  $P''(-1; 0)$

**تقريبات تألفية مألوفا عند 0:**

(1) التقريب التألفي عند 0 هو :

$$f(x) ; f(0) + f'(0) \times x$$

## تمارين

- 1 صحيح 2 خاطئ 3 صحيح  
4 صحيح 5 خاطئ 6 صحيح  
7 خاطئ 8 خاطئ 9 صحيح  
10 خاطئ 11 صحيح 12 صحيح

13  $f'(1) = 2$

14  $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = h + 2$

15 الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق عند 1.

16 العدد  $f'(2)$  هو -1.

17  $f'(0)$  غير معرف

18 معادلة مماس المنحني للدالة  $f$  عند النقطة

19  $A(0; -1)$  هي  $y = 3x + 1$ .

العدد  $f'(1)$  هو 2.

20 الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  معرفة على  $i$  بـ:

$f'(x) = 2x + 1$ .

21  $f'(-1) = 0$ .

22  $f'(0) = 0$  (1) ،  $f'(3) = -3$  (2)

23  $f'(-2) = -12$  (3)

$f'(1) = -3$  (2) ،  $f'(-1) = 1$  (1)

24  $f'(4) = \frac{1}{\sqrt{8}}$  (4) ،  $f'(-3) = -\frac{1}{18}$  (3)

25  $f'\left(\frac{1}{4}\right) = -1$  (6) ،  $f'(-1) = -\frac{3}{2\sqrt{3}}$  (5)

26  $\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 4$  (1)

(2) لدينا  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 4$  ، نستنتج

أن الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق من أجل -1 و

$f'(-1) = 4$

(3) نعم الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق من أجل 0.

27 (1) ننشر  $(2+h)^3$

(2)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 6h + 12) = 12$

نستنتج أن الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق عند 2 و

$f'(2) = 12$

28 (1)  $f(2+h) - f(2) = h^3 - 8h$

$f(x) =$	$(1+x)^2$	$(1+x)^3$	$\sqrt{1+x}$	$\frac{1}{1+x}$
$f(x);$	$1+2x$	$1+3x$	$1+\frac{1}{2}x$	$1-x$

$f(x) =$	$\frac{1}{(1+x)^2}$	$\cos x$	$\sin x$
$f(x);$	$1-2x$	1	$x$

(2)  $f(0,003) = \frac{1}{1+0,003}$  ;  $1-0,003 = 0,997$

$f(-0,02) = \frac{1}{1-0,02}$  ;  $1+0,02 = 1,02$

$f(0,003) = (1+0,003)^3$  ;  $1+0,009$

$f(-0,02) = (1+(-0,02))^3$  ;  $1-0,06$

$f(0,002) = (1+0,002)^2$  ;  $1,004$

$f(-0,01) = (1-0,01)^2$  ;  $0,98$

$f(0,004) = \sqrt{1+0,004}$  ;  $1+0,002$

$f(0,01) = \sqrt{1-0,01}$  ;  $1-0,005$

$f(0,01) = \frac{1}{(1+0,01)^2}$  ;  $1-0,04 = 0,96$

$f(-0,01) = \frac{1}{(1-0,01)^2}$  ;  $1+0,02 = 1,002$

**تطبيق:**

$y = -x + 1$ : ( $\Delta$ ) ✓

$[-4,610^{-7}; 4,610^{-7}]$  ✓

$x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$  و من أجل  $\frac{1}{x+1} - (1-x) = \frac{x^2}{x+1}$  ✓

ولدينا  $\frac{1}{2} \leq x+1 \leq \frac{3}{2}$  ومنه  $\frac{2}{3} \leq \frac{1}{x+1} \leq 2$  ويعني أن

$0 \leq \frac{x^2}{x+1} \leq 2x^2$  وبالتالي  $\frac{2x^2}{3} \leq \frac{x^2}{x+1} \leq 2x^2$

✓ بوضع  $2x^2 = 10^{-2}$  نجد  $x = \sqrt{\frac{10^{-2}}{2}} \approx 0,071$

أو  $x \approx -0,071$  إذن المجال هو  $[-0,071; 0,071]$ .

$$f'(7) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \text{ و نجد}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} \text{ نحسب } \quad \text{37}$$

$$f'(-3) = -\frac{1}{4} \text{ و نجد}$$

$$\text{38 تصويب: التقييم يبدأ من 1} \\ a = 3 \text{ و } f(x) = 2x - 7 \text{ (1)}$$

$$f'(3) = 2 \text{ و نجد } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \text{ نحسب}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ بنفس الطريقة نحسب}$$

و نجد  $f'(a)$  في باقي الحالات الأخرى.

$$\text{39 نفس الطريقة المتبعة في حل التمرين رقم 38.}$$

$$\text{40 نفس الطريقة المتبعة في حل التمرين رقم 38.}$$

$$\text{41 (1) } f: x \rightarrow x^2 + 2 \text{ ، } a = 6$$

$$f(a+h) = f(6+h) = (6+h)^2 + 1$$

$$f'(6) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+12) = 12$$

إذن العدد المشتق للدالة  $f$  من أجل  $a = 6$  هو

$$f'(6) = 12$$

و بنفس الطريقة نحسب  $f'(a)$  في الحالات الأخرى

المتبقية.

$$\text{42 (1) } f: x \rightarrow x^2$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6$$

(2) أحسن تقريب تألفي للعدد  $f(3+h)$  من أجل القيم

الصغيرة للعدد  $|h|$  هو  $f(3) + hf'(3)$  أي  $9 + 6h$

$$\text{43 (1) } f: x \rightarrow x^2 + 2$$

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} = -2$$

(2) أحسن تقريب تألفي للعدد  $f(h-1)$  من أجل القيم

الصغيرة للعدد  $|h|$  هو  $f(-1) + hf'(-1)$  أي

$$3 - 2h$$

$$\text{44 (1) نعتبر الدالة } f: x \rightarrow x^2$$

الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق من أجل القيمة 2 و لدينا :

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = 4$$

أحسن تقريب تألفي للعدد  $(2+h)^2$  عندما ينتهي  $h$  إلى 0

هو  $f(2) + hf'(2)$  أي  $4 + 4h$ .

$$2,04 = 2 + 0,04 \text{ (2)}$$

$$\text{إذن ، } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -8 \text{ (2)}$$

$$. f'(2) = -8$$

$$\text{27 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -2 \text{ ، إذن } f'(2) = -2$$

$$\text{28 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 5 \text{ ، إذن } f'(-1) = 5$$

$$\text{29 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 1 \text{ ، إذن } f'(3) = 1$$

$$\text{30 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = 1 \text{ ، إذن}$$

$$f'(-2) = 1$$

$$\text{31 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -\frac{1}{9}$$

$$\text{إذن } f'(2) = -\frac{1}{9}$$

$$\text{32 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -\frac{1}{9}$$

$$\text{إذن } f'(2) = -\frac{1}{9}$$

$$\text{33 (1) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = -2$$

$$\text{إذن } f'(3) = -2$$

$$\text{(2) } f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{25} \text{ ، } f'(5) = -\frac{2}{9}$$

$$\text{(4) } f'(0) = -\frac{1}{2} \text{ ، } f'(\sqrt{3}) = -\frac{2}{7-4\sqrt{3}}$$

$$\text{34 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 2 \text{ ، إذن } f'(3) = 2$$

$$\text{35 (1) } \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{h+4} - 2}{h}$$

(2) من أجل  $h > -4$  و  $h \neq 0$  :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{h+4} - 2}{h} = \frac{(\sqrt{h+4} - 2)(\sqrt{h+4} + 2)}{h(\sqrt{h+4} + 2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h+4} + 2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{4} \text{ (3)}$$

إذن الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق عند 1 و لدينا  $f'(1) = \frac{1}{4}$

$$\text{36 نحسب } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h}$$

بنفس الطريقة نجد قيمة مقربة لـ  $\sqrt{4,83}$  و  $\sqrt{4,97}$  (بملاحظة أن  $4,97 = 5 - 0,03$  و  $4,83 = 5 - 0,17$ )

$$f(2,1) = f(2+0,1) \quad (1) \quad (48)$$

$$\text{أي } f(2,1) \cong 0,1 \times f'(2) + f(2)$$

$$f(2,1) \cong 3,4$$

$$f(2,1) = f(2+0,1) \quad (2)$$

$$f(2,2) \cong 0,1 \times f'(2,1) + f(2,1)$$

$$f(2,2) \cong 3,6 \quad \text{أي } f(2,2) \cong (0,1 \times 2) + 3,4$$

(49) معادلة مماس المنحني (C) عند النقطة

$$A(2;0) \text{ و الذي معامل توجيهه } a=1$$

هي:  $y = a(x - x_0) + f(x_0)$  حيث  $x_0$  هي فاصلة A

$$\text{أي } y = 1(x - 2) + f(2)$$

$$\text{أي معادلة المماس هي } y = x - 2$$

و بنفس الطريقة نعين المماس في الحالات الأخرى.

(50) معادلة (C) هي  $y = \frac{2x^2}{5}$  و  $x_0 = 3$

معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0 = 3$

$$\text{هو: } f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{12}{5}$$

$$\text{(بوضع } f(x) = \frac{2x^2}{5} \text{)}$$

معادلة المماس هي:  $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$  و نجد

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{18}{5} \quad (f(3) = \frac{18}{5})$$

و بنفس الطريقة يتم تعيين معادلة المماس للمنحني (C) في الحالات الأخرى المتبقية.

(51) بوضع:  $f(x) = x^2 - 2x$ . معامل توجيه المماس

عند النقطة ذات الفاصلة -1 هو:

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = -4$$

معادلة المماس هي:  $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$  و

$$\text{نجد } y = -4x - 1 \quad (f(-1) = 3)$$

(52) بوضع:  $f(x) = -\frac{4}{x}$  معامل توجيه المماس عند

النقطة ذات الفاصلة 2 هو:

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1$$

معادلة المماس هي:  $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$  و نجد

$$y = x - 4 \quad (f(2) = -2)$$

(53) بوضع:  $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$  معامل توجيه المماس

عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -1$$

$$\text{إذن } (2,04)^2 \cong 4 + 4(0,04) = 4,16 \quad \text{أي } (2,04)^2 \cong 4 + 4(0,04)$$

$$1,98 = 2 - 0,02$$

$$\text{إذن } (1,98)^2 \cong 4 + 4(-0,02) = 3,92 \quad \text{أي } (1,98)^2 \cong 4 + 4(-0,02)$$

$$2,001 = 2 + 0,001$$

$$\text{إذن } (2,001)^2 \cong 4 + 4(0,001) = 4,004$$

$$(2,001)^2 \cong 4,004$$

(45) (1) نعتبر الدالة  $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$

الدالة f تقبل الاشتقاق من اجل القيمة 3 و لدينا :

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{3+h} \right) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}$$

أحسن تقريب تآلفي للعدد  $\frac{1}{3+h}$  عندما ينتهي h إلى 0

$$\text{هو } -\frac{1}{9}h + \frac{1}{3}$$

$$(2) \quad 3,02 = 3 + 0,02 \quad \text{إذن } \frac{1}{3,02} \cong -\frac{1}{9}(0,02) + \frac{1}{3}$$

$$\text{أي } \frac{1}{3,02} \cong 0,3311111111$$

و بنفس الطريقة نجد قيمة تقريبية لـ  $\frac{1}{3,1}$  و  $\frac{1}{2,99}$

(46) (1) نعتبر الدالة  $f: x \rightarrow x^3$

الدالة f تقبل الاشتقاق من اجل القيمة 1 و لدينا :

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = 3$$

أحسن تقريب تآلفي للعدد  $(1+h)^3$  عندما يقترب h من 0

$$\text{هو } f(1) + h f'(1) = 1 + 3h$$

$$(2) \quad 1,04 = 1 + 0,04$$

$$\text{إذن } (1,04)^3 \cong 1 + 3(0,04) = 1,12 \quad \text{أي } (1,04)^3 \cong 1 + 3(0,04)$$

$$(0,96)^3 \cong 0,88$$

(47) (1) نعتبر الدالة  $f: x \rightarrow \sqrt{x}$

الدالة f تقبل الاشتقاق من اجل القيمة 5 و لدينا :

$$f'(5) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+h} - \sqrt{5}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

أحسن تقريب تآلفي للعدد  $\sqrt{5+h}$  عندما ينتهي h إلى 0

$$\text{هو } f(5) + h f'(5) = \sqrt{5} + \frac{h}{2\sqrt{5}}$$

$$(2) \quad 5,01 = 5 + 0,01$$

$$\text{إذن } \sqrt{5,01} \cong \sqrt{5} + \frac{0,01}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{أي } \sqrt{5,01} \cong 2,238304045$$

$$\frac{j(a+h)-j(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{1}{2}h + a - 2$$

(ب)  $j$  تقبل الاشتقاق على  $i$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2-a \quad (\text{ج})$$

$$\frac{j(a+h)-j(a)}{h} = \frac{1}{2}h$$

و منه  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{j(a+h)-j(a)}{h} = 0$  ، إذن الدالة  $j$  ثابتة  
**61** (1) من أجل كل عدد حقيقي  $a$  لدينا:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a-5$$

إذن الدالة  $f$  قابلة

للاشتقاق عند كل  $x$  من  $i$  و  $f'(x) = 2x-5$  .

(2) معادلة مماس المنحني ( $P$ ) عند النقطة  $E(0;4)$  هي:  $y = -5x+4$

(3) نعم توجد نقطة  $M$  من ( $P$ ) يكون مماسه عندها موازيا للمستقيم الذي معادلته  $y = \frac{1}{2}x$  حيث فاصلة  $M$

هي  $\frac{11}{4}$  .

(لإيجاد هذه الفاصلة نحل المعادلة  $(f'(x) = \frac{1}{2})$ )

(4) معادلة مماس المنحني ( $P$ ) عند النقطة ذات الفاصلة  $a$  هي:  $y = (2a-5)x - a^2 + 4$

(5) المنحني ( $P$ ) يشمل مماسين كل منهما يشمل المبدأ إذا كان  $-a^2 + 4 = 0$  أي  $(a = -2)$  أو  $(a = 2)$  .

**62** (1) الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على  $i$  و لدينا من أجل كل  $x$  من  $i$  :  $f'(x) = 6x^2 + 10x - 1$

(2) الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على  $i$  و لدينا من أجل كل  $x$  من  $i$  :  $f'(x) = 2x \cos \frac{p}{3} - 1$

(3) الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على  $]1; +\infty[$  و لدينا من أجل كل  $x$  من  $]1; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

(4) الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على  $i$  و لدينا من أجل كل  $x$  من  $i$  :  $f'(x) = \frac{2x^4 + 6x^2 + 10x}{(x+1)^2}$

**63** الدالة  $x \mathbf{a} x$  قابلة للاشتقاق على  $i$

و الدالة  $x \mathbf{a} \sqrt{x}$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$

و بالتالي الدالة  $x \mathbf{a} x\sqrt{x}$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$

و من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

**64** (1)  $f': x \mathbf{a} 6x-4$  ،  $f': x \mathbf{a} x - \frac{1}{2}$  (2) ،  $f': x \mathbf{a} x+2$  (3)

معادلة المماس هي :  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$  و نجد

$$(f(1) = \frac{3}{2}) , \quad y = -x + \frac{5}{2}$$

من الواضح أن المماس يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها  $\frac{5}{2}$  .

**54** (1) نحل المعادلة ذات المجهول  $x: x^2 = -4x-4$  و نجد  $x = -2$  ، إذن ( $C$ ) و ( $D$ ) يتقاطعان في النقطة  $A(-2;4)$  .

(2) نستنتج أن ( $D$ ) هو المماس لـ ( $C$ ) في النقطة  $A(-2;4)$  .

**55** تصحيح : معادلة ( $D$ ):  $y = -2x-2$  وفي السؤال (1)

$$3x^3 + 2x^2 - 5x - 4 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

$$3x^3 + 2x^2 - 5x - 4 = (x+1)(3x^2 - x - 4)$$

$$(2) \text{ نحل المعادلة } 3x^3 + 2x^2 - 7x - 6 = -2x - 2$$

ونستعمل السؤال السابق ونجد  $x = -1$  أو  $x = \frac{4}{3}$

إذن النقطة المشتركة ذات الترتيب معدوم هي  $A(-1;0)$  (3)  $x = -1$  هو حل مضاعف للمعادلة :

$3x^3 + 2x^2 - 7x - 6 = -2x - 2$  إذن ( $D$ ) مماس لـ ( $C$ ) في النقطة  $A(-1;0)$  .

**56** معادلة مماس المنحني ( $C$ ) عند النقطة  $A(2;4)$  هي:

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

بما أن المماس يوازي ( $\Delta$ ) فإن  $f'(2) = 3$

إذن معادلة مماس هي  $y = 3x - 2$

**57** بما أن شعاع توجيه المماس  $i$  فإنه يوازي حامل محور الفواصل و بالتالي معادلته  $y = -3$

(ترتيب النقطة  $A$  هو  $-3$ )

**58** (1) من أجل كل عدد حقيقي  $a$  لدينا:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 3$$

إذن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $a$  و  $f'(a) = 3$  .

(2)  $f': x \mathbf{a} m$

**59** (1) من أجل كل عدد حقيقي  $a$  لدينا:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 3a^2$$

للاشتقاق عند كل  $x$  من  $i$  و  $f'(x) = 3x^2$  .

(2) معادلة مماس منحنى الدالة  $f$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي:  $y = 3x - 2$

**60** (1) الدالة  $g$  هي مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق

على  $i$  من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = -x + 2$  (أ) (2)

$$\frac{j(a+h)-j(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{لدينا:}$$

$$f(0,96) \cong 1,49 \quad , \quad f(1,02) \cong 1,505$$

$$, \quad y = 11x + 5 \quad (2) \quad , \quad y = 3x + 4 \quad (1) \quad \text{71}$$

$$y = -7x + 11 \quad (3)$$

72 (1) معادلة المماس  $(T_1)$  لـ  $(C_1)$  عند النقطة

$$y = -2x_0x + x_0^2 + 3 \quad \text{هي } A(x_0, f(x_0))$$

و معادلة المماس  $(T_2)$  لـ  $(C_2)$  عند النقطة

$$y = -\frac{2x}{x_0^2} + \frac{4}{x_0} \quad \text{هي } A(x_0, g(x_0))$$

$$x_0 = 1 \quad \text{فيكون } \frac{4}{x_0} = x_0^2 + 3 \quad \text{و} \quad -2x_0 = \frac{-2}{x_0^2}$$

إذن يوجد مستقيم  $(\Delta)$  يمس المنحنيين  $(C_1)$  و  $(C_2)$  في النقطة  $A(1;2)$ .

(2) معادلة  $(\Delta)$  هي :  $y = -2x + 4$

(3)  $(\Delta)$  أعلى  $(C_1)$  ،  $(\Delta)$  أعلى  $(C_2)$  في  $]-\infty; 0[$

و  $(\Delta)$  أسفل  $(C_2)$  في  $]0; +\infty[$ .

$$f'(x) = \frac{-ax^2 + (6-2b)x + a}{(x^2+1)^2} \quad (1) \quad \text{73}$$

$$b = 3 \quad \text{و} \quad a = 4 \quad (2)$$

$$b = 2 \quad \text{و} \quad a = -1 \quad \text{74}$$

75 نناقش حسب قيم  $m$  عدد حلول المعادلة  $f'(x) = 0$

إذا كان  $m = 0$  فإنه يوجد مماس واحد.  
و إذا كان  $m \neq 0$  فإنه يوجد مماسان.

$$DE = x \tan 60^\circ = x\sqrt{3} \quad , \quad DG = m - 2x \quad (1) \quad \text{76}$$

ومنه مساحة المستطيل هي :  $R(x) = -2\sqrt{3}x^2 + m\sqrt{3}x$

$$x = \frac{m}{4} \quad \text{معناه } R'(x) = 0 \quad ; \quad R'(x) = -4\sqrt{3}x + m\sqrt{3}$$

بما أن  $R(x)$  من الدرجة الثانية و  $-2\sqrt{3} < 0$  فإن

$$R\left(\frac{m}{4}\right) \quad \text{هي القيمة الحدية الكبرى ومنه } x = \frac{m}{4} \quad \text{ولدينا}$$

$$. R\left(\frac{m}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8} m^2$$

(2) مساحة المثلث هي

$$T(m) = \frac{1}{2} m \times \frac{m}{2} \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} m^2$$

$$R\left(\frac{m}{4}\right) = \frac{T(m)}{2} \quad \text{ومننه}$$

$$T(4,002) ; T(4) + 0,002T'(4)$$

$$\text{ومننه } T(4,002) ; 4,004 \times \sqrt{3}$$

$$\text{و } R(2,001) ; 2,002 \times \sqrt{3}$$

$$f' : x \text{ a } 4\sqrt{3}x^3 - 3\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 \quad (4)$$

$$f' : x \text{ a } -\frac{3}{(x+2)^2} \quad (2) \quad , \quad f' : x \text{ a } \frac{2}{x^2} \quad (1) \quad \text{65}$$

$$f' : x \text{ a } \frac{-3x^2 - 10x - 9}{(x^2 - 3)^2} \quad (4) \quad f' : x \text{ a } 2 + \frac{4}{(x-3)^2} \quad (3)$$

$$f' : x \text{ a } 3x^2 \quad (1) \quad \text{66}$$

$$g(x) = f(x-3) \quad \mathbf{v}$$

$$g'(x) = f'(x-3) = 3(x-3)^2 \quad \text{ومننه}$$

$$g(x) = f(2x+5) \quad \mathbf{v}$$

$$g'(x) = 2f'(2x+5) = 2 \times 3(2x+5)^2 \quad \text{ومننه}$$

$$g(x) = f(-3x+2) \quad \mathbf{v}$$

$$g'(x) = -3f'(-3x+2) = -3 \times 3(-3x+2)^2$$

$$\text{و } f(x) = \sqrt{x} \quad (1) \quad \text{67}$$

$$g(x) = f(x-1) = \sqrt{x-1}$$

الدالة  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$  و الدالة  $g$  معرفة على

$$.]1; +\infty[$$

(2) الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و الدالة  $g$  تقبل

الاشتقاق على  $]1; +\infty[$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (3)$$

$$\text{و } g'(x) = f'(x-1) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$\mathbf{v}$  نتبع نفس الطريقة في الحالتين المتبقيتين.

$$, \quad f'(x) = 6(3x-2) \quad (1) \quad \text{68}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{2-3x}} \quad (4) \quad , \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \quad (3)$$

$$, \quad f'(x) = \frac{6x-3}{2\sqrt{x}} \quad (5)$$

$$f'(x) = \frac{-5x^2 + 6x + 15}{2\sqrt{-x+3}} \quad (6)$$

$$f'(x) = -3\sin(3x-2) \quad (1) \quad \text{69}$$

$$f'(x) = 3\cos(3x-2) \quad (2)$$

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (3)$$

$$f'(x) = \cos(x-2p)\cos(x+p) - \sin(x+p)\sin(x-2p) \quad (4)$$

$$f'(x) = -2\cos 3x \sin 3x \quad (5)$$

أكبر مجموعة بحيث تكون الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق

هي  $]0; +\infty[$  ، ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0; +\infty[$

إذا كان  $x < -2a$  فإن  $(c_f)$  أسفل  $(T_a)$

إذا كان  $x = -2a$  فإن  $(c_f)$  يقطع  $(T_a)$

82 (1) في المثلث القائم  $OIT$  ؛  $\frac{IT}{OI} = \sin x$  ؛

و  $\frac{OI}{OT} = \cos x$  ، بما أن  $OI = 1$  نحصل على

$IT = \frac{\sin x}{\cos x}$  (لاندرج  $\tan$  لكونها غير موجودة في البرنامج).

(2)  $A_1 = \frac{1}{2} \sin x$  و  $A_2 = \frac{1}{2} IT \times OI = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}$  .

$A$  مساحة الجزء من القرص المرفق للزاوية  $x$  ، ومساحة القرص هي  $pR^2 = p$  وهي مرفقة للزاوية  $2p$  إذن :

$A = \frac{px}{2p} = \frac{1}{2}x$

(3) بما أن  $A_1 \leq A \leq A_2$  فإن :

$\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}$  أي :  $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$

إذن  $x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$  وبما أن في المجال  $0 < \frac{p}{2}$  ؛  $\cos x > 0$  :

فإن :  $x \cos x \leq \sin x \leq x$  خلاصة  $x \cos x \leq \sin x$

• نستنتج من هذا أن  $\frac{\sin x}{x} \leq 1$  لأن  $\cos x \leq 1$  لأن  $\frac{p}{2} > 0$  ؛  $x \in ]0 ; \frac{p}{2}[$

(4) من الرسم نخمن النتيجة  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$

(5)  $f'(x) = \cos x$  ومنه  $f'(0) = \cos 0 = 1$

ومنه  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h-0} = f'(0) = 1$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = 1$  أي  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  ومنه  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$

83 الطريقة الأولى :

(1)  $d(t) = -5(t-6)^2 + 180$  ؛  $d(t) = -5(t^2 - 12t)$

ومنه القيمة الحدية العظمى للارتفاع هي  $d(6) = 180$  .

(2) السرعة في اللحظة 6 تكون معدومة .

الطريقة الثانية :

(1)  $d'(t) = -10t + 60$

$t$	0	6	$+\infty$
$d'(t)$		+	0
$d(t)$	0	↗ 180 ↘	

ومنه  $d(6) = 180$  هي القيمة الحدية العظمى .

(2)  $d'(6) = 0$

84 (1) لدينا  $DC = f(x_0 + h) - f(x_0 - h)$

و  $BD = 2h$  ومنه  $S = h[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]$

77 (1)  $A\left(0; \frac{-8}{m}\right)$  و  $B(2m; 0)$

(2) معادلة  $(AB)$  هي  $y = \frac{4}{m^2}x - \frac{8}{m}$

المعادلة  $\frac{-4}{x} = \frac{4}{m^2}x - \frac{8}{m}$  تقبل حلا مضاعفا  $x = m$

و بالتالي المستقيم  $(AB)$  مماس للمنحنى  $(H)$  في النقطة  $M$ .

78 (1)  $T(h) = \frac{-12-4h}{\sqrt{16-12h-4h^2}+4}$

(ب)  $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = -\frac{3}{2}$  ومنه الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق من أجل القيمة  $\frac{3}{2}$  و  $-\frac{3}{2}$

$f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

(2)  $v = \frac{x}{t}$  و  $2 = \frac{x}{t}$  أي  $x = 2t$

$OB^2 = AB^2 - OA^2$  ومنه  $OB^2 = 25 - (2t)^2$

أي  $OB = \sqrt{25 - 4t^2}$

إذا كان  $x = 3$  فإن  $t = \frac{3}{2}$  ،  $f(t) = \sqrt{25 - t^2}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{3}{2}+h\right) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{h} = -\frac{3}{2}$

89 (1) ننشر  $(R+x)^2$  فيكون

$g = g_0 \times \frac{R^2}{R^2 \left(1 + \frac{2x}{R} + \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)}$

ومنه  $g = g_0 \times \frac{1}{1 + \frac{2x}{R} + \left(\frac{x}{R}\right)^2}$

(2)  $1 + \frac{2x}{R} \cong 1 - \frac{2x}{R}$  و  $0 < \left(\frac{x}{R}\right)^2$

$g ; g_0 \times \left(1 - \frac{2x}{R}\right)$   
 $g ; 9,785$  (3)

80 (1) ننشر  $(x-a)(x^2 + ax - 2a^2)$

(2) معادلة المماس  $(T_a)$  للمنحنى  $(c_f)$  عند النقطة ذات

الفاصلة  $a$  هي:  $y = 3a^2x - 2a^3$

لدينا  $(x^2 + ax - 2a^2) = (x-a)(x+2a)$

- لدراسة الوضع النسبي لـ  $(c_f)$  و  $(T_a)$  ندرس إشارة العدد

$(x-a)^2(x+2a)$

إذا كان  $x > -2a$  فإن  $(c_f)$  أعلى  $(T_a)$

$$S = h[f(x_0) + hf'(x_0) - f(x_0) + hf'(x_0)]$$

$$S = 2h^2 f'(x_0) : \text{أي}$$

$$. S = 2 \times (0,03)^2 \times 9 = 0,0162 \quad (2)$$

85 (1) أحسن تقريب تآلفي للدالة  $f$  من أجل كل عدد

حقيقي  $x$  هو  $f(x+h) = f(x) + hf'(x)$  ومن أجل

$$f(-x-h) = f(-x) - hf'(-x) \quad \text{لدينا}$$

بما أن  $f$  زوجية نحصل على  $f'(x) = -f'(-x)$ .

$$g'(1) = 1 \quad \text{ومنه} \quad g'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \quad (2)$$

ولدينا  $g(1) = 0$  إذن المعادلة  $y = x - 1$

الاستنتاج  $g$  زوجية ومنه  $g'$  فردية إذن :

$$g(-1) = g(1) = 0 \quad \text{و} \quad g'(-1) = -g'(1) = -1$$

والمعادلة هي :  $y = -x - 1$