

Epreuve de Fin de Semestre**Exercice 01:** (6 = 1 + 2 + 2 + 1 points)

Soit $f(z) = p(x, y) + iq(x, y)$ une fonction à variable complexe, où $p(x, y)$ et $q(x, y)$ sont des fonctions de classe C^1 sur un domaine D .

1. Etablir les équations de *Cauchy-Riemman*
2. Montrer que les équations de *Cauchy-Riemman* sont équivalentes à

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = i \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

3. Vérifier si les deux fonctions suivantes sont holomorphes

$$f(z) = y + ix \quad \text{et} \quad g(z) = (x + iy - 1)^2$$

4. Soit $f = 3 + iv$ une fonction dérivable dans le disque $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ où v est la partie imaginaire de f . Prouver que f est constante sur D .

Exercice 02: (8 = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 points)

Soient f et g deux fonctions à variable complexe définies par:

$$g(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 \quad \text{et} \quad f(z) = \frac{1}{g(z)}$$

1. Trouver les zéros de g avec leurs multiplicités.
2. En déduire l'ouvert d'holomorphic de la fonction f .
3. Préciser la nature des singularités isolées de f .
4. Déterminer les résidus de f aux points $z = 1$ et $z = 2$.
5. Vérifier que $f(z) = \frac{3}{4z} + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{4(z-2)}$.
6. Donner le développement de Laurent et le résidu de f en 0.

Exercice 3: (5 = 3 + 3 points)

1. Calculer l'intégrale suivante: $\int_{1+i}^{2+3i} (12z^2 - 4iz) dz$.

2. Calculer $\oint_C \frac{4z+1}{(4z^2+1)(z-\frac{1}{2})} dz$ où $C : |z-1| = 1$.