Analyse dimensionnelle

L'**analyse dimensionnelle** est le domaine (restreint) de la physique qui concerne les unités des grandeurs. Notamment, le fait que les unités soient arbitraires fait que toute équation valable de la physique est homogène : quelque chose qui se mesure en mètres par seconde ne peut pas être égal à quelque chose qui se mesure en kilogrammes par mètre. C'est un moyen très prisé et très efficace de vérifier ses calculs.

Sommaire

Étalons, unités et équation aux dimensions

L'**équation aux dimensions** est la formule qui permet de déterminer l'unité dans laquelle doit être exprimé le résultat d'une formule. C'est une équation de grandeurs, c'est-à-dire dans laquelle on représente les phénomènes mesurés par un symbole ; par exemple, une longueur est représentée par la lettre « *L* ».

Une grandeur est un paramètre mesurable qui sert à définir un état, un objet. Par exemple, la longueur, la température, l'énergie, la vitesse, la pression, une force (par exemple le poids), l'inertie (masse), la quantité de matière (nombre de moles)... sont des grandeurs.

La mesure d'une grandeur fait appel à la métrologie. Il faut définir un phénomène de référence, ou **étalon**, qui va permettre de dire : « le phénomène actuel fait *x* fois le phénomène de référence ». Pour simplifier l'énoncé, on définit une **unité** et l'on dit : « le phénomène actuel fait *x* unités ». Par exemple, si une barre fait trois fois l'étalon-mètre, on dit que « la barre mesure 3 mètres », le mètre étant l'unité de longueur.

Il faudrait ainsi trouver un phénomène de référence par phénomène observé. Heureusement, on peut construire des étalons à partir d'étalons déjà existants : par exemple, l'étalon-vitesse peut se construire à partir de l'étalon-longueur et de l'étalon-temps :

> la vitesse de référence est la vitesse d'un objet qui parcourt un étalon-longueur durant un étalon-temps, soit un mètre par seconde.

On ne définit ainsi pas d'unité spécifique, mais on compose l'unité à partir d'unités existantes.

On a pu ainsi se ramener à seulement sept étalons :

- longueur *L* (mètre — m),
- masse *M* (kilogramme — kg),

- temps T (seconde — s),
- courant électrique I (ampère — A),
- température Θ (kelvin — K),
- quantité de matière N (mole — mol),
- intensité lumineuse J (candela — cd).

Notons que l'on aurait pu choisir sept autres grandeurs de référence, par exemple définir la vitesse comme grandeur de base et définir l'étalon-longueur en fonction de l'étalon-vitesse et de l'étalon-temps (c'est ce qui est d'ailleurs fait implicitement, l'étalon-vitesse étant la vitesse de la lumière dans le vide) ; le choix de ces sept grandeurs est une construction historique, les grandeurs ont été choisies depuis le XVIIIe siècle en fonction des besoins et des étalons que l'on pouvait fabriquer de manière simple et précise.

Ainsi, la **dimension d'une grandeur** est la manière dont se compose le phénomène-étalon à partir des sept étalons de base. Par exemple, on dit que « la dimension d'une vitesse est une longueur divisée par une durée » (on dit aussi « la vitesse est *homogène à* une longueur divisée par une durée). On note ceci de manière abrégée par une **équation aux dimensions** :

$$[V] = \frac{L}{T}$$

L'unité utilisée représente cette équation aux dimension, par exemple pour la vitesse, l'unité est le $m \cdot s^{-1}$ (ou m/s).

La composition peut devenir plus complexe. Ainsi, la force a la dimension d'une masse multipliée par une longueur et divisée par une durée au carré :

$$[F] = \frac{M\ L}{T^2} = M\ L\,T^{-2}$$

et l'unité de force, le newton (N) est donc homogène à des $kg \cdot m \cdot s^{-2}$ (kilogramme mètre sur seconde carrée). Cela signifie que l'étalon-force est un phénomène permettant de faire passer une masse de 1 kg d'une vitesse 0 à 1 $m \cdot s^{-1}$ en 1 s.

Signification des exposants

Les exposants indiquent le degré d'influence d'un paramètre composant le phénomène sur l'intensité finale du paramètre.

Par exemple, dans le cas de l'étalon-force, considérons la forme intermédiaire de l'équation aux dimensions :

$$[F] = \frac{M\ V}{T}$$

si l'on double la force :

- on peut accélérer une charge double sur une même durée et atteindre la même vitesse, le [M] a donc un exposant 1 (stricte proportionnalité) ;
- on peut accélérer la même charge sur une même durée pour atteindre une vitesse double, le [V] a donc un exposant 1 ;
- on peut accélérer la même charge durant la moitié du temps pour atteindre la même vitesse, le deuxième [T] a donc un exposant -1 (1/[T]).

Quelques exemples

GRANDEUR	FORMULE DE DÉFINITION	ÉQUATION AUX DIMENSIONS MLT
Longueur	L	L
Vitesse	$v = L/t$	LT^{-1}
Accélération	$a = v/t$	LT^{-2}
Surface	$S = L^2$	L^2
Volume	$V = L^3$	L^3
Masse volumique	$\rho = m / V$	ML^{-3}
Volume massique	$v = V / m$	$M^{-1}L^3$
Force	$F = m\ a$	MLT^{-2}
Pression	$p = F / S$	$ML^{-1}T^{-2}$
Travail	$W = F\ L$	ML^2T^{-2}
Puissance	$P = W / t$	ML^2T^{-3}

Tableau 1

Prédictions

L'analyse dimensionnelle permet de trouver la solution de certains problèmes sans avoir à résoudre d'équations grâce au théorème de Buckingham (parfois appelé théorème Pi). Deux exemples célèbres sont le calcul de la puissance de la première bombe atomique et le modèle de Kolmogorov de la turbulence homogène isotrope, qui a influencé grandement toute la mécanique des fluides. Ce type de calcul n'est valable que si un petit nombre de paramètres contrôlent la solution d'un problème (2 ou 3).

Illustration de la méthode

Considérons un point matériel de masse *m* et de charge électrique *q* soumis à un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. Le point matériel animé d'une vitesse $\vec{v}$ est soumis à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Lorsque $\vec{v} \perp \vec{B}$, le point matériel décrit un cercle dans le plan perpendiculaire au champ magnétique à vitesse angulaire ω constante. Cette vitesse angulaire doit dépendre des paramètres *m*, *q* et $\vec{B}$ du problème ; on peut chercher s'il existe une relation simple, de type produit :

$$\omega = k\, m^{\alpha}\, q^{\beta}\, B^{\gamma}$$

où *k*, α, β et γ sont des constantes inconnues, et des nombres sans dimension. Les équations aux dimensions permettent de déterminer ces nombres. En effet, on a :

$$[\, F \,] = M\, L\, T^{-2} = [\, q\, v\, B \,] = Q\, L\, T^{-1}\, [\, B \,]$$

d'où l'équation aux dimensions d'un champ magnétique :

$$[\, B \,] = M\, T^{-1}\, Q^{-1}$$

On en déduit l'équation aux dimensions de ω :

$$[\, \omega \,] = \left[\, k\, m^{\alpha}\, q^{\beta}\, B^{\gamma} \,\right] = M^{\alpha}\, Q^{\beta}\, [\, B \,]^{\gamma} = M^{\alpha+\gamma}\, Q^{\beta-\gamma}\, T^{-\gamma}$$

Par ailleurs, la vitesse angulaire ω est le rapport d'un angle divisé par un temps T_0 (la période de rotation) :

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0}$$

Un angle étant sans dimensions, il vient :

$$[\, \omega \,] = T^{-1} = M^{\alpha+\gamma}\, Q^{\beta-\gamma}\, T^{-\gamma}$$

On en déduit que

- $\gamma = 1$,
- $\alpha + \gamma = 0 \implies \alpha = -1$,
- $\beta - \gamma = 0 \implies \beta = +1$.

D'où la forme de ω :

$$\boxed{\omega = k\, \frac{qB}{m}}$$

On appelle « pulsation cyclotron » la grandeur :

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

La constante numérique *k* ne peut pas être déterminée par cette méthode ; il faut faire un calcul explicite complet de ω pour la trouver (ou une mesure expérimentale pour la déterminer). L'expérience montre cependant que, dans un système d'unité adapté au problème étudié, la constante *k* est toujours de l'ordre de grandeur de 1 (au sens où $\pi \sim e \sim 1$), d'où la pertinence de l'analyse dimensionnelle pour prévoir la forme du résultat d'un calcul, ainsi que son ordre de grandeur [1].

« Principe zéro » de la physique théorique

La puissance du pouvoir prédictif de l'analyse dimensionnelle en regard de sa simplicité a conduit Wheeler à proposer le principe général suivant :

> **Ne jamais faire de calculs avant d'en connaître le résultat.**

Cet énoncé, qui peut sembler a priori paradoxal, signifie concrètement : ne pas se lancer dans un calcul compliqué sans avoir trouvé au préalable la forme qualitative du résultat avec l'analyse dimensionnelle.

Exemple : explosion nucléaire

L'analyse dimensionnelle a permis à Geoffrey Ingram Taylor d'estimer en 1950 l'énergie dégagée par l'explosion d'une bombe atomique, alors que cette information était classée *top secret*. Il lui a suffit pour cela d'observer sur un film d'explosion, imprudemment rendu public par les militaires américains, que la dilatation du champignon atomique suivait la loi expérimentale de proportionalité :

$$r(t) \propto t^{2/5}$$

Le physicien Taylor suppose alors *a priori* que le processus d'expansion de la sphère de gaz dépend au minimum des paramètres suivants :

- le temps *t* ;
- l'énergie *E* dégagée par l'explosion ;
- la masse volumique de l'air ρ.

L'analyse dimensionnelle le conduit alors pour le rayon de la sphère de gaz à l'instant *t* à :

$$r = k\, E^{1/5}\, \rho^{-1/5}\, t^{2/5}$$

où *k* est une constant sans dimensions. Taylor retrouve donc bien la loi expérimentale de dilatation du champignon

$$r(t) \propto t^{2/5},$$

ce qui semble valider son choix de paramètres. Il détermine alors *r* et *t* à partir du film, et, *k* étant supposée de l'ordre de l'unité et ρ étant connue, il obtient finalement :

$$\boxed{E \sim \frac{\rho\, r^5}{t^2}}$$

CALCULS D'INCERTITUDES

Il est utile de savoir apprécier l'ordre de grandeur de la précision d'une mesure, c'est-à-dire, identifier les diverses causes d'incertitudes pour être capable soit de comparer les mérites respectifs de plusieurs méthodes, soit de fournir un intervalle de mesure correspondant à un niveau de confiance (99%, 95%, ...).

Pour ce dernier cas il nous faut procéder à une analyse statistique d'une série de mesures. Malheureusement, celle-ci n'est pas réalisable si l'on ne dispose pas d'un grand nombre de mesures d'une même grandeur (cas de la plupart des T.P.). Nous ne développerons donc pas cette analyse ici.

Par contre, on procédera dans la plupart des T.P. à un calcul "d'erreurs" classique bien que ce dernier possède quelques défauts:

- les causes d'erreurs ne se limitent pas à la précision de l'instrument de mesure (difficulté d'apprécier la mise au point d'une image, défaut de fidélité d'un instrument, étourderie,...)

- on considère que toutes les erreurs sont dans le même sens et cela conduit à des résultats pessimistes (incertitudes trop grandes).

Par contre un certain nombre de qualités lui sont reconnues

- il permet de voir les grandeurs sur lesquelles devra porter l'amélioration de la précision. Ex: chute libre $g = \frac{2h}{t^2}$: une erreur sur le temps aura plus de répercussion qu'une erreur sur la hauteur h.

- il donne l'ordre de grandeur correct et permet d'adapter le nombre de chiffres significatifs.

Calcul d'erreurs classique

Supposons que des mesures aient donné des valeurs: *x, y, z, ...* avec les incertitudes Δx, Δy, Δz, ... Considérons la fonction *f(x,y,z,...)*. Quelle est l'incertitude sur *f*?

On exprime la différentielle:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \ldots$$

et on regarde dx, dy, dz,... comme des petits écarts. Comme on ne sait généralement pas si ces derniers sont par excès ou par défaut, on ne peut que majorer l'incertitude sur *f*:

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z + \ldots$$

Cette formule générale peut être appliquée à tous les cas et conduit aux règles usuelles ***si x,y,z,... sont des grandeurs indépendantes:***

$$A = x + y + z \qquad \Delta A = \Delta x + \Delta y + \Delta z$$

$$A = x^m y^n \qquad \frac{\Delta A}{A} = |m|\frac{\Delta x}{x} + |n|\frac{\Delta y}{y}$$

Lorsque la fonction se présente comme un produit ou un quotient on est conduit à des calculs un peu plus simples en utilisant la différentielle logarithmique.

Soit par exemple:

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

On calcul d'abord :

$$\ln(f) = \ln(x-y) - \ln(x+y)$$

$$\textit{puis}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \frac{\mathrm{d}(x-y)}{x-y} - \frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y}$$

La faute à ne pas commettre à ce stade est de majorer tout de suite l'erreur relative.

En effet, comme *x* figure à la fois au numérateur et au dénominateur, il en résulte un couplage entre les deux termes. Ce n'est qu'après avoir regroupé les termes en dx et dy, qu'on a le droit de passer aux valeurs absolues:

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{x-y} - \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{x+y} = \frac{2y}{x^2-y^2}\mathrm{d}x - \frac{2x}{x^2-y^2}\mathrm{d}x$$

$$\textit{soit}$$

$$\left|\frac{\Delta f}{f}\right| = \left|\frac{2}{x^2-y^2}\right|\left(|y|\Delta x + |x|\Delta y\right)$$

Incertitude absolue

Un résultat dont le domaine des valeurs probables se situe entre x_{max} et x_{min} peut s'écrire $\bar{x} \pm \Delta x$, où $\bar{x}$ est la meilleur estimation et Δx est l'incertitude absolue.

Incertitude relative

L'incertitude relative est le rapport de l'incertitude absolue sur la meilleure estimation qu'on a faite de la quantité. Elle nous permet de connaître le niveau de précision d'une mesure. Pour des valeurs inférieurs à 100 %, on écrira l'incertitude relative avec au plus deux chiffres significatifs.

Chiffres significatifs

Les chiffres utiles, qui veulent vraiment dire quelque chose, sont dits *significatifs*. Ce sont eux qui servent à écrire un nombre; au-delà de ces chiffres, la précision que d'autres chiffres prétendraient apporter serait illusoire.

En écrivant un résultat à l'aide de l'incertitude absolue, on prendra comme convention d'écrire l'incertitude absolue avec un (ou deux) chiffre(s). On opte pour une convention simple mais imparfaite.

ex: $h = (12{,}9 \pm 0{,}8)cm$.

On rappelle que tous les zéros à gauche d'un nombre ne sont pas significatifs, ils indiquent l'ordre de grandeur. Par contre les zéros à droite d'un nombre sont significatifs.

Exemples simples : surface et volume

- Le calcul de la surface d'un rectangle de côtés L et l:

$$S = L \cdot l$$

devient lorsque les côtés deviennent L+dL et l+dl:

$$S(L+dL, l+dl) = (L+dL) \cdot (l+dl) = L \cdot l + L \cdot dl + l \cdot dL + dl \cdot dL$$

et donc la variation de la surface dS peut s'écrire :

$$dS = (L+dL) \cdot (l+dl) - L \cdot l = L \cdot dl + l \cdot dL + dL \cdot dl$$

que l'on approxime par :

$$dS = L \cdot dl + l \cdot dL$$

car dL.dl est négligeable.

Noter que

$$dS = \frac{\partial(L \cdot l)}{\partial L} dL + \frac{\partial(L \cdot l)}{\partial l} dl$$

car:

$$\frac{\partial(L \cdot l)}{\partial L} = l ; \frac{\partial(L \cdot l)}{\partial l} = L$$

et donc:

$$dS = \frac{\partial S(L,l)}{\partial L} dL + \frac{\partial S(L,l)}{\partial l} dl$$

- de même la variation de volume d'une boite de côtés x, y, z de volume V=xyz :

$$V(x+dx, y+dy, z+dz) = (x+dx) \cdot (y+dy) \cdot (z+dz)$$
$$= x \cdot y \cdot z + dx \cdot y \cdot z + x \cdot dy \cdot z + x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot dz + y \cdot dx \cdot dz + z \cdot dx \cdot dy + dx \cdot dy \cdot dz$$

peut s'écrire :

$$dV = V(x+dx, y+dy, z+dz) - x \cdot y \cdot z = y \cdot z \cdot dx + z \cdot x \cdot dy + x \cdot y \cdot dz + dx \cdot dy \cdot dz$$

que l'on approxime par :

$$dV = y \cdot z \cdot dx + z \cdot x \cdot dy + x \cdot y \cdot dz$$

Noter que

$$dV = yzdx + zxdy + xydz = \frac{\partial(xyz)}{\partial x} dx + \frac{\partial(xyz)}{\partial y} dy + \frac{\partial(xyz)}{\partial z} dz$$

car:

$$\frac{\partial(xyz)}{\partial x} = yz ; \frac{\partial(xyz)}{\partial y} = xz ; \frac{\partial(xyz)}{\partial z} = xy$$

et donc:

$$dV = \frac{\partial(xyz)}{\partial x} dx + \frac{\partial(xyz)}{\partial y} dy + \frac{\partial(xyz)}{\partial z} dz = \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial V(x,y,}{\partial z}$$

La variation d'une fonction f(x,y,z)

Et plus généralement, pour le calcul de la variation d'une fonction f(x,y,z).

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ = dérivée partielle par rapport à x

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz$$

la loi des gaz parfaits

Prenons par exemple la loi des gaz parfaits reliant :

- *P* : la pression du gaz
- *V* : le volume occupé par le gaz
- *n* : la quantité de gaz en moles (1 mole = 6,022 10^{23} molécules)
- *R* : la constante des gaz parfaits = 8,314 $J.K^{-1}.mol^{-1}$
- *T* : la température absolue du gaz, en kelvin.

$P = \frac{n \times R \times T}{V}$ exprime la pression en fonction de n, R, T et V.

Écrivons sa différentielle :

$$dP(T,R,n,V) = P(T+dT,R+dR,n+dn,V+dV)-P(T,R,n,V) = \frac{n \times R}{V}dT + \frac{n \times}{V}$$

.

la variation la plus grande s'obtiendra lorsque les 4 termes ci dessus s'ajouteront:

$\delta P = \frac{n \times R}{V}\delta T + \frac{n \times T}{V}\delta R + \frac{R \times T}{V}\delta n + \frac{n \times R \times T}{V^2}\delta V$ donne l'erreur absolue sur P déduite du calcul de P à partir de la connaissance des erreurs sur T, R, n et V.

Noter que l'on a dans ce cas particulier : $\frac{dP(T,R,n,V)}{P} = \frac{P(T+dT,R+dR,n+dn,V+dV)-P(T,R,n,V)}{P}$.

$$\frac{dP(T,R,n,V)}{P} = \frac{\frac{n\times R}{V}dT + \frac{n\times T}{V}dR + \frac{R\times T}{V}dn - \frac{n\times R\times T}{V^2}dV}{P} = \frac{dT}{T} + \frac{dR}{R} + \frac{dn}{n} - \frac{dV}{V}$$

.

et donc dans l'absolu: $\frac{\delta P}{P} = \frac{\delta T}{T} + \frac{\delta R}{R} + \frac{\delta n}{n} + \frac{\delta V}{V}$.

Les incertitudes relatives s'ajoutent lorsque l'on a un produit de variables et ce résultat est remarquable car il est facile à retenir: les incertitudes relatives s'ajoutent lorsque la formule ne comporte que des produit (au sens large: une division est un produit par l'inverse).

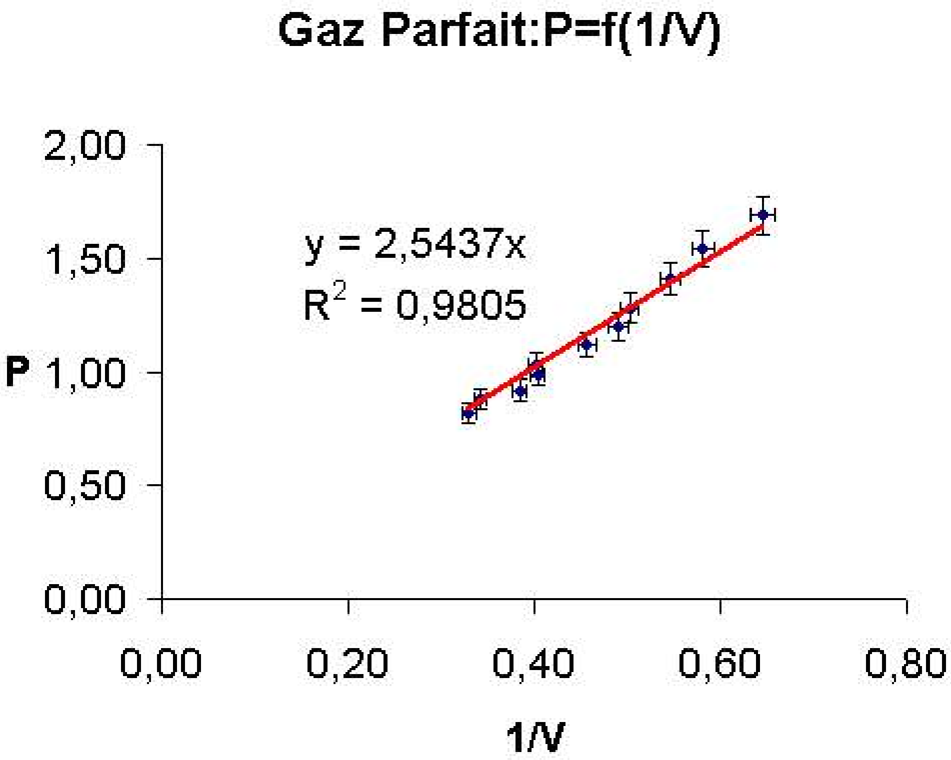
Utilisation de calculatrices

Ce qui vient d'être fait peut être fait par calcul direct avec une calculatrice ou un tableur(sur ordinateur):

Utilisation de graphes et de barres d'erreurs

Reprenons l'exemple de l'étude des gaz parfaits. Si l'on trace P en fonction de 1/V, on obtiendra théoriquement une droite passant par l'origine, avec comme pente RnT : y=(RnT).x.

n et T étant maintenus constants (l'enceinte ou cellule de mesure contenant le gaz étant sans fuite et thermostatée avec T connu à 0,2%), P étant mesuré, en utilisant un manomètre, avec 5% d'erreur relative, et V étant mesuré avec 2% d'erreur relative, pour chaque point de mesure expérimentale (P,1/V), on trace des barres d'erreurs représentant l'erreur absolue.



Un programme de « fit » ou d'ajustage de courbe, basé sur l'idée de minorer la distance de la droite (ou courbe) à tous les points expérimentaux, permet de tracer la droite théorique et de calculer sa pente nRT avec un coefficient de confiance r^2 proche de l'unité, si le fit est bon.

Dans le cas de figure ci dessus, on obtient ainsi nRT= 2.54 (1 + 0.07) Joules.

Ceci permet de dire que à n et T constants, l'expérience confirme que PV est constant à 7% près pour le gaz étudié et que pour améliorer ce résultat, il faut mesurer V à mieux que 5%.

Objectif :

- Calculer ou tracer une somme de vecteurs ;
- Caractériser complètement un vecteur ;
- Calculer un moment de vecteur (produit vectoriel) ;
- Aborder la modélisation mathématiquement d'une force, d'un moment ou d'une vitesse.

Calcul vectoriel

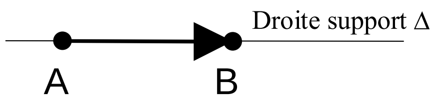
Bases de calcul

Rappels sur les vecteurs

1 Vecteurs et représentation graphique

1.1 Notation et représentation graphique

Définition



Un vecteur est défini par :	exemple :
- sa direction	droite Δ
- son origine	point A
- son sens	de A vers B
- sa norme (ou intensité)	$\|\overrightarrow{AB}\|$ =d(A,B)

Coordonnées

Soit £V un vecteur de coordonnées X, Y et Z. Il existe quatre notations :

£V (X, Y, Z) $\quad \vec{V}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \vec{V}\left| \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \right. \quad$ £V = X.x + Y.y + Z.z

Norme : || £V || = $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

Calcul à partir des coordonnées de deux points

Soient A et B deux points tels que : $A\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{pmatrix}$

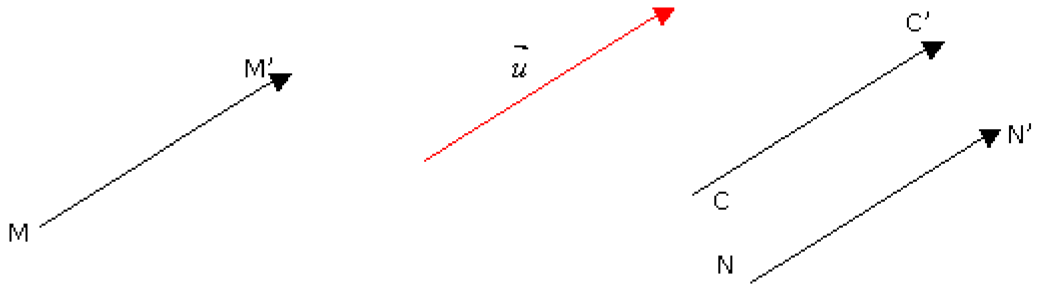
Propriétés

- Relation de Chasles : _AB + _BC = _AC
- _AB = -_BA

Soit un vecteur donné, caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur (non nulle). On choisit ce vecteur constant comme vecteur de translation t.

Tous les couples de points (M, M'), où M est un point quelconque du plan et M' son image par la translation sont appelés représentants du vecteur choisi.

On a donc $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$



Les couples (M, M'), (N, N') et (C, C') sont des représentants du vecteur. Celui- ci a une infinité de représentants.

Soit J un point fixé ; alors $\vec{u}$ n'admet qu'un seul représentant d'origine J.

1.2 Norme d'un vecteur

Définition **: Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'ensemble V des vecteurs du plan et (A, B) l'un de ses représentants. On appelle norme du vecteur $\vec{u}$ la longueur AB que l'on note $\|\vec{u}\|$.**

Dans l'exemple précédent, on a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$
Ces trois vecteurs on la même longueur. C'est cette longueur, indépendante du choix du représentant, que l'on désigne par norme de $\vec{u}$.

On a donc : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{MM'}\| = \|\overrightarrow{NN'}\|$

Ou $\|\vec{u}\|$ = MM' = NN'

Remarque : le vecteur nul n'a ni direction ni sens. Sa longueur est nulle.

Extension de la relation de Chasles. Pour tous points A, B et C du plan distincts ou non, on a égalité vectorielle : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Remarque : le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est égal au vecteur nul noté $\vec{0}$.

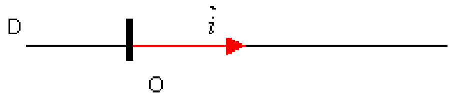
1.3 Vecteur unitaire

Définition **: On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme égale à l'unité de longueur fixée dans le plan.**

2 Repère d'une droite

2.1 Repère d'une droite

<u>Définition</u> : Un repère d'une droite D est un couple (O, $\vec{i}$) où O est un point de D, appelé origine du repère, et $\vec{i}$ u vecteur non nul dont la direction est celle de D



<u>Remarques</u> : Une droite possède une infinité de repères. Si A et B sont deux points distincts d'une droite D, alors le couple (A, $\overrightarrow{AB}$) est un repère de la droite D, A en est l'origine.

Une droite, munie d'un repère, est appelée une droite graduée

2.2 Abscisse d'un point

Définition : Soit une droite D de repère (O, $\vec{i}$). Soit I le point défini par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et M un point de D. On appelle abscisse du point M dans le repère (O, $\vec{i}$) le réel x
-positif ou nul, égal à OM / OI si M appartient à la demi-droite [OI),
-strictement négatif, égal à − OM / OI si M n'appartient pas à [OI).

Remarque **: on note x_m l' abscisse du point M dans un repère donné. Notons également que l'abscisse du point O est nulle**

2.3 Mesure algébrique

Définition : Soit A et B deux points d'une droite D, munie d'un repère, x_a l'abscisse de A et x_b l'abscisse de B dans ce repère. La mesure algébrique du vecteur $\overline{AB}$ est égale à $x_b - x_a$.
On note $\overline{AC}$ $x_a - x_b$

<u>Remarque</u> : $\overline{AB} =$ AB si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a le même sens que $\vec{i}$

$\overline{AB} =$ -AB si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a le sens contraire de $\vec{i}$

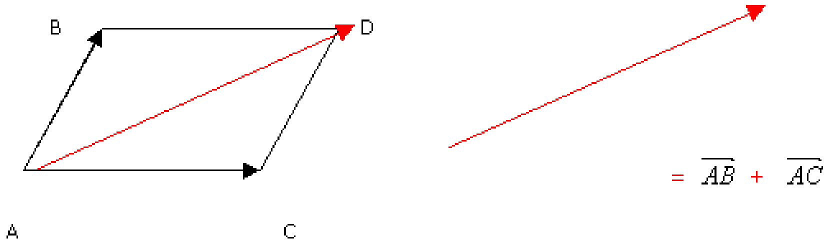
3 Somme de deux vecteurs

Somme et différence de deux vecteurs

Soient $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs.

On appelle somme des deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ notée $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que ABCD soit un parallélogramme. Dans le cas où $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AC}$ est nul, alors on pose :

$\vec{0} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB}$



Définition : L'opération qui, à tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ associe le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est appelée addition vectorielle.

3.2 Différence de deux vecteurs

Opposé d'un vecteur :

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur représenté par le couple de points (A,B). L'opposé du vecteur par le couple (B, A)

$\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, est le vecteur représenté

Différence de deux vecteurs

Définition : Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On appelle différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pris dans cet ordre, la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $(-\vec{v})$. On la note $\vec{u} - \vec{v}$:

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

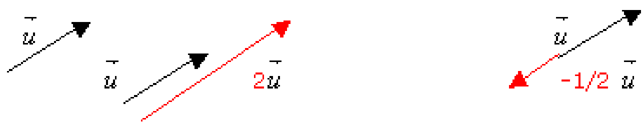
Propriétés essentielles :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

et : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

4 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition : L'opération qui, à tout couple $(x, \vec{u})$ où x est un nombre réel et $\vec{u}$ un vecteur, associe le vecteur $x\vec{u}$, est appelée multiplication d'un vecteur.



Remarque : $0.\vec{u} = \vec{0}$

1.1 Vecteurs colinéaires

Définition : Deux vecteurs sont colinéaires lorsque l'un est le produit de l'autre par un nombre réel.

Théorème : Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}$ $\vec{w}$ sont colinéaires.

4.2 Vecteur directeur d'une droite

Définition Soient A et B deux points distincts d'une droite. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Théorème : Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Théorème : Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les points A, B et C sont alignée (attentio les deux vecteurs doivent avoir une extrémité en commun pour que ce théorème soit vrai)

4.3 Milieu d'un segment

Définition : I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

4.4 Centre de gravité d'un triangle

Théorème : Soient A, B et C trois points non alignés et G un point du plan.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

¤ G est le centre de gravité du triangle ABC

¤ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

¤ $\overrightarrow{AG} = (2/3)\overrightarrow{AA'}$, A' étant le milieu du segment [BC]

¤ M étant un point quelconque du plan, $\overrightarrow{MG} = (1/3)(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$

Produit scalaire

- Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, noté $\vec{U}\cdot\vec{V}$, est un scalaire égal au produit des normes des deux vecteurs par le cosinus de leur angle $\theta = (\vec{U}, \vec{V})$.

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \|\vec{U}\|\,\|\vec{V}\|\cos\theta$$

Le produit scalaire est donc positif pour θ aigu, négatif pour θ obtu.

- **Forme géométrique**

Cas de deux vecteurs portés par deux axes.

Par définition du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \left|\overrightarrow{AB}\right| \times \overline{C'D'}$$

car $\overline{C'D'} = \mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD} = \left|\overrightarrow{CD}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$

> **Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit du module de l'un par la mesure algébrique de la projection de l'autre sur lui.**

- **Forme analytique**

En posant U_x , U_y , U_z et V_x , V_y , V_z les composantes respectives de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est le scalaire défini par la relation :

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \left(U_x\vec{i} + U_y\vec{j} + U_z\vec{k}\right)\cdot\left(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{U}.\vec{V} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z$$

sachant que :

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$

Disposition pratique

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z$$

On peut mettre aussi sous l'écriture suivante : £V_1.£V_2 = || £V_1 ||.|| £V_2 ||.cos(£V_1,£V_2)

<u>Remarque</u> : le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est toujours nul.

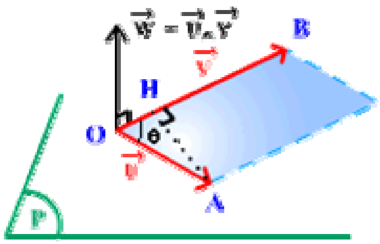
Soient : $£V_1 \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$ et $£V_2 \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$ alors $£V_1.£V_2 = X_1.X_2 + Y_1.Y_2 + Z_1.Z_2$

Produit vectoriel

Forme géométrique

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, est un **vecteur** $\vec{W}$, noté $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ de :

- direction : $\vec{W} \perp \vec{U}$ et $\vec{W} \perp \vec{V}$
- sens : trièdre $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ direct
- norme : $\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \sin(\vec{U}, \vec{V})$



$\|\vec{W}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les représentants $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$. En effet, $AH = OA \sin\theta = \|\vec{U}\| \sin(\vec{U}, \vec{V})$ et l'aire du parallélogramme devient : $OB \times AH = \|\vec{V}\| \|\vec{U}\| \sin(\vec{U}, \vec{V})$.

Forme analytique

En posant U_x , U_y , U_z et V_x , V_y , V_z les composantes respectives de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit vectoriel de ces deux vecteurs est le **vecteur** défini par la relation :

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = (U_y V_z - U_z V_y)\vec{i} + (U_z V_x - U_x V_z)\vec{j} + (U_x V_y - U_y V_x)\vec{k}$$

sachant que :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \,,\; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \,;\; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

Disposition pratique :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_y V_z - U_z V_y \\ U_z V_x - U_x V_z \\ U_x V_y - U_y V_x \end{bmatrix}$$

£W = $\left| \begin{array}{l} Y_1.Z_2 - Z_1.Y_2 \\ Z_1.X_2 - X_1.Z_2 \\ X_1.Y_2 - Y_1.X_2 \end{array} \right.$

Remarque : On effectue le « produit en croix ».

$$V_1 \wedge V_2 = \left| \begin{array}{c} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{array} \to \left| \begin{array}{l} Y_1.Z_2 - Z_1.Y_2 \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

$(X_1) \qquad (X_2)$

Exemples :

£V_1 $\left| \begin{array}{c} 6 \\ -2 \\ 3 \end{array} \right.$ £V_2 $\left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -2 \end{array} \right.$ £W $\left| \begin{array}{l} (-2)x(-2) - 3x1 = 1 \\ (3x2) - (6x(-2)) = 18 \\ (6x1) - ((-2)x2) = 10 \end{array} \right.$

£V_1 $\left| \begin{array}{c} 2 \\ -3 \\ 4 \end{array} \right.$ £V_2 $\left| \begin{array}{c} -5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \right.$ £W $\left| \begin{array}{l} -45 \\ -34 \\ -3 \end{array} \right.$

Attention ! £V_1 x £V_2 = - £V_2 x £V

Chapitre 2:
CINEMATIQUE DU POINT

I - DÉFINITIONS :

La mécanique est une branche de la physique qui s'intéresse aux mouvements et aux changements des positions des objets physiques.

A - La cinématique : Elle permet d'étudier les mouvements d'un mobile, par rapport à un repère de référence, en fonction du temps indépendamment des causes qui les produisent. Elle a pour but de préciser les trajectoires et les lois horaires.

B - La dynamique : Elle permet d'étudier les causes physiques qui provoquent le mouvement.

C - La statique : Elle permet d'étudier les conditions pour lesquelles il n'existe pas de mouvement.

En mécanique classique, et au cours de nos études, on considère que tout système physique est réduit à un point matériel coïncidant avec son centre de gravité et contenant sa masse ***m***. Nous admettons que sa vitesse ***v*** est négligeable devant la célérité de la lumière ***C***.

II - TRAJECTOIRE et POSITION DU POINT MATÉRIEL :

A- TRAJECTOIRE :

La trajectoire d'un mobile (point matériel) est le lieu géométrique des positions successives occupées par le mobile au cours du temps par rapport au repère choisi . Elle est définie par trois fonctions du temps : ***x(t) , y(t) et z(t)*** qui permettent de déterminer l'équation horaire du mouvement ***s = f(t)*** . s est appelé abscisse curviligne et égale à la longueur de l'arc M_0M , M_0 est la position initiale du mobile

B- POSITION DU POINT MATÉRIEL :

La position du point matériel peut être définie au cours du temps en fonction du vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$; pour cela il est nécessaire de considérer un référentiel (fixe et non déformable au cours du temps) formé d'un repère orthonormé (défini par son origine, sa base et ses axes) menu d'une horloge qui indique le temps.

On peut aussi repérer ce vecteur en utilisant les différents systèmes de coordonnées

III- REPÈRES OU RÉFÉRENTIELS : SYSTÈME DE COORDONNÉES

1- Coordonnées cartésiennes:

Dans un repère orthonormé d'axes ox, oy, oz et de base base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée. (O est l'origine du repère), la position du point M au cours du temps est définie par le vecteur position

$$\vec{OM} = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

x , y , z sont les coordonnées cartésiennes du point M .

Le module de $\vec{OM}$ est : $\|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Pour un élément de volume on a en coordonnées cartésiennes : $d\tau = dx\, dy\, dz$

IV- VECTEURS VITESSES ET ACCÉLÉRATIONS :

A- LA VITESSE : Le vecteur vitesse du point M est le vecteur lié d'origine M égal au vecteur dérivé par rapport au temps du vecteur position :

si $\vec{r} = \vec{OM}$ alors : $\vec{V} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt}$

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Le module du vecteur vitesse est la quantité :

$$v = \frac{ds}{dt} = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{1/2}$$

ds est la variation élémentaire de l'abscisse curviligne.

Remarque :

La vitesse instantanée est portée par la tangente à la trajectoire au point M alors que la vitesse moyenne est portée par la corde MM'.

B- L'ACCÉLÉRATION :

L'accélération à un instant donné d'un mobile M, considéré comme un point matériel, est le vecteur dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

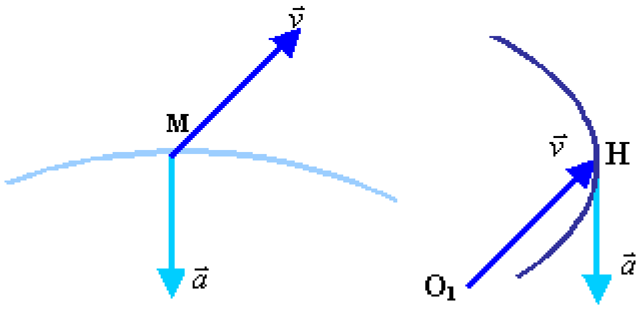
Le module **a** du vecteur accélération $\vec{a}$ est la quantité :

$$a = \left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

L'unité de l'accélération est le mètre par seconde par seconde (m / s^2) ou ms^{-2}

C - HODOGRAPHE :

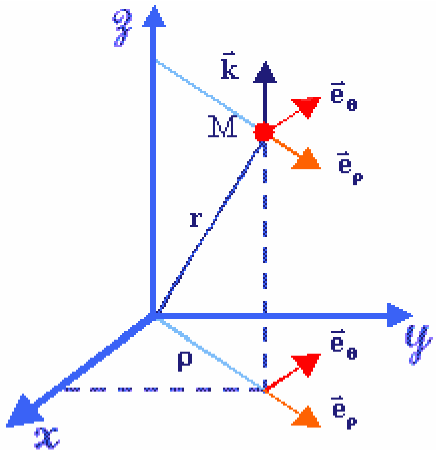
Si on étudie le vecteur vitesse en imposant une origine fixe ***O*** et en représentant le vecteur équivalent à au cours du temps, la courbe obtenue en considérant l'ensemble des positions de H constitue l'hodographe du mouvement



Remarque : le vecteur vitesse du point H est équivalent au vecteur accélération du mobile M et on écrit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{O_1H}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

COORDONNÉES CYLINDRIQUES



En coordonnées cylindriques, la position du point M est repérée par le rayon polaire ρ **(t)**, par l'angle polaire θ **(t)**, et la cote **z(t)**, qui peuvent varier en fonction du temps :

Les coordonnées cylindriques ρ , θ et **z** du point M sont liées aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes:

$$x = \rho\cos\theta \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = \rho\sin\theta \qquad \theta = \mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x} \qquad \theta \text{ est défini à } 2\pi \text{ prés}$$

$$z = z \qquad z = z \qquad \text{avec } r^2 = \left|\vec{OM}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Dans la base orthonormée des coordonnées cylindriques($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) le vecteur position s'écrit : $\vec{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\vec{k}$

Pour un élément de volume en coordonnées cylindriques on a: **dτ = ρ dρ dθ dz**

En utilisant les résultats obtenus en coordonnées polaires et en les complétant, on obtient pour :

· *le vecteur vitesse*

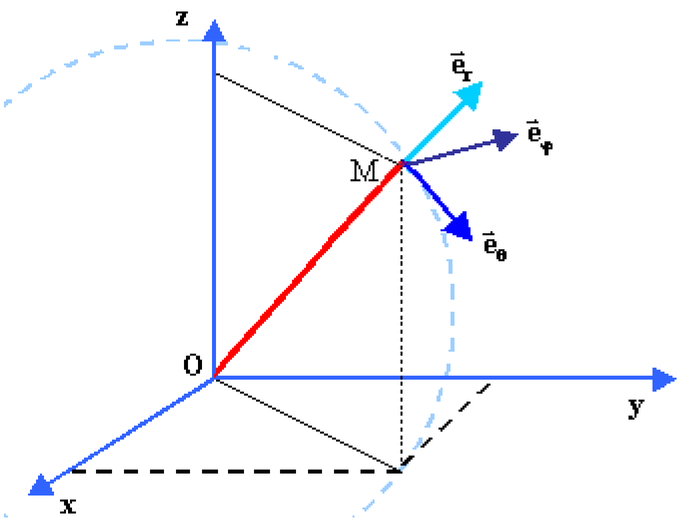
$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k}$$

· *Le vecteur accélération s'écrit :*

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{k}$$

COORDONNÉES SPHÉRIQUES

3- COORDONNÉES SPHÉRIQUES :



En coordonnées sphériques la position du point M est repérée par

les variables (r, θ, φ) ; r, θ (longitude) et φ (colatitude)

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad , \quad z = r\cos\theta$$

Pour un déplacement élémentaire , on a : $(dr, r\,d\theta, r\sin\theta\,d\varphi)$.

L'élément de volume est égal à : $d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

Dans la base orthonormée des coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ on a :

· *le vecteur position* $\vec{OM} = r\vec{e}_r$

· ***le vecteur vitesse***

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

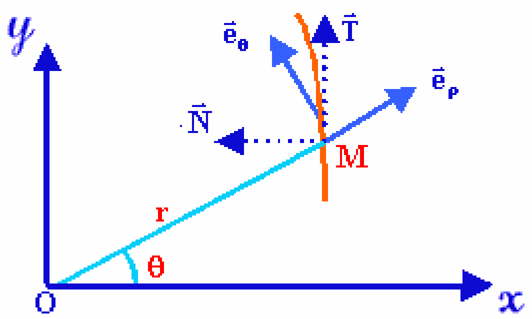
$$\text{On obtient : } \vec{V} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

· ***le vecteur accélération s'écrit :***

COORDONNÉES POLAIRES

IV- COORDONNÉES POLAIRES OU SEMI-POLAIRES

On introduit l'opérateur vectoriel différentiel appelé nabla ou del défini par



En coordonnées polaires, la position de M est repérée par le rayon vecteur OM de module ρ **(t)** et par l'angle polaire θ **(t)** qui peuvent varier en fonction du temps :

$$\mathbf{x = \rho \cos \theta}$$

$$\mathbf{y = \rho \sin \theta}$$

Pour un déplacement élémentaire, on doit avoir deux accroissements $d\rho$ et $d\theta$

L'élément de surface est égal à $\rho d\rho\, d\theta$.

On définit les vecteurs unitaires ($\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$) et dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) :

$$\vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} = -\vec{e}_\rho$$

Dans la base des coordonnées polaires ($\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$), le vecteur position s'écrit

$$\vec{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho$$

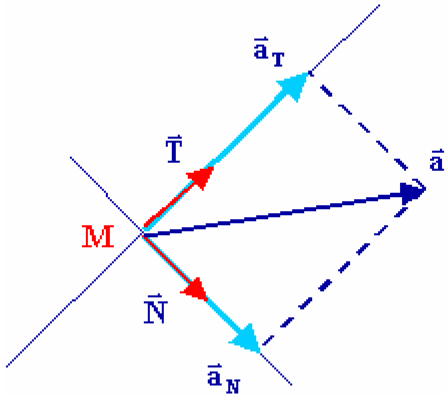
$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\,\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \qquad \vec{V} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho - \dot{\rho}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\,\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\,\vec{e}_\theta\right)$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{e}_\rho - \left(\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_\theta$$

Remarque : Les accélérations radiale et orthoradiale sont différentes de celles normale et orthonormale.

COORDONNÉES INTRINSÈQUES TRIÈDRE DE SERRET-FRENET



A chaque point M d'une courbe C, il est possible d'associer le trièdre d'origine M qui est un référentiel tangent à la courbe dont les axes sont définis par les vecteurs unitaires $\vec{T}$, $\vec{N}$ et $\vec{B}$ avec:

- $\vec{T} = \dfrac{d\vec{OM}}{ds} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, ds est la variation élémentaire de l'abscisse curviligne
  $\vec{T}$ est le vecteur unitaire de la tangente.
- $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{\vec{N}}{R_c}$, R_c est le rayon de courbure de la trajectoire
  $\vec{N}$ est le vecteur unitaire de la normale principale.
- $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ $\vec{B}$ est la binormale (perpendiculaire à $\vec{T}$ et à $\vec{N}$)

Le trièdre construit sur la base directe $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ est appelé trièdre de **Serret-Frenet.**

Le plan contenant les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$ est appelé plan osculateur.

Remarque importante:

L'origine du trièdre est le point M et non pas le point O.

- Le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = v\vec{T} = \dfrac{ds}{dt}\vec{T}$

• Le vecteur accélération est défini par: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R_c}\vec{N}$

Dans la base $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ du trièdre de Serret-Frenet, les composantes du vecteur vitesse sont : $\left(\frac{ds}{dt}, 0, 0\right)$

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est la somme d'un vecteur accélération tangentielle $\vec{a}_T$ porté par la tangente et d'un vecteur accélération normale $\vec{a}_N$ porté par la normale principale:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R_c}\vec{N}$$

Conclusion :

Le vecteur accélération décrit les variations du vecteur vitesse en grandeur et en direction.

- Puisque V^2 / Rc est $\geqslant 0$, alors a_N est toujours orienté vers la concavité.
- Si le mouvement est uniforme $|V| = cte$, alors $a_T = 0$ et $a = a_N$
- Si le mouvement est rectiligne alors $a_N = 0$ et $Rc = \infty$
- Si le mouvement est uniforme rectiligne alors $a_N = 0$ et $a_T = 0$ d'où $a = 0$
- Si le mouvement est circulaire uniforme alors $a = a_N = cte$

Remarque :

Si on connaît l'accélération du mouvement, on peut intégrer pour déterminer son équation ; et en connaissant son équation, on dérive pour déterminer son accélération.

Exercices d'assimilation:

1. Un automobiliste jette un coup d'œil sur un accident venant de se produire au bord de la route. Pendant ce temps sa voiture file à 88 km/h. Quelle distance parcourt-elle pendant une seconde ?

Réponse : 24 m.

2. Un jumbo jet doit atteindre une vitesse de 360 km/h avant de prendre son envol. En supposant une accélération constante et une piste d'envol de 1,8 km, calculez l'accélération minimum requise.

3. Une flèche, propulsée par un arc, est accélérée sur une distance de 60 cm. Si l'arc imprime à la flèche une vitesse de 60 m/s, calculez l'accélération subie par la flèche.
Justifiez toutes les hypothèses que vous devez faire.

4. Des gouttes d'eau tombent d'une pomme de douche sur le plancher situé 2 m plus bas. Les gouttes tombent à intervalles réguliers. La première goutte frappe le sol au moment où la quatrième goutte commence à tomber. Trouvez la position de chacune des gouttes à cet instant.

5. Un jongleur réussit à garder 5 balles en mouvement en les laçant successivement à une hauteur de 3,0 m (a) Déterminez l'intervalle de temps qui sépare chaque lancer. (b) Déterminez les positions des autres balles au moment où des balles lui tombe dans la main. (Négligez le temps pris pour transférer les balles d'une main à l'autre)

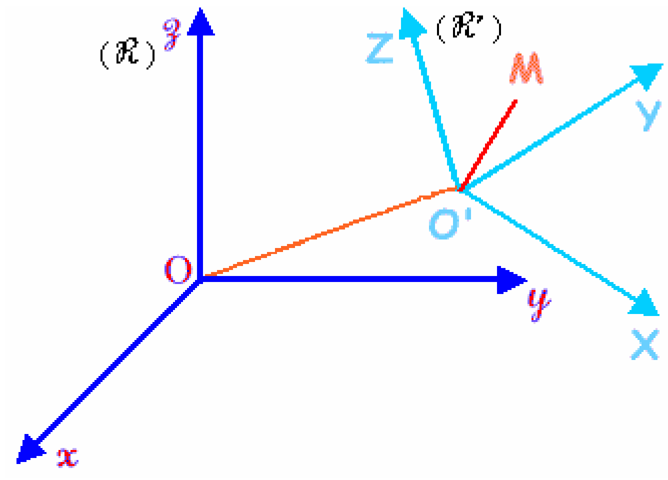
6. Calculez les vitesses de deux objets s'ils se rapprochent de 4,0 m à chaque seconde lorsqu'ils se dirigent l'un vers l'autre et s'ils se rapprochent de 4 m à chaque 10 secondes lorsqu'ils voyagent dans le même sens.

Réponses : 2,2 m/s ; 1,8 m/s.

CHANGEMENT DE REPÈRE

1-Mouvements relatifs et absolus :

Les équations horaires de la trajectoire, de la vitesse et de l'accélération d'un mobile dépendent du système de référence auquel est rapporté le mouvement. Soit un référentiel $(\mathcal{R})$ fixe au cours du temps, $(\mathcal{R}')$ un référentiel en mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$ et M un point qui se déplace par rapport à $(\mathcal{R}')$ selon le schéma suivant :



· Le mouvement de M par rapport à $(\mathcal{R}')$ est appelé mouvement **relatif**.

La trajectoire **(C$_r$)**, la vitesse $\vec{V}_r$ et l'accélération $\vec{a}_r$ sont toutes relatives.

· Le mouvement de M par rapport à $(\mathcal{R})$ (repère fixe) est appelé mouvement **absolu.**

La trajectoire **(C$_a$)**, la vitesse $\vec{V}_a$ et l'accélération $\vec{a}_a$ sont absolues.

· Le mouvement de $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$ est appelé mouvement **d'entraînement.**

La trajectoire **(C$_e$)**, la vitesse $\vec{V}_e$ et l'accélération $\vec{a}_e$ sont dites d'entraînement.

2-COMPOSITION DES VITESSES :

Supposons que (x, y, z) sont les coordonnées de M dans le repère fixe $(\mathcal{R})$ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et que (X, Y, Z) sont les coordonnées de M dans le repère mobile $(\mathcal{R}')\ (O', \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

A l'instant t on a :

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} \qquad \text{Or} \quad \vec{O'M} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

Si on dérive

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + X\frac{d\vec{I}}{dt} + Y\frac{d\vec{J}}{dt} + Z\frac{d\vec{K}}{dt} + \frac{dX}{dt}\vec{I} + \frac{dY}{dt}\vec{J} + \frac{dZ}{dt}\vec{K}$$

- $\vec{V}_r = \frac{dX}{dt}\vec{I} + \frac{dY}{dt}\vec{J} + \frac{dZ}{dt}\vec{K}$ est appelée vitesse relative et représente la vitesse du point M dans le repère mobile $(\mathcal{R}')$
- $\vec{V}_e = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} + X\frac{d\vec{I}}{dt} + Y\frac{d\vec{J}}{dt} + Z\frac{d\vec{K}}{dt}\right)$ est appelée vitesse d'entraînement et représente la vitesse du repère mobile $(\mathcal{R}')$ par rapport au repère fixe $(\mathcal{R})$ (méthode du point coïncidant dont les coordonnées X, Y, et Z sont constants dans le temps)

THÉORÈME DE COMPOSITION DES VITESSES :

Le vecteur vitesse absolue est égal à la somme des vecteurs vitesses relative et d'entraînement $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$.

3- COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS :

Si on dérive le vecteur vitesse absolue par rapport au temps, on obtient le vecteur accélération absolue $\vec{a}_a$ définit dans le repère $(\mathcal{R})$:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \left(\frac{d^2X}{dt^2}\vec{I} + \frac{d^2Y}{dt^2}\vec{J} + \frac{d^2Z}{dt^2}\vec{K}\right)$$
$$+\left(\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + X\frac{d^2\vec{I}}{dt^2} + Y\frac{d^2\vec{J}}{dt^2} + Z\frac{d^2\vec{K}}{dt^2}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{dX}{dt}\frac{d\vec{I}}{dt} + \frac{dY}{dt}\frac{d\vec{J}}{dt} + \frac{dZ}{dt}\frac{d\vec{K}}{dt}\right)$$

- $\vec{a}_r = \left(\frac{d^2X}{dt^2}\vec{I} + \frac{d^2Y}{dt^2}\vec{J} + \frac{d^2Z}{dt^2}\vec{K} \right)$ est l'accélération du point M par rapport au repère mobile $(\mathcal{R}')$ ou accélération relative
- $\vec{a}_e = \left(\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + X\frac{d^2\vec{I}}{dt^2} + Y\frac{d^2\vec{J}}{dt^2} + Z\frac{d^2\vec{K}}{dt^2} \right)$ est l'accélération d'entraînement qui représente l'accélération du repère mobile $(\mathcal{R}')$ par rapport au repère fixe $(\mathcal{R})$ (méthode du point coïncidant dont les coordonnées X, Y, et Z sont constants dans le temps)
- $\vec{a}_c = 2\left(\frac{dX}{dt}\frac{d\vec{I}}{dt} + \frac{dY}{dt}\frac{d\vec{J}}{dt} + \frac{dZ}{dt}\frac{d\vec{K}}{dt} \right)$ est l'accélération complémentaire ou l'accélération de Coriolis.

THÉORÈME DE COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS :

Le vecteur accélération absolue est égal à la somme des vecteurs accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

On démontre aussi que

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}_e \wedge \overrightarrow{O'M}$$

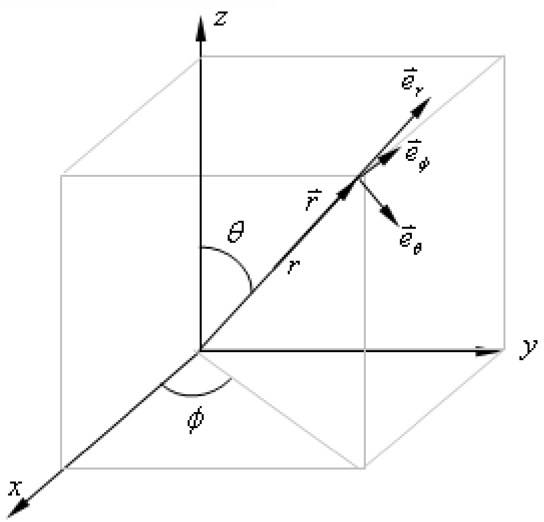
$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}}_e \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_e \wedge (\vec{\omega}_e \wedge \overrightarrow{O'M})$$

ANNEXE : Démonstration

SYSTÈME DE COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Le choix de commencer avec ce système de coordonnées n'est pas un hasard. Il a pour avantage d'être une généralisation des systèmes cylindrique et polaire dont nous en retrouverons par la suite plus facilement les expressions de la position, de la vitesse et de l'accélération .

Nous représentons traditionnellement un système à coordonnées sphérique de la façon suivante:



(130)

Remarque : Attention !!! sur le schéma ci-dessus, nous avons représenté le vecteur unitaire $\vec{e}_\phi$ dans une direction opposée à celle qu'il devrait avoir relativement aux calculs ci-dessous, ceci afin qu'il soit visible sur le schéma (sinon les flèches se superposent et le schéma devient illisible).

Nous voyons très bien si nous connaissons bien les relations trigonométriques élémentaires (voir le chapitre du même nom dans la section de géométrie) que nous avons les transformations:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, 0 \leq r < \infty$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \arccos\left(\frac{x}{r \sin\theta}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{r \sin\theta}\right), 0 \leq \phi < 2\pi \qquad (131)$$

et inversement:

$$x = r\sin\theta\cos\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad z = r\cos\theta \tag{132}$$

Maintenant il nous faut trouver les expressions qui relient les vecteurs de la base sphérique que nous choisissons de noter $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ avec les vecteurs de la base cartésienne $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$. Nous avons, comme nous pouvons le voir sur le schéma ci-dessus:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{r} = \frac{r\sin\theta\cos\phi\vec{e}_x + r\sin\theta\sin\phi\vec{e}_y + r\cos\theta\vec{e}_z}{r} \\
&= \sin\theta\cos\phi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z \\
\vec{e}_\phi &= \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}_r}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\cos\phi\\ 0\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\phi\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix}0\\ \sin\theta\cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = -\vec{e}_x\sin\phi + \vec{e}_y\cos\phi \\
\vec{e}_\theta &= \vec{e}_r \times \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\sin\phi\cdot 0 - \cos\theta\cos\phi\\ -\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi\ 0\\ \sin\theta\cos\phi\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\sin\phi\end{pmatrix} \\
&= -\vec{e}_x\cos\theta\cos\phi - \vec{e}_y\cos\theta\sin\phi - \vec{e}_z\sin\theta
\end{aligned} \tag{133}$$

Explications pour la seconde ligne : en divisant par $\sin\theta$, nous nous assurons de par les propriétés de la norme du produit vectoriel que $\|\vec{e}_\phi\| = \|\vec{e}_z\|\|\vec{e}_r\|\sin\theta = 1$ sera bien normalisé à l'unité.

👓Remarque : Il est important de remarquer que le produit vectoriel de deux vecteurs de base donne toujours le troisième vecteur de base perpendiculaire (comme pour les coordonnées cartésiennes donc!)

Pour des besoins ultérieurs, déterminons les différentielles partielles de chacune des ces coordonnées:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}=0\\
&\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}=\vec{e}_x\cos\theta\cos\phi+\vec{e}_y\cos\theta\sin\phi-\vec{e}_z\sin\theta=\vec{e}_\theta\\
&\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}=-\vec{e}_x\sin\theta\sin\phi+\vec{e}_y\sin\theta\cos\phi=(-\vec{e}_x\sin\phi+\vec{e}_y\cos\phi)\sin\theta=\vec{e}_\phi\sin\theta\\
&\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r}=0,\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \theta}=0,\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi}=-\vec{e}_x\cos\phi-\vec{e}_y\sin\phi=-(\vec{e}_r\sin\theta+\vec{e}_\theta\cos\theta)\\
&\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r}=0\\
&\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}=-\vec{e}_x\sin\theta\cos\phi-\vec{e}_y\sin\theta\sin\phi-\vec{e}_z\cos\theta=-\vec{e}_r\\
&\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi}=-\vec{e}_x\cos\theta\sin\phi+\vec{e}_y\cos\theta\cos\phi=\vec{e}_\phi\cos\theta
\end{aligned}
\tag{134}
$$

Nous allons également utiliser plus tard (pour l'étude des opérateurs vectoriels) la variation $d\vec{r}$ exprimée en coordonnées sphériques:

$$
\begin{aligned}
d\vec{r}&=d(r\vec{e}_r)=\vec{e}_r dr+rd\vec{e}_r=\vec{e}_r dr+r\left(\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}dr+\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}d\theta+\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}d\phi\right)\\
&=\vec{e}_r dr+\vec{e}_\theta r d\theta+\vec{e}_\phi r\sin\theta d\phi
\end{aligned}
\tag{135}
$$

Pour exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées sphériques, nous aurons également besoin des dérivées par rapport au temps:

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{e}}_r&=\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}\dot{r}+\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}\dot{\theta}+\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}\dot{\phi}=\vec{e}_\theta\dot{\theta}+\vec{e}_\phi\dot{\phi}\sin\theta\\
\dot{\vec{e}}_\theta&=\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r}\dot{r}+\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}\dot{\theta}+\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi}\dot{\phi}=-\vec{e}_r\dot{\theta}+\vec{e}_\phi\dot{\phi}\cos\theta\\
\dot{\vec{e}}_\phi&=\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r}\dot{r}+\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \theta}\dot{\theta}+\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi}\dot{\phi}=-(\vec{e}_r\sin\theta+\vec{e}_\theta\cos\theta)\dot{\phi}
\end{aligned}
\tag{136}
$$

Donc si nous faisons maintenant un peu de physique, nous avons:

$$
\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{e}}_r r+\dot{r}\vec{e}_r \tag{137}
$$

ce qui nous amène à (nous aurons besoin de cette relation en astrophysique) :

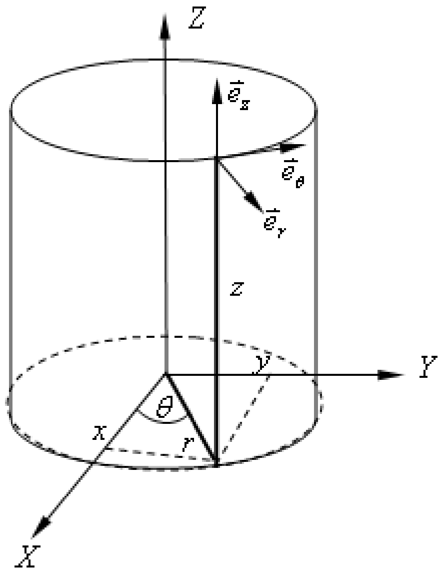
$$
\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+\vec{e}_\theta r\dot{\theta}+\vec{e}_\phi r\dot{\phi}\sin\theta \tag{138}
$$

Pour l'accélération nous obtenons (exactement dans la même démarche que pour déterminer l'expression de la vitesse):

$$\vec{a}=\vec{e}_r(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\phi}^2\sin\theta)+\vec{e}_\theta(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)$$
$$+\vec{e}_\phi(r\ddot{\phi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta+2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta) \qquad (139)$$

SYSTÈME DE COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Le système de coordonnées cylindriques (très utile dans l'étude des système à mouvements hélicoïdaux) est assez semblable à celui des coordonnées sphériques puisqu'il peut être vu comme une tranche de la sphère. Soit le schéma:



(140)

il vient sans peine qu'en coordonnées polaires (à un changement de notation près pour l'angle par rapport au schéma ci-dessus):

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad \phi=\arccos\left(\frac{x}{r}\right) \quad \phi=\arcsin\left(\frac{y}{r}\right) \text{ et } \phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (141)$$

et inversement:

$$x=r\cos\phi \quad y=r\sin\phi \quad z=z \qquad (142)$$

Maintenant il nous faut trouver les expressions qui relient les vecteurs de la base polaire que nous choisissons de noter $\vec{e}_r,\vec{e}_\phi,\vec{e}_z$ (au lieu de $\hat{r},\hat{\phi},\hat{z}$ comme cela ce fait traditionnellement) avec les vecteurs de la base cartésienne $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$. Nous avons, identiquement à ce que nous avons fait pour les coordonnées sphériques:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{r} = \vec{e}_x \cos\phi + \vec{e}_y \sin\phi$$
$$\vec{e}_\phi = \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}_r}{\sin\phi} = -\vec{e}_x \sin\phi + \vec{e}_y \cos\phi$$
$$\vec{e}_z = \vec{e}_z \tag{143}$$

Explications pour la seconde ligne : en divisant par $\sin\theta$, nous nous assurons de par les propriétés de la norme du produit vectoriel que $\|\vec{e}_\phi\| = \|\vec{e}_z\|\|\vec{e}_r\|\sin\theta = 1$ sera bien normalisé à l'unité. Dans le cas des coordonnées cylindriques l'angle étant de toute façon droit, nous ne serions pas obligé d'indiquer cette division, mais nous avons fait ce choix par souci d'homogénéité avec les développements précédents.

Remarque : Il est important de remarquer que le produit vectoriel de deux vecteurs de base donne toujours le troisième vecteur de base perpendiculaire (comme pour les coordonnées cartésiennes et sphériques donc!)

Pour des besoins ultérieurs, déterminons les différentielles partielles de chacune des ces coordonnées:

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0; \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} = -\vec{e}_x \sin\phi + \vec{e}_y \cos\phi = \vec{e}_\phi; \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r} = 0; \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = -\vec{e}_x \cos\phi - \vec{e}_y \sin\phi = -\vec{e}_r; \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = 0; \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \phi} = 0; \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = 0 \tag{144}$$

Nous allons également utiliser plus tard (pour l'étude des opérateurs vectoriels) la variation $d\vec{r}$ exprimée en coordonnées cylindriques:

$$d\vec{r} = d(r\vec{e}_r) = \vec{e}_r dr + r d\vec{e}_r = \vec{e}_r dr + r\left(\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}dr + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}d\phi + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z}dz\right) = \vec{e}_r dr + r\vec{e}_\phi d\phi \tag{145}$$

Pour exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées sphériques, nous aurons également besoin des dérivées par rapport au temps:

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}\dot{\phi} + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z}\dot{z} = \vec{e}_\phi \dot{\phi}$$
$$\dot{\vec{e}}_\phi = \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi}\dot{\phi} + \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial z}\dot{z} = -\vec{e}_\phi \dot{\phi}$$
$$\dot{\vec{e}}_z = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \phi}\dot{\phi} + \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z}\dot{z} = \vec{0} \tag{146}$$

Donc si nous faisons maintenant un peu de physique, nous avons (rappellons que la composante *z* est indépendante des autres composantes cylindriques):

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{k}} = \dot{\vec{e}}_r r + \dot{r}\vec{e}_r + \vec{e}_z \dot{z} + \dot{\vec{e}}_z z \quad (147)$$

ce qui nous amène à:

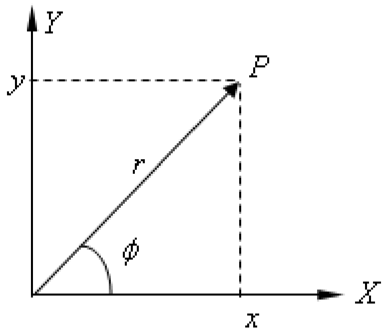
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + \vec{e}_\phi r\dot{\phi} + \vec{e}_z \dot{z} \quad (148)$$

Pour l'accélération nous obtenons (exactement dans la même démarche que pour déterminer l'expression de la vitesse):

$$\vec{a} = \vec{e}_r(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \vec{e}_\phi(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) + \vec{e}_z \ddot{z} \quad (149)$$

SYSTÈME DE COORDONNÉES POLAIRES

Le système de coordonnées polaires est très semblable à celui des coordonnées cylindriques puisqu'il peut être vu comme un retranchement d'une dimension (la hauteur) du système cylindrique.



(150)

Ainsi, il vient sans peine qu'en coordonnées polaires:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \phi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \qquad \phi = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) \text{ et } \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (151)$$

et inversement:

$$x = r\cos\phi, y = r\sin\phi \quad (152)$$

Maintenant il nous faut trouver les expressions qui relient les vecteurs de la base polaire que je choisis de noter $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi$ (au lieu de $\hat{r}, \hat{\phi}$ comme cela ce fait traditionnellement) avec les vecteurs de la base cartésienne $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$. Nous avons identiquement à ce que nous avions fait pour les coordonnées sphériques:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{r} = \vec{e}_x \cos\phi + \vec{e}_y \sin\phi$$
$$\vec{e}_\phi = \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}_r}{\sin\theta} = -\vec{e}_x \sin\phi + \vec{e}_y \cos\phi \quad (153)$$

Explications pour la seconde ligne : en divisant par $\sin\theta$, nous nous assurons de par les propriétés de la norme du produit vectoriel que $\|\vec{e}_\phi\| = \|\vec{e}_z\|\|\vec{e}_r\|\sin\theta = 1$ sera bien normalisé à l'unité. Dans le cas des coordonnées polaires l'angle étant de toute façon droit, nous ne serions pas obligé d'indiquer cette division, mais nous avons fait ce choix par souci d'homogénéité avec les développements précédents.

Pour des besoins ultérieurs, déterminons les différentielles partielles de chacune des ces coordonnées:

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0, \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} = -\vec{e}_x \sin\phi + \vec{e}_y \cos\phi = \vec{e}_\phi$$
$$\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r} = 0, \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = -\vec{e}_x \cos\phi - \vec{e}_y \sin\phi = -\vec{e}_r \quad (154)$$

Nous allons également utiliser plus tard (pour l'étude des opérateurs vectoriels) la variation $d\vec{r}$ exprimée en coordonnées cylindriques:

$$d\vec{r} = d(r\vec{e}_r) = \vec{e}_r dr + r d\vec{e}_r = \vec{e}_r dr + r\left(\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}dr + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}d\phi\right)$$
$$= \vec{e}_r dr + \vec{e}_\phi r d\phi \quad (155)$$

Pour exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées sphériques, nous aurons également besoin des dérivées par rapport au temps:

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}\dot{\phi} = \vec{e}_\phi \dot{\phi}$$
$$\dot{\vec{e}}_\phi = \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi}\dot{\phi} = -\vec{e}_r \dot{\phi} \quad (156)$$

Donc si nous faisons maintenant un peu de physique, nous avons:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{e}}_r r + \dot{r}\vec{e}_r \quad (157)$$

ce qui nous amène à:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + \vec{e}_\phi r \dot{\phi} \quad (158)$$

où le premier terme est la composante radiale de la vitesse et le second la composante tangentielle de la vitesse (angulaire).

Pour l'accélération nous obtenons (exactement dans la même démarche que pour déterminer l'expression de la vitesse):

$$\vec{a}=\vec{e}_r(\ddot{r}-\dot{\phi}^2 r)+\vec{e}_\phi(2\dot{r}\dot{\phi}+r\ddot{\phi}) \quad (159)$$

où le premier terme est l'accélération radiale, le second l'accélération centripète, le troisième l'accélération tangentielle et le quatrième l'accélération de Coriolis.

DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

La dynamique est l'étude des causes qui provoquent les mouvements des corps solides, on suppose que le mobile est un point matériel et que toute sa masse est concentrée en ce point.

1.- QUANTITE DE MOUVEMENT

Si on considère dans un repère galiléen, un point matériel de masse m animé du vecteur vitesse $\vec{v}$; Alors sa quantité de mouvement est le vecteur $\vec{p}$ définit par la relation: $\vec{p} = m\,\vec{v}$

2- PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE (P. F. D) :

Dans un repère galiléen, le P. F.D s'annonce sous la forme :

" en l'absence de force, le vecteur $\vec{p}$ est invariant, en présence d'une force $\vec{F}$, il évolue conformément à l'équation: $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

ou bien $\dfrac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$ qui s'écrit encore : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{dm}{dt}\vec{v} = \vec{F}$

Lorsque la masse du point matériel est invariante au cours du mouvement, cette équation se simplifie et prend en introduisant le vecteur accélération $\vec{a}$, la forme suivante:

$\vec{F} = m\vec{a}$ puisque $\dfrac{dm}{dt} = 0$

3- LOIS DE NEWTON

3.1- Première loi de newton (principe de l'inertie)

Un référentiel Galiléen est un référentiel dans lequel le principe de l'inertie est vérifié :

Dans un référentiel Galiléen, si le vecteur vitesse $\vec{V}_G$ du centre d'inertie d'un solide ne varie pas alors la somme $\vec{F} = \Sigma\vec{F}_{ext}$ des forces extérieures appliquées au solide est nulle.

De façon équivalente, on peut énoncer :

Si, dans un référentiel Galiléen, le centre d’inertie d'un solide est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme, alors la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à ce solide est nulle.

La réciproque est vraie :

Dans un référentiel Galiléen, si la somme $\vec{F} = \sum \vec{F}_{ext}$ des forces extérieures appliquées à un solide est nulle alors

le vecteur vitesse $\vec{V}_G$ du centre d'inertie de ce solide ne varie pas.

De façon équivalente, on peut énoncer :

Dans un référentiel Galiléen, si la somme des forces extérieures appliquées à un solide est nulle alors le centre d’inertie de ce solide est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

Remarques :

- Contrairement à ce que croyaient les anciens, un solide peut donc se déplacer bien que la somme des forces appliquées à ce solide soit nulle. Le véritable opposition n'est pas entre mouvement et repos mais entre mouvement rectiligne uniforme (le repos n'est qu'un cas particulier) et les autres types de mouvement. C'est un des mérites de Newton (1642-1727) d'avoir bien compris cela.

3.2- Deuxième loi de newton

Il est facile de constater, dans le référentiel terrestre supposé Galiléen, qu'une force peut ralentir ou accélérer le mouvement d'un solide.

La deuxième loi de Newton, énoncée cette année d'un point de vue semi-quantitatif, précise la relation qui existe entre les forces appliquées à un solide et la variation de la vitesse $\vec{V}_G$ de son centre d'inertie par rapport à un référentiel Galiléen.

Deuxième loi de Newton.

Dans un référentiel Galiléen, si le vecteur vitesse $\vec{V}_G$ du centre d'inertie d'un solide varie, alors la somme $\vec{F} = \sum \vec{F}_{ext}$ des forces extérieures appliquées à ce solide n'est pas nulle et réciproquement. La direction et le sens de cette somme $\vec{F}$ sont ceux de la variation $\Delta\vec{V}_G$ de $\vec{V}_G$ entre deux instants proches.

Remarque : L'énoncé définitif de la deuxième loi de Newton sera donné en classe de terminale. Il fera intervenir la somme des forces extérieures $\vec{F}$ agissant sur le solide, la masse de ce solide ainsi que le vecteur accélération $\vec{a}_G$ de son centre d'inertie (vecteur défini en classe terminale).

3.3- Troisième loi de newton (loi des actions réciproques)

- Interaction de deux corps

On dit que deux corps A et B sont en interaction si l'état de mouvement ou de repos de l'un (A) dépend de l'existence de l'autre (B). Une interaction entre deux corps A et B suppose toujours deux actions réciproques : celle de A sur B et celle de B sur A.

- Loi des actions réciproques (3° loi de Newton) :

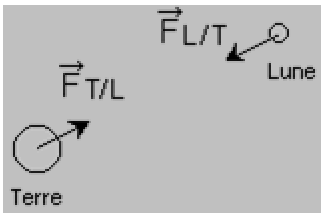
A une interaction entre un objet A et un objet B correspondent deux forces : l'une exercée par A sur B, notée $_{A/B}$, l'autre exercée par B sur A, notée $_{B/A}$. Les deux forces associées à une même interaction sont toujours égales et opposées :

A / B = - B / A

Exemples : Interaction à distance Terre / Lune.

La Terre attire la Lune avec une force . Réciproquement, la Lune attire la Terre avec une force égale et opposée à :

$\vec{F}_{T/L} = - \vec{F}_{T/L}$

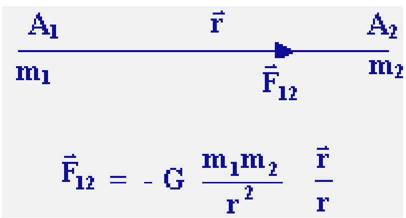


4- NATURE DES FORCES :

4.1- Forces à distance : ce sont des forces dont la portée peut être étendue jusqu'à l'infini, parmi lesquelles on peut citer :

- Force d'attraction universelle :

Si on considère deux particules électriquement neutres de masses m_1 et m_2 voisines l'une de l'autre, alors chacune exerce sur l'autre une force dite d'attraction universelle de Newton.



- Force électrostatique : ***(voir cours d'électricité)*** Considérons deux particules de charges électriques q_1 et q_2 , ces deux particules exercent l'une sur l'autre des forces d'interactions données par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \quad b$$

ε_0 est appelée **permittivité du vide** avec : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 \ N\,m^2/C^2$

r est la distance entre les charges.

-Force magnétique *:* On prend un repère (r) un point M (xyz), B est le champ magnétique et ***q*** la charge de la particule en mouvement

$$\vec{F}_m = q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

$\vec{F}_m$ est la force magnétique qui s'exerce sur **q.**

4.2- Forces de contact

Les forces de contact qui agissent entre solide, liquide etc. & ont un rayon d'action très faible (1Å=10^{-10}m)

Exemples :

Les contraintes mécaniques.· Les forces de frottements. Les forces de cohésion de la matière·Les liaisons chimiques.·Les interactions nucléaires.

4.3- Forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis:

Le principe fondamental de la dynamique $\vec{F} = m\vec{a}_G$ n'est valable que dans un repère Galiléen $(\mathcal{R})$. Si on prend un repère $(\mathcal{R}')$en mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$alors $\vec{F} = m\vec{a}_r$ n'est pas valable

$$\vec{F} = m\vec{a}_G = m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c)$$

$\vec{F}$: est la résultante des forces qui s'exercent sur la particule.

m : sa masse.

$\vec{a}_r$: l'accélération relative de M dans $(\mathcal{R}')$.

$\vec{a}_e$: l'accélération d'entraînement.

$\vec{a}_C$: l'accélération de Coriolis. $\vec{a}_C = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$

On obtient : $\Rightarrow m\vec{a}_r = \vec{F} - m(\vec{a}_e + \vec{a}_C)$

On définit :

$\vec{F}_e = -m\,\vec{a}_e$: force d'inertie d'entraînement.

$\vec{F}_C = -m\,\vec{a}_C$: force d'inertie complémentaire ou de Coriolis.

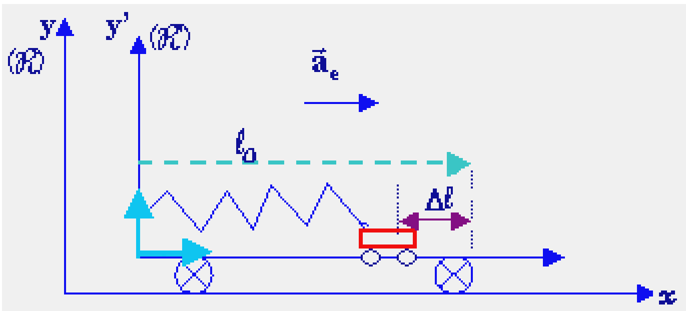
Ces deux forces dépendent du mouvement de (R') par rapport à (R).

On écrit : $\vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_C = m\vec{a}_r$

.

- L'accéléromètre : (force d'inertie d'entraînement).

Il permet de mesurer l'accélération linéaire des systèmes tels que trains, automobiles ou avions.



Supposons que le repère mobile est $(\mathcal{R}')$ lié à la tige qui se déplace avec une vitesse angulaire ω constante par rapport au repère fixe $(\mathcal{R})$ et que la masse m lié au ressort peut se mouvoir sans frottement.

- Si $(\mathcal{R}')$ est à l'arrêt par rapport au repère $(\mathcal{R})$:

Le poids de la masse m est compensé par la réaction de la tige, la longueur du ressort est ℓ_0.

- Si $(\mathcal{R}')$ est animé d'un mouvement de rotation par rapport à $(\mathcal{R})$ à la vitesse angulaire ω constante :

La masse $\mathbf{m}$ prend une nouvelle position dans ($\mathbf{R'}$) :

$$\vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m\vec{a}_r = \vec{0} \text{ (car } \vec{OM} = \ell\,\vec{I} \text{ avec } \ell = \text{constante)}$$

La projection de cette relation sur l'axe $\mathbf{Ox'}$ permet d'écrire :

$$-k\,\Delta\ell - m\,\vec{a}_e = 0 \quad \text{d'où} \quad \vec{a}_e = -\frac{k}{m}\,\Delta\ell$$

Si $\Delta\ell < 0$ càd le ressort se comprime donc $a_e > 0$ $\Rightarrow$ on est en phase d'accélération

Si $\Delta\ell > 0$ càd le ressort se rallonge donc $a_e < 0$ $\Rightarrow$ on est en phase de décélération.

Conclusion :

Ces forces d'inerties apparaissent comme des forces réelles dans les mouvements relatifs accélérés, et permettent de simplifier les problèmes de dynamique en les ramenant à des problèmes de statique.

Par contre, ces forces n'ont aucune existence réelle dans les mouvements absolus.

4.4- Forces intérieures et forces extérieures

- Pour un point matériel, toutes les forces appliquées à ce point sont dites extérieures.- Pour un système matériel, il faut distinguer :

Les forces extérieures provenant d'actions extérieures au système.

Les forces intérieures dues aux interactions mutuelles :

$$\sum \vec{F}_{int} = \vec{0} \quad , \quad \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

CHAPITRE III : Travail et énergie

En principe, les lois de Newton permettent de résoudre tous les problèmes de la mécanique classique. Si on connaît les positions et les vitesses initiales des particules d'un système ainsi que toutes les forces agissant sur elles, on peut prévoir l'évolution du système au cours du temps. Mais dans la pratique, on ne connaît pas toujours toutes les forces qui entrent en jeu et même si c'est le cas, les équations à résoudre sont trop nombreuses ou trop complexes. Dans bien des cas des informations intéressantes, concernant le système, peuvent être obtenues plus simplement en faisant appel à des notions telles que le travail et l'énergie.

III.1 : Le travail effectué par une force constante

Dans le langage courant, on parle de travail intellectuel, de travail physique, de travail scientifique, artistique, etc… Les physiciens et les ingénieurs s'intéressent, quant à eux, au travail mécanique, c'est-à-dire au travail effectué par une force. Cette notion est en partie liée à la notion commune d'effort musculaire qu'il faut fournir pour déplacer le point d'application d'une force. Tout d'abord, nous allons voir comment, dans le cas particulier d'une force constante $\overline{\mathrm{F}}$ qui déplace un objet sur une distance d. Dans ce cas, le travail mécanique W effectué par la force $\overline{\mathrm{F}}$ est défini comme :

$$\boxed{\mathbf{W \equiv F\ d\ cos\ \theta}\text{ , pour une force constante}} \qquad \text{(III.1)}$$

où θ est l'angle entre la force $\overline{\mathrm{F}}$ et le déplacement $\overline{\mathrm{d}}$ (voir figure III.1).

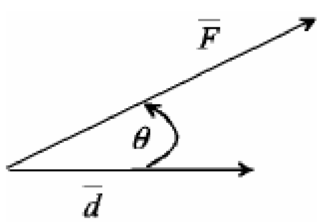


Figure III.1.

Il semble aller de soi que l'effort musculaire requis pour lever un objet dépende à la fois de son poids (la force pesanteur qui s'exerce sur lui), et de la hauteur h à laquelle on l'élève.

Dans ce cas la force est dirigée vers le bas, le déplacement vers le haut et θ vaut 180°. Dès lors : $W = - P.h = - mgh$. Le travail de la force est négatif puisqu'il faut fournir un travail musculaire contre la force pesanteur.

Si un objet est suspendu à un rail horizontal sur lequel il peut glisser sans frottements, une fois qu'on lui a donné une vitesse initiale, il continuera de se déplacer à cette même vitesse ($1^{ère}$ loi de Newton : (II.2)). Il ne faut fournir aucun effort musculaire pour que l'objet se déplace. Effectivement, avec la définition du travail ci-dessus, le travail est nul car force et déplacement sont perpendiculaires et l'angle θ vaut 90°.

Il apparaît donc que la composante d'une force perpendiculaire au déplacement ne contribue pas au travail, seule la composante qui a la même direction que le déplacement contribue. C'est pourquoi c'est la projection de $\overline{F}$ sur le déplacement, soit $F \cos \theta$, qui intervient dans la définition III.1 du travail.

La comparaison de la définition du travail mécanique avec l'effort musculaire a ses limites. Par exemple pour maintenir dans sa main un objet à une hauteur fixe, le déplacement est nul, donc le travail mécanique est nul. Par contre le travail musculaire n'est pas nul.

La définition (III.1) peut s'écrire de manière plus concise en utilisant la notion de produit scalaire de deux vecteurs :

$$\boxed{\mathbf{W \equiv \overline{F} \cdot \overline{d}}\text{, \textbf{pour une force constante}}} \qquad \text{(III.2)}$$

On remarquera que le travail est une quantité scalaire, contrairement à la force et au déplacement qui sont des vecteurs.

III.2 : Le travail effectué par une force variable

Dans le cas où la force varie en intensité et/ou en direction, lors du déplacement, et que celui-ci a une forme quelconque, il faut faire appel au calcul intégral pour généraliser la définition du travail donné en III.2.

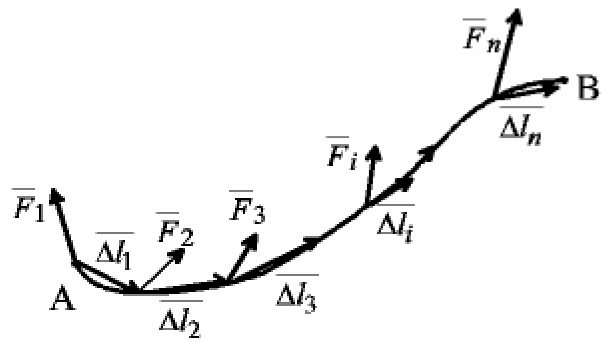


Figure III.2.

Soit la courbe AB suivant laquelle s'effectue le déplacement (voir figure III.2). Ce déplacement peut être subdivisé en n petits déplacements $\overline{\Delta l}_1$, $\overline{\Delta l}_2$, …, $\overline{\Delta l}_n$, suffisamment petits pour qu'en première approximation on puisse considérer que la force $\overline{F}_i$ reste constante lors du déplacement $\overline{\Delta l}_i$. Dès lors le travail W effectué par la force $\overline{F}$, entre A et B, est donné en première approximation par :

$$\mathbf{W \approx \overline{F}_1 \cdot \overline{\Delta l}_1 + \overline{F}_2 \cdot \overline{\Delta l}_2 + \ldots + \overline{F}_n \cdot \overline{\Delta l}_n}$$

$$\mathbf{= \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \cdot \overline{\Delta l}_i}$$

L'approximation sera d'autant meilleure que les $\overline{\Delta l}_i$ sont petits et donc nombreux. La valeur exacte du travail sera obtenue à la limite où les $\overline{\Delta l}_i$ tendent vers zéro et n vers l'infini :

$$\mathbf{W = \lim_{\substack{\overline{\Delta l}_i \to \overline{0} \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \cdot \overline{\Delta l}_i}$$

Ce qui par définition est l'intégrale curviligne de la force $\overline{F}$, le long de la trajectoire AB :

$$\boxed{\mathbf{W \equiv \int_A^B \overline{F} \cdot \overline{dl}}} \qquad \text{(III.3)}$$

où $\overline{dl}$ est un déplacement infinitésimal le long de la trajectoire, c'est-à-dire tangent à celle-ci (voir figure III.3).

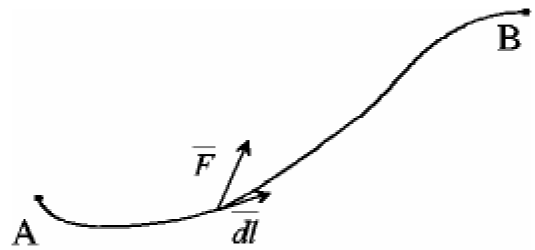


Figure III.3.

L'unité de travail du SI est le joule (J).

D'après la relation (III.1) :

$$1J = 1N.1m$$

Un travail d'un joule correspond au travail fourni par une force de 1 newton qui déplace son point d'application d'un mètre dans sa propre direction.

III.3 : L'énergie cinétique et son théorème

Le concept d'énergie est l'un des plus importants en sciences. Pourtant c'est un concept difficile à définir de manière générale. En effet, il existe différents types d'énergie : mécanique, électrique, chimique, thermique, etc … qui se définissent chacune séparément. Ces différentes formes d'énergie peuvent se transformer les unes dans les autres. Dans un système isolé du monde extérieur, dit fermé, la somme de ces différentes formes d'énergie, appelée énergie totale du système, reste constante du début à la fin de n'importe quelle transformation. On dit que l'énergie totale d'un système fermé, est conservée. Les différentes formes d'énergie sont donc définies de manière à satisfaire à ce principe de conservation.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'énergie cinétique d'un objet ponctuel qui est l'énergie que celui-ci acquiert de par sa vitesse. Dans ce cas-ci on peut définir l'énergie comme la capacité à exécuter un certain travail : une automobile lancée à faible vitesse contre une caisse posée sur le sol, va mettre cette caisse en mouvement et perdre sa propre vitesse. Pour mettre la caisse en mouvement il faut s'opposer aux forces de frottements qui existent entre la caisse et le sol. Il faut déplacer le point d'application de ces forces et donc effectuer un travail. Réciproquement, pour faire acquérir de la vitesse à un objet, et donc lui procurer de l'énergie cinétique, il faut effectuer un travail. Il y a donc un lien étroit entre les concepts de travail et d'énergie. Travail et énergie se mesurent avec les mêmes unités.

Voyons tout d'abord comment définir l'énergie cinétique d'un objet ponctuel de masse m dans le cas où celui-ci a un MRUA d'accélération a_0, sous l'effet d'une force constante $\overline{F}$. Supposons que la vitesse initiale de l'objet soit $\overline{v}_0$ et que la force $\overline{F}$ soit appliquée dans le sens de $\overline{v}_0$ et produise un déplacement $\overline{d}$. Dans ce cas, force et déplacement ont même sens et :

$$\mathbf{W = \overline{F}\ .\ \overline{d} = F\,d = m\,a_0\,d} \qquad \text{(III.4)}$$

D'après (I.11), on a :

$$\mathbf{a_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}},$$

où on a posé d = $|x - x_0|$ et v est la vitesse à la fin du déplacement d. En remplaçant dans (III.4), on obtient :

$$\mathbf{W = m\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2} \qquad \text{(III.5)}$$

La quantité $\frac{1}{2}mv^2$, qui apparaît dans l'expression ci-dessus, se définit comme l'énergie cinétique K de la masse ponctuelle m :

$$\boxed{\mathbf{K \equiv \frac{1}{2}mv^2}} \qquad \text{(III.6)}$$

Dès lors, la relation III.5 peut s'écrire :

$$\boxed{\mathbf{W = \Delta K}} \qquad \text{(III.7)}$$

qui exprime le fait que le travail effectué sur une masse ponctuelle est égal à la variation de son énergie cinétique. Il s'agit en fait du théorème de l'énergie cinétique.

Le théorème de l'énergie cinétique, exprimé sous la forme (III.7), reste valable dans le cas d'une force variable et pour une trajectoire quelconque. En effet, dans ce cas, la définition du travail de la force $\overline{F}$, devient :

$$\mathbf{W = \int_A^B \overline{F}\,.\,\overline{dl} = \int_A^B F_t\ \ dl}\ , \qquad \text{(III.8)}$$

où F_t est la composante de la force tangente à la trajectoire. La deuxième loi de Newton nous donne :

$$F_t = m\,a_t = m\,\frac{dv}{dt}$$ voir relation (I.20))

$$= m\,\frac{dv}{dl}\cdot\frac{dl}{dt} = m\,\frac{dv}{dl}\,v \qquad \text{(III.9)}$$

En combinant (III.8) et (III.9), on obtient :

$$W = \int_A^B mv\,\frac{dv}{dl}\,dl = \int_A^B mv\,dv = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_A^B = \Delta K\,.$$

Nous avons donc **le théorème de l'énergie cinétique** qui s'exprime dans le cas général par :

$$\boxed{\int_A^B \overline{F}\,.\,\overline{dl} = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_A^B} \qquad \text{(III.10)}$$

Il dit que le travail effectué par une force $\overline{F}$ pour déplacer une masse m le long d'une trajectoire allant d'un point A à un point B est égal à la variation d'énergie cinétique de cette masse entre les points A et B.

III.4 : L'énergie potentielle

Alors que l'énergie cinétique d'une particule est associée à son mouvement, nous allons voir maintenant une autre forme d'énergie qui est associée à sa position. C'est pourquoi on l'appelle énergie potentielle.

Pour se rendre compte de l'existence de cette autre forme d'énergie mécanique, prenons l'exemple d'un objet de masse m lancé en l'air verticalement avec une vitesse initiale v_0. L'objet va ralentir et sa vitesse va finalement s'annuler. La relation (I.11) permet de calculer la hauteur h à laquelle cette vitesse s'annule en posant $x - x_0 = h$ et $a_0 = -g$:

$$h = \frac{0 - v_0^2}{-2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Le signe – pour l'accélération résulte de ce que le déplacement est dirigé vers le haut et l'accélération de la pesanteur, vers le bas. Ensuite l'objet va retomber sur le sol et sa vitesse va augmenter à nouveau pour atteindre la valeur suivante à son arrivée au point de lancement :

$v_f^2 = 0 + 2gh = v_0^2$ (cette fois, déplacement et accélération ont le même sens). A son retour au point de départ l'objet a la même énergie cinétique qu'à l'instant initial :

$$\mathbf{K_f = \frac{1}{2} m\, v_f^2 = \frac{1}{2} m\, v_0^2 = K_0}\,.$$

Par contre au sommet de la trajectoire, l'énergie cinétique a disparu momentanément, pour réapparaître progressivement lors de la chute. On suppose que l'énergie cinétique s'est transformée en une autre forme d'énergie, et que la somme de ces deux formes d'énergie, appelée énergie mécanique, est restée constante pendant tout le mouvement. Clairement, dans l'exemple choisi, cette nouvelle forme d'énergie est liée à la hauteur de l'objet et donc à sa position. En effet pour une hauteur donnée h' < h, la vitesse de l'objet est la même à la montée et à la descente :

$$\mathbf{v_m^2 = v_0^2 - 2gh'}, \qquad \text{à la montée}$$

$$\mathbf{v_0^2 = v_d^2 + 2gh'}, \qquad \text{à la descente}$$

Si on admet l'idée de la valeur constante de l'énergie mécanique, une même énergie cinétique à une hauteur h', implique une même énergie potentielle.

On va donc définir l'énergie potentielle U comme étant la quantité qu'il faut ajouter à l'énergie cinétique K, pour que leur somme reste constante :

$$\boxed{\mathbf{K + U = constante}} \tag{III.11}$$

Dès lors, pour un déplacement produisant une variation d'énergie cinétique ΔK, la variation correspondante d'énergie potentielle, ΔU est donnée par :

$$\mathbf{\Delta U_A^B = U(B) - U(A) \equiv -\Delta K = -W = -\int_A^B \overline{F} \,.\, \overline{dl}}\,,$$

en utilisant les relation III.7et III.3. La différence d'énergie potentielle entre les points A et B est donc donnée par :

$$\boxed{\mathbf{U(B) - U(A) \equiv -\int_A^B \overline{F} \,.\, \overline{dl}}} \tag{III.12}$$

Cette relation ne définit que la différence d'énergie potentielle. L'énergie potentielle est donc définie à une constante près, que l'on choisit arbitrairement.

III.5 : L'énergie potentielle de la force pesanteur

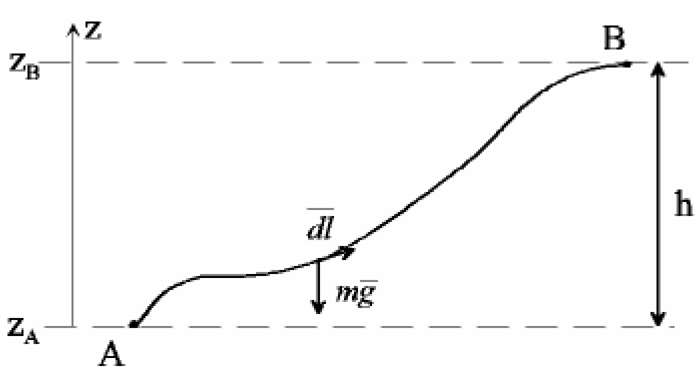


Figure III.4.

En utilisant la définition III.12, la différence d'énergie potentielle entre les points A et B, situés au voisinage de la terre (voir figure III.4), est donnée par

$$\mathbf{U(B)-U(A)=-\int_A^B m\overline{g}\,.\,\overline{dl}=-\int_{z_A}^{z_B}(-mg)\,.\,dz} \qquad \text{(III.13)}$$

En effet, le produit scalaire de deux vecteurs $\overline{A}$ et $\overline{B}$ est donné par la somme des produits de leurs composantes suivant trois axes de coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{\overline{A}\,.\,\overline{B}=A_x\,B_x+A_y\,B_y+A_z\,B_z} \qquad \text{(III.14)}$$

et les coordonnées du vecteur $m\overline{g}$ sont : 0,0 et –mg, celles de $\overline{dl}$: dx, dy et dz, l'axe Oz étant dirigé vers le haut.

Le calcul de l'intégrale (III.13) donne :

$$\mathbf{U(B)-U(A)=mg(z_B-z_A)=mgh}$$

Par conséquent, la différence d'énergie potentielle due à la force pesanteur est donnée par :

$$\boxed{\mathbf{\Delta U_g=mgh}\ ,} \qquad \text{(III.15)}$$

où h est la différence de hauteur entre les deux points considérés. On voit que la position des points A et B dans un plan horizontal, ne joue pas, seule la hauteur du plan compte : tous les points d'un plan horizontal à hauteur constante, ont même énergie potentielle. Dans le cas de la force pesanteur, on choisit le plus souvent le niveau du sol comme niveau de référence : U_g (sol) = 0. Dès lors, à une hauteur h au-dessus du sol U_g (h) = mgh.

III.6 : Les forces conservatives et non conservatives

La différence d'énergie potentielle, telle qu'elle est définie par la relation (III.12), existe-t-elle pour toutes les forces ? La réponse est non. Seules les forces d'un type particulier, dites conservatives, permettent de leur associer une énergie potentielle.

En effet, si l'énergie potentielle ne dépend que de la position, la variation d'énergie potentielle pour tout déplacement le long d'un circuit fermé, qui revient à son point de départ doit être nulle (voir figure III.5).

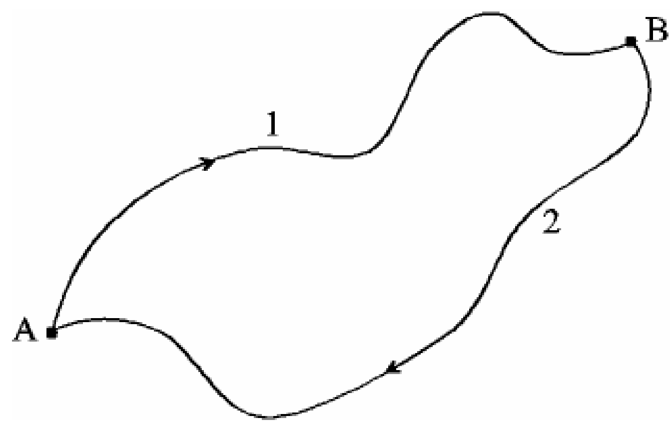


Figure III.5.

$$\mathbf{U(A) - U(A) = -\int_{A\ sur\ 1}^{B} \overline{F} \cdot \overline{dl} - \int_{B\ sur\ 2}^{A} \overline{F} \cdot \overline{dl} = 0} \qquad \text{(III.16)}$$

Cette condition à l'existence d'une énergie potentielle peut encore s'exprimer en disant que le travail de la force entre A et B, ne peut dépendre du chemin suivi pour aller de A à B :

$$\mathbf{\int_{A\ sur\ 2}^{B} \overline{F} \cdot \overline{dl} = -\int_{B\ sur\ 2}^{A} \overline{F} \cdot \overline{dl} = \int_{A\ sur\ 1}^{B} \overline{F} \cdot \overline{dl}}, \text{ d'après (III.16)}$$

Les forces dont le travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi sont dites conservatives, les autres non conservatives. Cette terminologie résulte de ce que pour une force conservative, une énergie potentielle peut être définie et l'énergie mécanique, somme de cette énergie potentielle et de l'énergie cinétique, est constante : il y a conservation de l'énergie mécanique. Pour les forces non conservatives il n'est pas possible de définir une énergie mécanique qui est conservée au cours du mouvement. Dans ce cas, d'autres formes d'énergie interviennent dans l'énergie totale.

La force pesanteur et la force gravitationnelle sont des forces conservatives. C'est le cas de toutes les forces qui ne dépendent pas de la vitesse. Un exemple typique de force non conservative est donné par les forces de frottements. Ces dernières tendent toujours à ralentir le mouvement et sont donc toujours de sens opposé à la vitesse. Comme $\overline{dl} = \overline{v}\, dt$,

$$\mathbf{dW = \overline{F} \cdot \overline{dl} = \overline{F} \cdot \overline{v}\, dt < 0}\,.$$

Et $W_{AB} = \int_A^B dW < 0$, de même que $\int_B^A dW < 0$.

Sur le chemin de retour, la force change de sens de même que la vitesse. Dès lors le travail d'une force de frottement sur un circuit fermé est toujours strictement négatif. L'énergie mécanique dissipée par les forces de frottement se retrouve sous forme d'énergie thermique due à l'échauffement des surfaces en contact.

III.7 : La puissance

Dans les applications industrielles de la physique, il ne suffit pas de savoir quelle quantité de travail un moteur peut fournir, il est aussi primordial de savoir combien de temps il lui faudra pour effectuer ce travail. La puissance est une grandeur qui mesure le taux de travail ; elle est définie comme étant une quantité de travail par unité de temps. Pour une quantité de travail ΔW fournie pendant un intervalle de temps Δt, on définit la puissance moyenne par :

$$\mathbf{P_m \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t}}\,. \qquad \text{(III.17)}$$

La puissance instantanée est obtenue en passant à la limite $\Delta t \to 0$:

$$\boxed{\mathbf{P \equiv \frac{dW}{dt}}\,.} \qquad \text{(III.18)}$$

L'unité SI de puissance est le watt (W) ; il vaut :

$$1W = 1J/1s.$$

Le watt est la puissance qu'il faut développer pour fournir un travail d'un joule en une seconde.

Il peut parfois être utile de relier la puissance instantanée à la force appliquée $\overline{F}$ et à la vitesse $\overline{v}$:

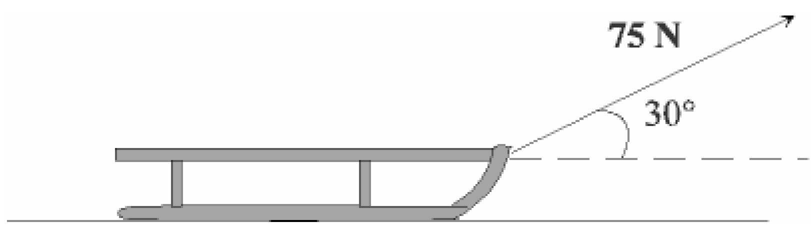
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\overline{F}\,.\,\overline{dl}}{dt} = \overline{F}\,.\,\overline{v}. \qquad (III.19)$$

Donc :

$$\boxed{P = \overline{F}\,.\,\overline{v}} \quad . \qquad (III.20)$$

III.8 : Exercices

1. Pour tirer un traîneau sur une surface horizontale, on exerce une traction de 75 N avec un angle de 30° par rapport à l'horizontale.
   Trouver le travail accompli quand le traîneau parcourt 8 m.
   (R : 520 J).

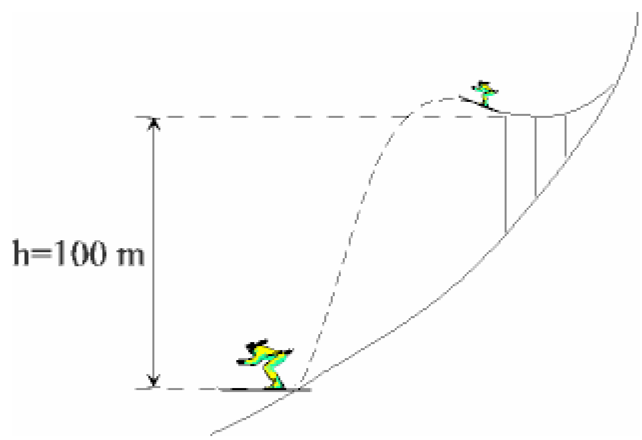


2. Un objet de masse m, initialement immobile, est accéléré par une force constante F. Que vaut son énergie cinétique après un déplacement L ? (R : FL).

3. Une voiture de 1000 kg dispose d'une force de freinage maximum égale à 5000 N
   a) Exprimer sa distance d'arrêt minimum en fonction de sa vitesse ? (R : 0,1 v^2 en unités S.I.).
   b) Quelle est la puissance maximum développée par les freins si la vitesse initiale de la voiture est de 108 km/h ? (R : 150 kW).

4. On enfonce un clou à l'aide d'un marteau de 500 g. La vitesse du marteau juste avant de frapper le clou est de 5 m/s. Le clou s'enfonce de 5 mm. Quelle est la force exercée sur le clou en supposant qu'elle est constante ? (R : 1250 N).

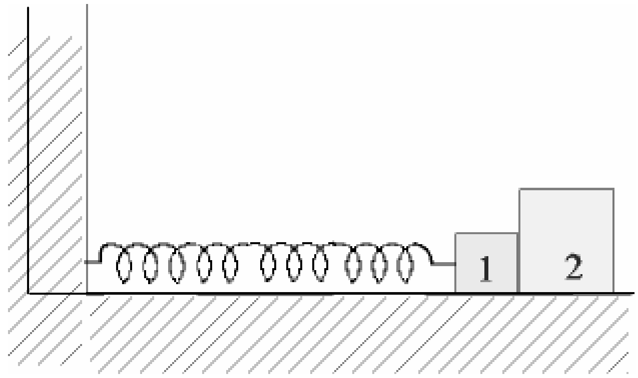
5. Un skieur lancé à une vitesse de 50 m/s quitte un tremplin de saut avec un angle par rapport à l'horizontale inconnu et atterrit en un point dont la distance verticale au tremplin est de 100 m (voir figure).
Quelle est sa vitesse juste avant l'atterrissage si on peut négliger le frottement de l'air ? (R : 67 m/s).



6. Un enfant de 20 kg est assis sur une balançoire au repos. Pour mettre en mouvement la balançoire (de masse négligeable), un adulte pousse sur le dos de l'enfant avec une force horizontale de 250 N sur une distance qui projetée sur l'horizontale vaut 40 cm. De quelle hauteur la balançoire (avec l'enfant !) va-t-elle s'élever ? (R : 50 cm).

7. Un bateau pompier aspire l'eau d'une rivière et la déverse dans un réservoir placé 3,5 m plus haut par un tuyau de 4 cm de diamètre. L'eau supposée au repos dans la rivière est éjectée dans le réservoir avec une vitesse de 60 m/s. (N.B. La masse volumique de l'eau vaut 10^3 kg/m^3).
Trouver la puissance développée par la pompe. (R : 138 kW).

8.



Pour comprimer un ressort d'une longueur d, il faut exercer une force $F = kd$ où k est la constante de rappel. Un ressort de constante de rappel $k = 10^4$ N/m est fixé à un mur par une extrémité. A l'autre extrémité est attaché le cube 1 de masse $m_1 = 0{,}3$ kg. A l'aide d'un second cube de masse $m_2 = 0{,}6$ kg, on comprime le ressort de 2 cm. Ensuite on le lâche. On suppose les frottements négligeables et les cubes ne collent pas l'un à l'autre.

On demande :

a) La force de compression du ressort quand il est comprimé de 2 cm. (R : 200 N)
b) L'énergie emmagasinée dans le ressort à ce moment. (R : 2 J)
c) La vitesse du cube 2 quand il aura quitté le cube 1 c'est-à-dire lorsque le ressort aura retrouvé sa longueur d'équilibre (= longueur de ressort non comprimé). (R : 2,1 m/s).

9. Un store de masse égale à 1 kg et de longueur égale à 2 m s'enroule sur un axe mince placé au sommet d'une fenêtre. Quel est approximativement le travail d'enroulement ? (R : 10 J).