المركز الجامعي بشار

معهد العلوم الدقيقة

دائرة الجذع المشترك: ليسانس ماستر دكتوراه
(LMD)
شعبة:علم المادة و علوم التكنولوجيا

دروس

ل.م.د/فيزياء-1

مـــيــكـــانـــيـــك الـــنـــقـــطـــة الـــمـــاديـــة

LMD / PHYSIQUE-1

الجزء الأول:
حركيات النقطة المادية

الطبعة الثانية

أحمد فيزازي
مكلّف بالدروس

السنة الجامعية 2008-2009

بسم الله الرحمن الرحيم

تنبيه

توضع هذه المجموعة من الدروس في الطبعة الثانية بدون أي ضمان. يمكن للقراء موافاتي على العنوان الإلكتروني: ahmedfizazi@yahoo.fr بكل الهفوات التي يلاحظونها و الموجودة بدون شك ، و هم مشكورين.

ستعاد صياغة النص وتتم مراجعته بانتظام. توفير هذا النص على موقع الانترنيت و في قاعات المطالعة – وهذا جهد إضافي يتجاوز واجبات المدرسين – لا يحق أن يفهم كتشجيع لهجر المدرجات أو قاعات الأعمال الموجهة، و هي الأماكن المفضلة لمتابعة الدروس بالتدرج و بصفة فعالة.

دروس "**ميكانيك النقطة المادية**" المطابقة لبرنامج المقياس **PHYS-1** للنظام الجديد **LMD** موزعة ، **لأسباب عملية و بيداغوجية** ، على جزأين مستقلين عن بعضهما:

الجزء الأول : "**حركيات النقطة المادية**"

الجزء الثاني : "**تحريك النقطة المادية ، العمل و الاستطاعة**".

كل من الجزأين يحتوي عل نفس الصفحات التمهيدية و على نفس الملحق الخاص بالمصطلحات و الأبجدية الإغريقية.

أتقدم بخالص الشكر و العرفان إلى الأستاذ الفاضل محمد تمالي على تشجيعه لي لانجاز هذا العمل و تمكيني من نشره على موقع الانترنيت و مساعدته التقنية المتعلقة بالإعلام الآلي.

كما أتوجه بجزيل الشكر إلى زميلي: سهام قادري و محمد المير عل قبولهما مراجعة المطبوع و الإدلاء بآرائهما البناءة.

من أين نبدأ إذن؟

إذا وافقت ، أقول : يجب عليك أن تفهم أولا مدلول الكلمات"

Par où donc faut-il commencer ?
Si tu consens, je te dirai que tu dois d'abord comprendre les mots.

(Epictète. Entretien)

الـفـهـرس

viii ....المراجع

ix ....مراجع متوفرة في مكتبة المركز الجامعي لبشار

x ....مقدمة

xi ....البرنامج

1 ....**I.تذاكير رياضية**

1 ....**A-I. التحليل البعدي**

1 ....1. **الوحدات**

1 ....ا. الوحدات الأساسية

1 ....ب. الوحدات المشتقة

1 ....ج. الوحدات الثانوية

1 ....د. وحدة إضافية

1 ....ه. المضاعفات و الأجزاء

2 ....2. **المعادلات ذات الأبعاد**

2 ....ا.تعريف

2 ....ب. ما فائدة هذه العبارة ؟

2 ....ج.كيف نحدد γ,β,α ؟

2 ....مثال1.1

3 ....مثال2.1

3 ....مثال3.1

3 ....مثال4.1

4 ....د. تعميم

4 ....مثال5.1

5 ....B-I.**حساب الارتيابات**

5 ....1.المقدار الفيزيائي

2.مفهوم القياس.. 5
3.نظريات الارتيابات.. 6
مثال6.1.. 7
مثال 7.1.. 8
II. **تذكير بالحساب الشعاعي**.. 9
1. المقدار السلمي... 9
2. المقدار الشعاعي... 9
3. التمثيل الهندسي لشعاع 9
4. شعاع الوحدة.. 9
5. الجمع الهندسي للأشعة 9
6. مركبات الشعاع.. 12
مثال1.2.. 12
مثال2.2.. 12
مثال3.2.. 14
مثال4.2.. 14
7. الجداء السلمي.. 14
مثال5.2.. 15
8. الجداء الشعاعي... 16
مثال6.2.. 17
9. التدرج ، التباعد ، الدوران.. 17
مثال7.2.. 18
مثال8.2.. 18
مثال9.2.. 19
III.**الأنظمة الرئيسية للإحداثيات**.................................... 21
1. المعالم العطالية... 21
2. أهم المراجع العطالية... 21

3. الإحداثيات الكارتيزية................................ 22
4. الإحداثيات القطبية...................................... 23
5. الإحداثيات الأسطوانية.................................... 24
6. الإحداثيات الكروية...................................... 25
7. الإحداثيات المنحنية...................................... 27
IV. **علم الحركيات**...................................... 28
A. **مميزات الحركة**...................................... 28
1. تعريفان...................................... 28
2. تمهيد...................................... 28
3. موضع المتحرك...................................... 28
مثال1.4...................................... 29
مثال2.4...................................... 29
4. شعاع السرعة...................................... 30
5. شعاع التسارع...................................... 31
مثال3.4...................................... 33
B. **الحركات المستقيمة**...................................... 34
1. الحركة المستقيمة المنتظمة...................................... 34
مثال4.4...................................... 35
2. الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام...................................... 35
مثال5.4...................................... 36
3. الحركة المستقيمة متغيرة التسارع...................................... 36
مثال6.4...................................... 36
4. الحركة المستقيمة الجيبية...................................... 37
مثال7.4...................................... 39
C. **الحركات المستوية**...................................... 41
1. دراسة الحركة بالإحداثيات المنحنية و القطبية...................................... 41

2.المركبتان الناظمية و المماسية للسرعة و التسارع في معلم فرينت.......... 43
مثال8.4... 44
D. الحركات في الفضاء.. **46**
1. دراسة الحركة بالإحداثيات الأسطوانية.................................. 46
2. دراسة الحركة بالإحداثيات الكروية...................................... 48
مثال9.4.. 50
مثال10.4.. 51
E. الحركة النسبية... 53
1. تغيير المرجع... 53
2. السرعة النسبية لمتحركين.. 53
مثال11.4.. 54
3. مصطلحات و رموز... 55
مثال12.4.. 59
مثال13.4.. 59
4. حالة الحركة الدورانية.. 60
مثال14.4.. 65
معجم المصطلحات: عربي- فرنسي.................................... 67
معجم المصطلحات: فرنسي- عربي.................................... 74
الأبجدية الإغريقية... 81
محتويات الجزء الثاني:تحريك النقطة المادية،العمل و الطاقة........................ 82

OUVRAGES المراجع

PHYSIQUE GENERALE : Alonso-Finn ; InterEdition, Paris.1979

MECANIQUE : Hubert Gié et J.P Sarmant ; Tec Doc Lavoisier, Paris. 1995

COURS DE MECANIQUE : Jozsef Hering ; O.P.U, Alger.

INTRODUCTION A LA MECANIQUE : J.L.CAUBARRERE et autres ; O.P.U, Alger.

EXERCICES ET PROBLEMES DE MECANIQUE CLASSIQUE :LAGOUTINE A. et SEBAA M. O.P.U, Alger.

MECANIQUE CLASSIQUE : L.MARLEAU, Université Laval, Québec.Canada.2006

COURS DE DYNAMIQUE DES CORPS SOLIDES : M.DEVEL ,Université de France-Comté.2003

بعض المراجع المتوفرة في مكتبة المركز الجامعي لبشار
Quelques ouvrages disponibles à la bibliothèque du C.U.Béchar

Edition دار النشر	Auteur المؤلف	titre العنوان	cote الرمز
ديوان المطبوعات الجامعية-الجزائر	عقيل عزيز داخل	أسس الميكانيك التقليدي	11-01-26
ديوان المطبوعات الجامعية-الجزائر	عبدالله موسى	الميكانيك العام الجزء الأول	05-02-35
ديوان المطبوعات الجامعية-الجزائر	عبد الله موسى	الميكانيك الكلاسيكي	11-01-02
ديوان المطبوعات الجامعية-الجزائر	مارسلو - ألونزو	الفيزياء العامة:ميكانيكا-الجزء	05-01-20
ديوان المطبوعات الجامعية-الجزائر	كوبرار (و آخرون)	مدخل ألى الميكانيك	05-02-39
Ellipses	J.P Meullenet B. Spenlehauer	Mécanique newtonienne du point.	05-02-62
Ellipses	E. Elbaz	Mécanique du point matériel.	05-02-53
ديوان المطبوعات الجامعية-الجزائر	عبدالله موسى	الميكانيك العام الجزء الثالث	05-02-37
ديوان المطبوعات الجامعية-الجزائر	عقيل عزيز داخل	أسس الميكانيك التقليدي	11-02-26
ديوان المطبوعات الجامعية-الجزائر	موحوش علي	معجم مصطلحات الفيزياء	05-00-.0
ديوان المطبوعات الجامعية-الجزائر	حسن كنيش	الميكانيك الفيزيائي	05-02-41
منشورات جامعة قازيونس - بنغازي	عقيل عزيز داخل	الفيزياء العامة-الميكانيك و ظواهر المادة	140493/
دار الكتب للطباعة و النشر-جامة الموصل	طالب ناهي الخفاجي	الميكانيك و خواص المادة	493/145

مــــــقـــــــدمــــــة

ما هي الفيزياء؟

إن كلمة فيزياء(physique) آتية من الكلمة اليونانية (phusis) والتي تعني الطبيعة، و لذا ينبغي أن تكون الفيزياء علما يهتم بدراسة الظواهر الطبيعية.

يمكن القول أن الفيزياء علم هدفه دراسة مركبات المادة وتأثراتها المتبادلة اليومية. بدلالة هذه التأثرات المتبادلة يفسّر العلمي خواص المادة في مجملها بما في ذلك كل الظواهر الطبيعية الأخرى التي نلاحظها.

الفروع التقليدية للفيزياء:

الميكانيك (mécanique)، الحرارة(chaleur)، السمعيات(acoustique)، البصريات(optique)، الكهرومغناطيسية(électromagnétisme).

مقياسا الفيزياء في السنة الأولى (شعبة الجذع المشترك لـــ ل.م.د):

الميكانيك (PHYS-1): ميكانيك النقطة المادية.

الكهرباء والمغناطيسية(PHYS-2) : دراسة الكهرباء و المغناطيسية.

أهـــم فـــروع الـــميكانيك

الميكانيك التقليدية (Mécanique classique): **الدراسة الحركية و التحريكية لنقطة أو جملة المادية.**

الميكانيك الكونية (Mécanique céleste): **دراسة الأجسام الكونية بما فيها الأقمار الاصطناعية.**

الميكانيك السكونية (Mécanique statique): **دراسة الجمل ذات المركبات الكبيرة(مثل الغازات).**

الميكانيك الكمية (Mécanique quantique): **دراسة سلوك الجمل الفيزيائية على مستوى الجسيمات.**

الميكانيك النسبية (Mécanique relativiste) **دراسة جمل متحركة بسرعات تقارب سرعة الضوء.**

البيوميكانيك (Biomécanique) : **دراسة تشوه الأجسام الحية سيّما جسم الإنسان عند الصدم.**

الفيزياء السمعية (l'acoustique physique): **دراسة الحركات الاهتزازية الصغيرة في الأجسام الصلبة، السوائل و الغازات.**

الميكاترونيك (Mécatronique) : **هندسة الأشياء الميكانيكية و قياس و مراقبة سلوكياتها الحركية بأنظمة إلكترونية.**

برنامج الميكانيك (PHYS-1)
Programme de mécanique

(الدرس 3 سا ؛ الأعمال الموجة 1سا30د)

COURS : Ahmed **FIZAZI** ***E-mail*** :afizazi@mail.univ-bechar.dz ou ahmedfizazi@yahoo.fr

Programme de mécanique (2 cours + 1TD) / semaine. VHG=67.5 heures. 6 crédits

I/ <u>RAPPEL MATHEMATIQUE</u> (2 semaines) :

Les équations aux dimensions

Calcul d'erreurs

Les vecteurs

I/ <u>تذكير رياضي</u> (أسبوعان)

المعادلات ذات الأبعاد

حساب الإرتيابات

الأشعة

II/ <u>CINEMATIQUE DU POINT</u> (3 semaines) :

Mouvement rectiligne

Mouvement dans l'espace

Etude de mouvements particuliers

Etude du mouvement dans différents systèmes (polaires, cylindriques et sphériques)

Mouvements relatifs

II/ <u>حركيات النقطة المادية</u> (3 أسابيع)

الحركة المستقيمة

الحركة في الفضاء

دراسة الحركات الخاصة

دراسة الحركة في أنظمة مختلفة (القطبية،الأسطوانية و الكروية)

الحركات النسبية

III /<u>DYNAMIQUE DU POINT</u> (4 semaines) :

Le principe d'inertie et les référentiels galiléens

Le principe de conservation de la quantité de mouvement

Définition newtonienne de la force (3lois de Newton)

Quelques lois de force

III/ <u>تحريك النقطة المادية</u> (4أسابيع)

مبدأ العطالة و المعالم الغاليلية

مبدأ انحفاظ كمية المادة

التعريف النيوتوني للقوة (القوانين الثلاثة لنيوتن)

بعض قوانين القوة

IV/ <u>TRAVAIL ET ENERIE DANS LE CAS D'UN POINT MATERIEL (4 semaines)</u>

Energie cinétique

Energie potentielle de gravitation et élastique

Forces non conservatives

IV/ <u>العمل و الطاقة في حالة النقطة المادية</u> (4 لأسابيع)

الطاقة الحركية

الطاقة الكامنة الدورانية و المرنة

القوى الغير محافظة

I.تـــذاكـــيـــر ريـــاضـــيـة
RAPPELS MATHEMATIQUES

A-I /الـــتـــحـــلـــيـــل الـــبـــعـــدي
ANALYSE DIMENSIONNELLE

1/الــوحــدات

ا/ **الوحدات الأساسية**: تتكون الجملة الدولية للوحدات من 7 وحدات أساسية مناسبة لـــ 7 مقادير فيزيائية كما يبينه الجدول التالي:

المقدار	الكتلة	الطول	الزمن	الشدة الكهربائية	درجة الحرارة	كمية المادة	الشدة الضوئية
رمز المقدار	**M**	**L**	**T**	**I**	**θ**	**N**	**J**
إسم الوحدة	kilogramme كيلوغرام	mètre متر	seconde ثانية	ampère آمبير	degré kelvin درجة كلفينية	mole مول	candela قنديلة
رمز الوحدة	**kg**	**m**	**s**	**A**	**K**	**mol**	**Cd**

ب/ **الوحدات المشتقة**: (unités dérivées) وحدات كل المقادير الفيزيائية (عدا السبعة المذكورة أعلاه) تشتق من الوحدات الأساسية السبعة السابقة الذكر.

مثلا: النيوتن(N)، الجول(J)، الأوم(Ω)............

ج/ **الوحدات الثانوية**: (unités secondaires)إلى جانب الوحدات الأساسية توجد وحدات ثانوية لبعض المقادير.

مثلا: لتر(l)،الدرجة المئوية(°C) الحريرة(cal).........

د/ **وحدة إضافية**: (unité supplémentaire) الوحدة الرسمية للزوايا المستوية هي الراديان (rad).

ه/**المضاعفات و الأجزاء**: (multiples et sous multiples)

☜ **الأجزاء:**

المعامل	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}
الأسم préfixe	déci	centi	milli	micro	nano	pico	femto	atto
الرمز	d	c	m	µ	n	p	f	a

☜ **المضاعفات:**

المعامل	10^{+1}	10^{+2}	10^{+3}	10^{+6}	10^{+9}	10^{+12}	10^{+15}	10^{+18}
الإسمpréfixe	déca	hecto	kilo	méga	giga	téra	péta	exa
الرمز	da	h	k	M	G	T	P	E

2/ الـــمـــعـادلات ذات الأبـــعاد:

ا/ تعريف:

في الإطار المحدود للميكانيك، نسمي ***المعادلة ذات الأبعاد*** (équation aux dimensions) *للمقدار* G(grandeur) ، المعادلة أحادية الحد لهذا المقدار و التي تكون على الشكل:

$$\boxed{[G] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}} \qquad (1.1)$$

حيث T, L , M ترمز على التوالي إلى المقادير: الكتلة(masse)، الطول(longueur) و الزمن(temps) .

ب/ ما فائدة هذه العبارة؟

الفائدة من هذه العبارة هي أساسا الوصول إلى عبارة وحدة(unité) G في الجملة الدولية للوحدات (Système International des Unités : S.I) و التي ستكون:

$$\boxed{kg^{\alpha} m^{\beta} s^{\gamma}} \qquad (2.1)$$

ج/ كيف نحدد α,β,γ؟

عملية تحديد الأعداد الحقيقية γ,β,α تسمى **بالتحليل البعدي** للمقدار G .
لبلوغ هذا الهدف نعبر عن علاقات التعاريف أو كل عبارة معلومة توصلنا إليها الدراسة النظرية إنطلا قا من تلك التعاريف.

أمثلة:

مثال 1.1:

عين المعادلة ذات الأبعاد للسرعة (vitesse) و التسارع (accélération) .

السرعة: $[V] = LT^{-1} \leftarrow [V] = \dfrac{L}{T} \leftarrow V = \dfrac{x}{t}$ الوحدة: ms^{-1}

التسارع: $[a] = L.T^{-2} \leftarrow [a] = \dfrac{L.T^{-1}}{T} \leftarrow a = \dfrac{v}{t}$ الوحدة: $m.s^{-2}$

مثال2.1:

عين المعادلة ذات الأبعاد للقوة(force) و العمل (travail) .

$N = kms^{-2}$:الوحدة $\quad F = ma \quad \rightarrow \quad [F]=[m].[a] \quad \rightarrow \quad [F]=MLT^{-2}$

$kgm^2s^{-2} = N.m = J$:الوحدة $\quad W = F.l \quad \rightarrow [W]=MLT^{-2}.L \rightarrow [W]=ML^2T^{-2}$

مثال3.1:

عين المعادلة ذات الأبعاد لسعة مكثفة (capacité d'un condensateur) .

في هذه الحالة خرجنا من إطار الميكانيك. يجب تمديد القاعدة المذكورة أعلاه.

في الكهرومغناطيسية ندخل قاعدة ذات 4 أبعاد و ذلك بإضافة المقدار الأساسي للشدة (intensité) و الذي نرمز إليه بــ I.

تصبح المعادلة ذات الأبعاد:

$$\boxed{[G]=M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}I^{\delta}} \qquad (3.1)$$

الجواب:

$$C=\frac{Q}{V} \qquad [C]=\frac{[Q]}{[V]}$$

$$Q=It \qquad [Q]=I.T$$

$$W=Q.V \qquad [W]=ML^2T^{-2}$$

$$[V]=\frac{[W]}{[Q]}=\frac{ML^2T^{-2}}{IT}$$

$kg^{-1}m^{-2}s^4A^2=F(farad)$:الوحدة $\quad [C]=\dfrac{IT}{\dfrac{ML^2T^{-2}}{IT}} \Rightarrow [C]=M^{-1}L^{-2}T^4I^2$

مثال 4.1:

عين المعادلة ذات الأبعاد للسماحية (permittivité) ε لمكثفة. هل يمكن التعبير عنها ب $N^{-1}m^{-2}C^{+2}$ ؟

الجواب:

نعرف أن : $C=\varepsilon\dfrac{S}{d} \Rightarrow [\varepsilon]=[C]L^{-1}$

رأينا أن: $[C]=I^2M^{-1}L^{-2}T^4$

و عليه فإن: $[\varepsilon]=I^2M^{-1}L^{-3}T^4$

نحلل العبارة إلى 3 أجزاء:

$$[\varepsilon]=\left(I^2T^2\right)\left(M^{-1}L^{-1}T^2\right)\left(L^{-2}\right)$$

$$[Q]^2=I^2T^2\rightarrow C^2\quad;\quad[F]^{-1}=M^{-1}L^{-1}T^2\rightarrow N^{-1}\quad;$$

$$[L]^{-2}\rightarrow m^{-2}\qquad\Rightarrow\boxed{\varepsilon\rightarrow C^2N^{-1}m^{-2}}$$

د/ تعميم:

في الحالة العامة فإن المعادلة ذات الأبعاد للمقدار G تكون على الشكل:

$$\boxed{[G]=M^aL^bT^cI^d\theta^eN^fJ^g}\qquad(4.1)$$

θ: رمز لدرجة الحرارة (température)

N : رمز لكمية المادة (quantité de matière)

J : رمز للشدة الضوئية (intensité lumineuse)

ملاحظة: بعد الدوال الأسية و اللوغاريتمية و المثلثية و الثوابت و ما داخل هذه الدوال يساوي 1.

$$[x]=1\quad[\alpha]=1\quad[\sin\alpha]=1\quad\left[e^x\right]=1\quad[\log x]=1\quad[8]=1\quad[\pi]=1$$

مثال 5.1: تكتب معادلة غاز حقيقي على الشكل التالي: $(P+\frac{a}{V_0})(V_0-b)=RT$ ، حيث P هو ضغط الغاز ، V_0 حجمه المولي و T درجة الحرارة.

عين أبعاد الثوابت الفيزيائية a و b و R.

الجواب: نلاحظ أن المقدار $\frac{a}{V_0}$ يمثل ضغطا و بالتالي فإن:

$$\left[\frac{a}{V_0}\right]=[P]=\frac{[F]}{[S]}=ML^{-1}T^{-2}$$

و منه فإن :

$$[a]=[P][V_0]=ML^{-1}T^{-2}.L^{+3}\Rightarrow\boxed{[a]=ML^{+2}T^{-2}}$$

أما b فلا يمكن أن يكون إلا حجما و عليه :

$$\boxed{[b]=[V_0]=L^{+3}}$$

و تبعا لكل ما سبق فإن المقدار RT يمثل ضغطا مضروبا في حجم و منه فإن:

$$[RT]=[P][V]=ML^{+2}T^{-2}\Rightarrow\boxed{[R]=ML^{+2}T^{-2}K^{-1}}$$

B-I/ حـــســـاب الارتـــيـــابـــات
CALCUL DES INCERTITUDES

1/ المقدار الفيزيائي (grandeur physique):

المقدار الفيزيائي هو كل من يأخذ ، في شروط محددة تماما ، قيمة عددية معينة و التي يمكن أن تتغير (تزيد أو تنقص) إذا تغيرت هذه الشروط نفسها.

2/ مفهوم القياس(notion de mesure):

إن قياس مقدار فيزيائي لا يمكن أن يكون إلا تقريبا و هذا للاعتبارات التالية:

ـــ أخطاء في تشغيل أجهزة القياس أو تدريجاتها (تدعى أخطاء نظامية) ،

ـــ أخطاء حتمية أثناء عملية القياس و هي تعود إلى نقص دقة حواس المجرب (و تدعى أخطاء عرضية) ،

ـــ الدقة المحدودة لأجهزة القياس.

حين نقيس مقدارا X فإننا لا نحصل إلا على قيمة تقريبية له x مهما كانت دقة القياس ؛ الفرق بين القيمة الحقيقية x_0 و القيمة التقريبية x تسمى **الخطأ المطلق** (erreur absolue) و نرمز له بـــ : δx

$$\boxed{\delta x = x - x_0} \qquad (5.1)$$

و هي عموما غير معروفة.انطلاقا من خصائص الجهاز المستعمل و من الطريقة المستعملة يمكن دائما التأكد من أن الخطأ المرتكب لا يتجاوز قيمة حدية مطلقة مرتقبة معروفة و التي تسمى **الارتياب المطلق** (incertitude absolue) للمقدار X.

$$\boxed{|\delta x| \leq \Delta x} \qquad (6.1)$$

و هكذا فإن القيمة الحقيقية محصورة بين حدين معروفين $x - \Delta x$ و $x + \Delta x$.

يمكن أن نعطي تعريفا رياضيا أكثر دقة للارتياب المطلق وفق التحليل التالي:

ليكن مقدار $X = f(x, y, z)$ حيث x ، y و z تمثل مقادير قابلة للقياس تشوبها ارتيابات.

الارتياب المطلق لـــ X أي ΔX يتمثل في طويلة التفاضل dX بحيث $\Delta X \le |dX|$.

بما أن إشارة الأخطاء غير معروفة فمن البديهي أخذ القيم المطلقة للتفاضلات.

و بما أن $dX = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

فإن الارتياب المطلق ΔX لـــ X يكتب:

$$\boxed{\Delta X \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z} \quad (7.1)$$

❖ **تعريف:** نسمي **الارتياب النسبي** (incertitude relative) لمقدار النسبة بين الارتياب المطلق و القيمة التقريبية له أي $\frac{\Delta x}{x}$ و يساوي طويلة التفاضل اللوغاريتمي أي:

$$\boxed{\frac{\Delta X}{X} = \left|\frac{dX}{X}\right|} \quad (8.1)$$

3/ نظريات الارتيابات (théorèmes des incertitudes)

❖ **الإرتياب المطلق لمجموع جبري:** (incertitude absolue d'une somme algébrique)

✓ **نص النظرية:** الإرتياب المطلق **لمجموع جبري** يساوي **المجموع الحسابي** للارتيابات المطلقة لكل حد من حدوده.

إذا كان لدينا المجموع الجبري $y = nu + pv - qw + k$ حيث n و p و q معاملات موجبة و k ثابت خال من أي ارتياب و u ، v و w ارتياباتها المطلقة هي على التوالي: Δu ، Δv و Δw فإن الارتياب المطلق للمقدار y هو: $\Delta y = n\Delta u + p\Delta v + q\Delta w$.

$$\boxed{y = nu + pv - qw + k \Rightarrow \Delta y = n\Delta u + p\Delta v + q\Delta w} \quad (9.1)$$

هام: نكتب نتيجة قياس دائما على الشكل:

$$\boxed{y_0 = (y \pm \Delta y)\, u} \quad (10.1)$$

حيث: القيمة الحقيقية: y_0 القيمة التقريبية: y

الارتياب المطلق: Δy الوحدة المناسبة: u

مثال 6.1 : نقيس الكتلة M بطريقة الوزن المضاعف فنحصل على النتيجتين $m_1 = 12.762g$ و $m_2 = 57.327g$. إذا علمت أن الارتياب المطلق لـــ M هو $\Delta m = \pm 2mg$ ، أحسب M و ΔM.

الجواب:

$$M = m_2 - m_1 \Rightarrow M = 44.565g$$
$$\Delta M = \Delta m_1 + \Delta m_2 = 4mg = 0.004g$$

و هكذا فإن النتيجة تكتب دائما على الشكل:

$$\boxed{M = (44.565 \pm 0.004)g}$$

أما الارتياب النسبي لـــ M فهو:

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta m_1 + \Delta m_2}{m_2 - m_1} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta M}{M} = 9.10^{-5}}$$

❖ **الارتاب النسبي لجداء أو كسر:** (incertitude relative d'un produit ou d'un quotient)

هناك حالتان :

الحالةالأولى: مقادير مستقلة عن بعضها البعض

✓ **نص النظرية:** الارتياب النسبي لجداء أو كسر يساوي **المجموع الحسابي** للارتيابات النسبية لكل حد من حدوده.

البرهان الرياضي:

إذا كان لدينا الجداء $y = ku^n v^p w^{-q}$ حيث n ، p و q أعداد صحيحة و k ثابت خال من أي ارتياب و u ، v و w ارتياباتها المطلقة هي على التوالي: Δu ، Δv و Δw.

لنطبق الدالة اللوغاريتمية على طرفي المعادلة :

$$\log y = \log\left[ku^n v^p w^{-q}\right]$$

و حسب خواص اللوغاريتم:

$$\log y = \log k + n\log u + p\log v - q\log w$$

نكتب الآن التفاضل اللوغاريتمي ثم ننشر:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dk}{k} + n\frac{du}{u} + p\frac{dv}{v} - q\frac{dw}{w}$$

نصل إلى عبارة الارتياب النسبي (بعد تغيير الإشارة − ألى الإشارة +) و نأخذ القيم المطلقة للأعداد:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y}=|n|\frac{\Delta u}{u}+|p|\frac{\Delta v}{v}+|q|\frac{\Delta w}{w}} \qquad (11.1)$$

يمكن استخلاص القاعدة العامة المسيرة لمثل هذه الحسابات:

- كل الرموز di تعوض بالرموز Δi
- تغير الإشارة − إلى أشارة +
- نأخذ المقادير التي لا تحتوي على Δ بقيمها المطلقة.

الحالةالثانية: مقادير مرتبطة فيما بينها:

ليكن $y=k\dfrac{u^{\alpha}v^{\beta}}{(u+v)^{\gamma}t^{\delta}}$

نتبع نفس الخطوات:

$$\log y=\log k+\alpha\log u+\beta\log v-\gamma\log(x+y)-\delta\log t$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dk}{k}+\alpha\frac{du}{u}+\beta\frac{dv}{v}-\gamma\frac{du}{u+v}-\gamma\frac{dv}{u+v}-\delta\frac{dt}{t}$$

نجمع كل الحدود التي لها نفس الطبيعة أي نفس di و نستبدل الإشارة − بالإشارة +:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dk}{k}+du\left(\frac{\alpha}{u}-\frac{\gamma}{u+v}\right)+dv\left(\frac{\beta}{v}-\frac{\gamma}{u+v}\right)-\delta\frac{dt}{t}$$

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y}=\Delta u\left(\frac{\alpha}{u}-\frac{\gamma}{u+v}\right)+\Delta v\left(\frac{\beta}{v}-\frac{\gamma}{u+v}\right)+|\delta|\frac{\Delta t}{t}} \qquad (12.1)$$

مثال 7.1: أحسب الارتياب النسبي ثم الارتياب المطلق للطاقة الكهربائية المعبر عنها بالقانون $Q=RI^2t$.

الجواب: حسب نظرية الارتياب النسبي لجداء يمكننا كتابة:

$$Q=RI^2t \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta Q}{Q}=\frac{\Delta R}{R}+2\frac{\Delta I}{I}+\frac{\Delta t}{t}$$

و من هذا نستنتج عبارة الارتياب المطلق:

$$\Delta Q=Q\left(\frac{\Delta R}{R}+2\frac{\Delta I}{I}+\frac{\Delta t}{t}\right)$$

II/ تـــذكـــيـــر بـــالـحـــســاب الـشـعـــاعـــي
RAPPEL SUR LE CALCUL VECTORIEL

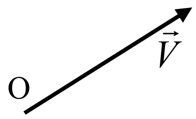
1/المقدار السلمي: (grandeur scalaire) يعبر عن المقدار السلمي بقيمة عددية في الوحدة المناسبة.

أمثلة:الحجم، الكتلة، درجة الحرارة، الشحنة، الطاقة.....

2/المقدار الشعاعي: (grandeur vectorielle) يستلزم تحديد إتجاهه، جهته و نقطة تأثيره زيادة على قيمته العددية. تسمى هذه المقادير بالمتجهات أو الأشعة.

أمثلة: الإنتقال، السرعة، القوة، الحقل الكهربائي.......

3/التمثيل البياني للشعاع: (أنظر الشكل 1.2)



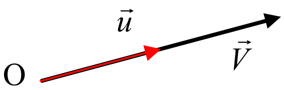
الشكل 1.2

$\vec{V}$: يرمز إلى الشعاع أي مقدارا و اتجاها.

$\|\vec{V}\| = |\vec{V}| = V$: يرمز إلى المقدار(القيمة العددية أي الشدة أو الطويلة أو المعيار).

4/شعاع الواحدة: (vecteur unitaire) هو شعاع طويلته تساوي الواحد.

يمكن التعبير عن شعاع موازٍ لشعاع الواحدة بالشكل:

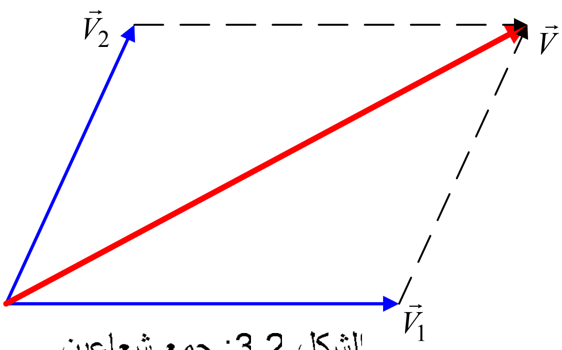


الشكل 2.2

$$\boxed{\vec{V} = \vec{u}.V = V.\vec{u}} \quad (1.2)$$

5/الجمع الهندسي للأشعة: (somme vectorielle) يمكن جمع الأشعة بيانيا و لذا حق تسمية العملية بالجمع الهندسي.

جمع شعاعين: عملية جمع الأشعة عملية تبديليه:



$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

$$\vec{V} = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$$

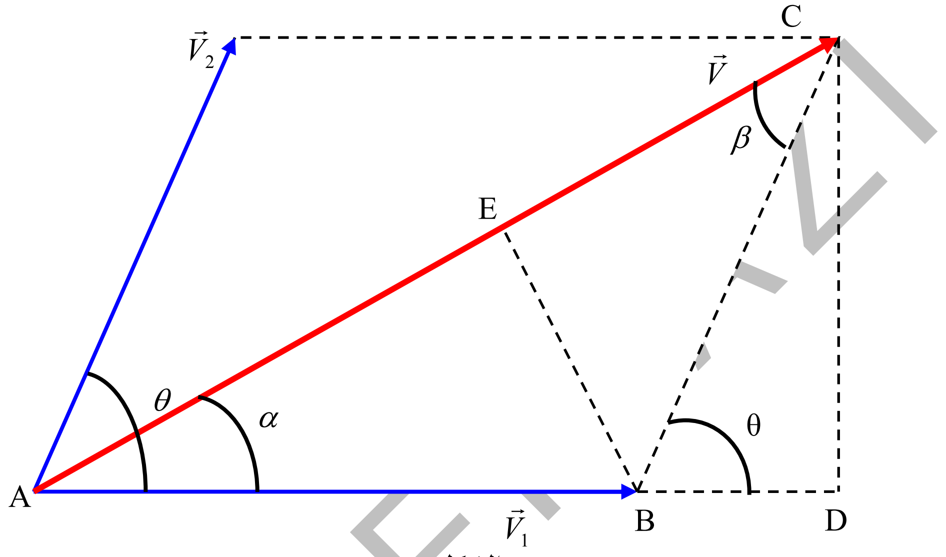
الشكل 3.2: جمع شعاعين

نحصل على شدة الشعاع بواسطة العلاقة التالية و التي تسمى بقانون جيوب التمام (loi des cosinus) و التي سنبرهن عنها لاحقا في فقرة الجداء السلمي.

$$\boxed{V=\sqrt{V_1^2+V_2^2+2V_1V_2\cos\theta}} \qquad (2.2)$$

لتحديد جهة(أي حامل) $\vec{V}$ يكفي تحديد الزاوية α حيث نلاحظ في الشكل4.2 أنه في المثلث **ACD :**

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha&=\frac{CD}{AC}=\frac{CD}{V}\\ \sin\theta&=\frac{CD}{BC}=\frac{CD}{V_2}\end{aligned}\right|\Rightarrow \frac{V}{\sin\theta}=\frac{V_2}{\sin\alpha}\Rightarrow \boxed{V.\sin\alpha=V_2.\sin\theta} \qquad (3.2)$$



الشكل 4.2

و بالمثل في المثلث BEC فإن:

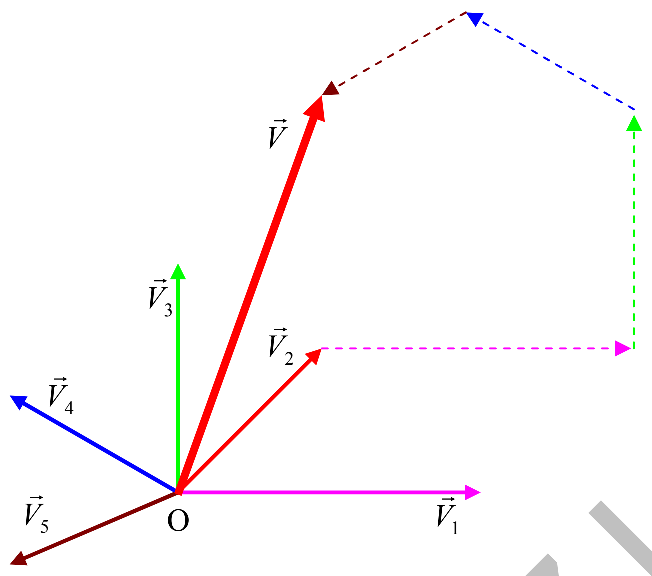
$$\left.\begin{aligned}\sin\beta&=\frac{BE}{BC}\\ \sin\alpha&=\frac{BE}{AB}\end{aligned}\right|\Rightarrow \frac{V_2}{\sin\alpha}=\frac{V_1}{\sin\beta}\Rightarrow \boxed{V_2.\sin\beta=V_1.\sin\alpha} \qquad (4.2)$$

من (3.2) و (4.2) نستنتج العلاقة العامة التالية و التي تسمى بقانون الجيوب (loi des sinus)

$$\boxed{\frac{V}{\sin\theta}=\frac{V_1}{\sin\beta}=\frac{V_2}{\sin\alpha}} \qquad (5.2)$$

<u>حالة خاصة</u>: أذا كانت $\theta=\pi/2$ فإن $V=\sqrt{V_1^2+V_2^2}$ و $tg\alpha=\frac{V_2}{V_1}$

الجمع الهندسي لعدة أشعة: (لاحظ الشكل 5.2) $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 + \vec{V}_5$



الشكل 5.2

الفرق بين الأشعة: هندسيا يمثل الشعاع $\vec{D}$ في الشكل6.2 الفرق بين الشعاعين $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_1$

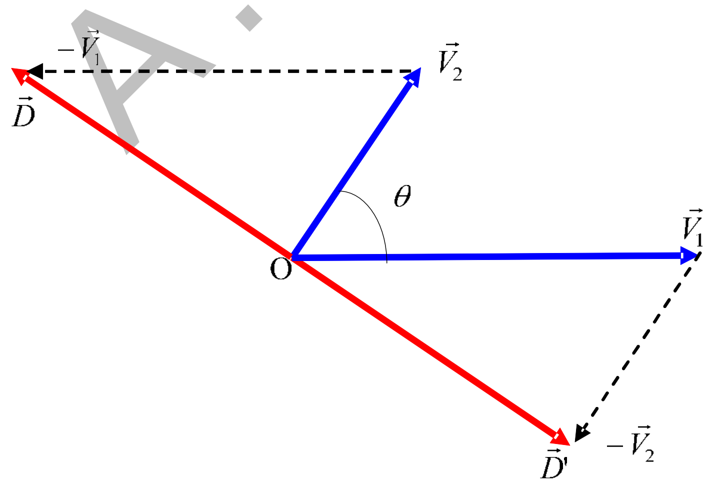
حيث يمكن كتابة: $\vec{D} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

يمكن كتابة هذه المعادلة على الشكل التالي: $\vec{D} = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1)$

عملية طرح الأشعة ليست تبديلية، هذا ما نلاحظه على الشكل: $\vec{D}\,' = -\vec{D}$

طويلة الشعاع $\vec{D}$: (module du vecteur)

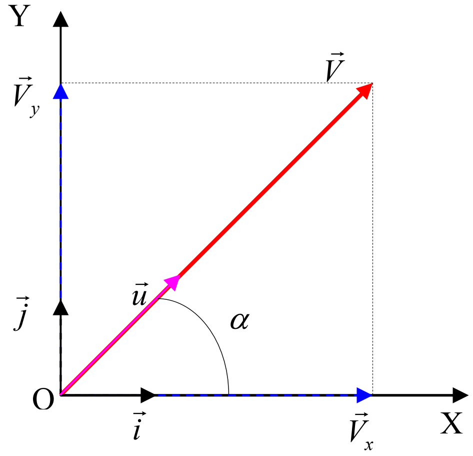
$$\boxed{D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta}} \qquad (6.2)$$



الشكل 6.2: الفرق بين شعاعين

6/مركبات الشعاع: (composantes d'un vecteur) يمكن اعتبار كل شعاع على أنه مجموع شعاعين (أو أكثر، وعدد الإمكانيات لا نهائي).

في المستوي: في المعلم $\Re\ (O;\vec{i},\vec{j})$:



الشكل 7.2: مركبتا شعاع

عادة تستعمل المركبات المتعامدة:

حيث $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$

$V_x = V\cos\alpha$

$V_y = V\sin\alpha$

بتحديد شعاعي الواحدة $\vec{i}$ و $\vec{j}$ في اتجاه كل من المحورين OX و OY

نلاحظ أن:

$$\vec{V}_x = \vec{i}.V_x \quad , \quad \vec{V}_y = \vec{j}.V_y \quad ;$$

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y \quad ; \quad \vec{V} = \vec{i}.V_x + \vec{j}.V_y \quad ; \qquad (7.2)$$

$$\vec{V} = \vec{i}.V\cos\alpha + \vec{j}.V\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = V(\vec{i}.\cos\alpha + \vec{j}.\sin\alpha)}$$

و في الأخير و بما أن: $\vec{V} = \vec{u}.V$ فإن:

$$\boxed{\vec{u} = \vec{i}.\cos\alpha + \vec{j}.\sin\alpha} \qquad (8.2)$$

أما طويلة الشعاع $\vec{V}$ فهي: $V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}}$

يمكن استعمال رموز أخرى: $V = \sqrt{x^2 + y^2}$

مثال1.2: أوجد محصلة الشعاعين: $\vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ في المعلم $\Re(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

الحل: $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad ; \quad \vec{V} = \vec{i}(x_1 + x_2) + \vec{j}(y_1 + y_2) \longrightarrow \quad V = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$

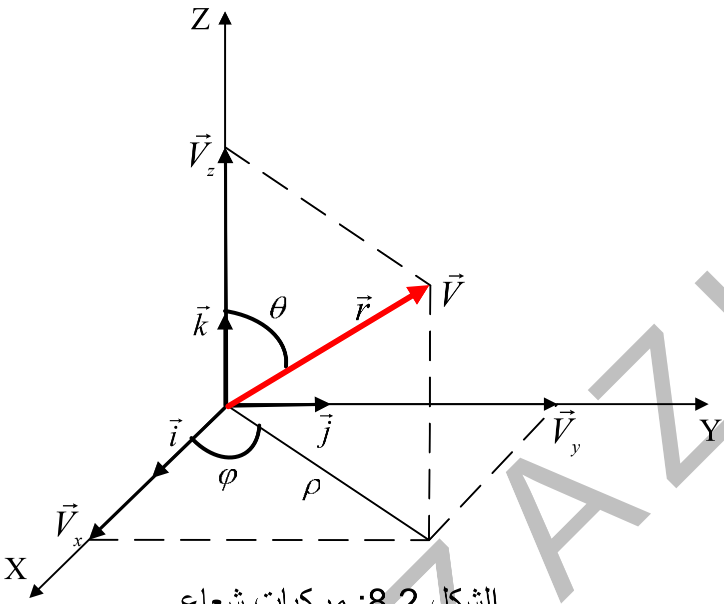
مثال 2.2: أوجد الفرق بين الشعاعين $\vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ في المعلم $\Re(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

الحل: $\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \quad ; \quad \vec{V} = \vec{i}(x_1 - x_2) + \vec{j}(y_1 - y_2) \Rightarrow V = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

في الفضاء: في المعلم $\Re(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (قاعدة متعامدة و متجانسة):

نلاحظ أن:

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z \Rightarrow \vec{V} = \vec{i}.V_x + \vec{j}.V_y + \vec{k}.V_z$$



الشكل 8.2: مركبات شعاع

يمكن التحقق هندسيا من أن:

$$\cos\theta = \frac{V_z}{r} \Rightarrow V_z = r.\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\rho}{r} \Rightarrow \rho = r.\sin\theta;$$

$$\cos\varphi = \frac{V_x}{\rho} \Rightarrow V_x = \rho.\cos\varphi \Rightarrow V_x = r.\sin\theta.\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{V_y}{\rho} \Rightarrow V_y = \rho.\sin\varphi \Rightarrow V_y = r\sin\theta.\sin\varphi$$

في النهاية:

$$\boxed{\begin{array}{l} V_x = V\sin\theta.\cos\varphi \\ V_y = V.\sin\theta.\sin\varphi \\ V_z = V.\cos\theta \end{array}} \quad (9.2)$$

أما طويلة الشعاع فهي: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

أو بالإحداثيات الديكارتية: $V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ملاحظة: إذا رمزنا بــ α و β إلى الزاويتين اللتين يصنعهما الشعاع $\vec{V}$ مع المحورين OX و OY على التوالي ، و بمثل ما حصلنا على المعادلة الثالثة من العلاقة 9.2 فيكون لدينا:

$$\boxed{V_x = V.\cos\alpha \quad , \quad V_x = V.\cos\beta \quad , \quad V_z = V.\cos\theta} \qquad (10.2)$$

يمكن استنتاج العبارة:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1} \qquad (11.2)$$

مثال 3.2:أوجد المسافة الفاصلة بين النقطتين A(10,-4,4)u ; B(10,6,8) u الممثلتين على معلم مستطيل $\Re(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، حيث $u=$ وحدة.

الحل: نعين النقطتين على المعلم الديكارتي ليتبين لنا أن المسافة المطلوب حسابها هي: $\vec{D} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ وبالتالي فإن المسافة هي طويلة الشعاع $\vec{D}$.

$$\vec{D} = \vec{i}(x_2 - x_1) + \vec{j}(y_2 - y_1) + \vec{k}(z_2 - z_1) \Rightarrow \vec{D} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\vec{D} = \vec{i}(0) + \vec{j}(10) + \vec{k}(4) \Rightarrow D = \sqrt{116} = 10.77u$$

مثال4.2:أوجد محصلة الأشعة الخمسة التالية:

$$\vec{V}_1 = (4\vec{i} - 3\vec{j})\ \mathrm{u};\vec{V}_2 = (-3\vec{i} + 2\vec{j})\ u;\vec{V}_3 = (2\vec{i} - 6\vec{j})u;\vec{V}_4 = (7\vec{i} - 8\vec{j})u;\vec{V}_5 = (9\vec{i} + \vec{j})u$$

الحل:

$$\vec{V} = (4-3+2+7+9)\vec{i} + (-3+2-6-8+1)\vec{j} \Rightarrow V = 19\vec{i} - 14\vec{j} \Rightarrow V = \sqrt{61+196} = 23.60u$$

لإيجاد منحى أو حامل الشعاع $\vec{V}$ ننطلق من العلاقة $tg\alpha = \frac{V_y}{V_x}$ و هي الزاوية التي يصنعها $\vec{V}$ مع المحور OX: $tg\alpha = {}^{-14}\!/_{4} = -3,5 \Rightarrow \alpha = -74,05°$

7/الجداء السلمي ☹produit scalaire)

تعريف:نسمي الجداء السلمي لشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ العدد الحقيقي $\vec{V}_1.\vec{V}_2$ بحيث:

$$\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = V_1.V_2.\cos(\vec{V}_1.\vec{V}_2)} \qquad (12.2)$$

أو:

$$\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \frac{1}{2}\left[(V_1 + V_2)^2 - V_1^{\,2} - V_2^{\,2}\right]} \qquad (13.2)$$

حالات خاصة:

إذا كان $\vec{V}_1 = \vec{0}$ أو $\vec{V}_2 = \vec{0}$ فإن $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$

إذا كان $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$ و $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$ فإن:

$$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1,\vec{V}_2) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$$
$$\vec{V}_1 // \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1,\vec{V}_2) = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V} = V_1V_2$$

مثلا:عمل قوة $\vec{F}$ تحدث انتقالا $\overrightarrow{AB}$ يعطى بالعلاقة: $W = F.AB.\cos\alpha$ حيث $\alpha = (\vec{F};\overrightarrow{AB})$ (و نقرأ: W هو الجداء السلمي لــ $\vec{F}$ و $\overrightarrow{AB}$) و نكتب:

$$\vec{W} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad W = F.AB.\cos\alpha$$

لنبرهن الآن عن المعادلة (2.2) كما وعدنا:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \;;\; \vec{V}^2 = \vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^2 + 2\vec{V}_1\vec{V}_2 \;;\; \vec{V}_1^{\,2} = \vec{V}_1.\vec{V}_1 = V_1V_1\cos(\vec{V}_1\vec{V}_1) = V_1^2;$$
$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2) \Rightarrow V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2)}$$

العبارة التحليلية للجداء السلمي: (expression analytique du produit scalaire)

ليكن $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ شعاعين في مستوي، حيث: $\vec{V}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} \;;\; \vec{V}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ في المعلم $\Re(O;\vec{i},\vec{j})$:

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \left(x_1.\vec{i} + y_1.\vec{j}\right).(x_2.\vec{i} + y_2.\vec{j}) = x_1.x_2.\vec{i}.\vec{i} + x_1.y_2.\vec{i}.\vec{j} + x_2.y_1.\vec{j}.\vec{i} + y_1.y_2.\vec{j}.\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i} \perp \vec{j} \Rightarrow \vec{j}.\vec{i} = \vec{i}.\vec{j} = 0\\ \vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1.x_2 + y_1.y_2.} \qquad \textbf{(14.2)}$$

في الفضاء (dans l'espace)

ليكن $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ شعاعين في المعلم $\Re(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k})$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{0}\\ \vec{i} = \vec{j} = \vec{k} = 1\end{array}} \;\; \text{هما} \;\; \vec{V}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} \;;\; \vec{V}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2} \quad (15.2)$$

مثال5.2: أحسب الزاوية المحصورة بين الشعاعين: $\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{V}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

الحل:

انطلاقا من عبارة الجداء السلمي يمكننا حساب الزاوية المطلوبة: $\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2) = \dfrac{\vec{V}_1.\vec{V}_1}{V_1V_2}$

و منه:

$$\vec{V}_1.\vec{V}_1 = -3+4-3 = -2 \;\; ; \;\; V_1 = \sqrt{9+4+1} = 3.74 \;\; ; \;\; V_2 = \sqrt{1+4+9} = 3.74$$

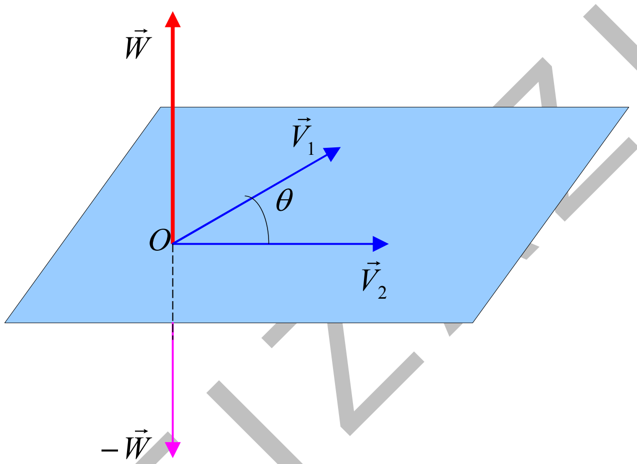
$$\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2) = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}_1}{V_1V_2} = \frac{-2}{14} = -0.143 \Rightarrow \theta = (\vec{V}_1\vec{V}_2) = 96.2°$$

8/الجداء الشعاعي: (produit vectoriel)

تعريف:نسمي الجداء الشعاعي لشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ الشعاع $\vec{W}$ العمودي على المستوي المكون لهما.

نكتب اصطلاحا:

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$$



الشكل 9.2: جداء شعاعين

خصائص الشعاع $\vec{W}$ (propriétés du vecteur):

يكون $\vec{W}$ عموديا على المستوي المشكل من الشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$، اتجاهه يحدد بطريقة اليد اليمنى (الإبهام يشير إلى $\vec{W}$)، أما شدته فتحسب بالقانون:

$$W = |\vec{W}| = V_1.V_2.\sin(\vec{V}_1.\vec{V}_2) \quad (70.4)$$

هـــام:

$$\vec{i}\wedge\vec{i} = \vec{j}\wedge\vec{j} = \vec{k}\wedge\vec{k} = \vec{0}$$
$$\vec{i}\wedge\vec{j} = \vec{k} \; ; \; \vec{i}\wedge\vec{k} = \vec{j} \; ; \; \vec{j}\wedge\vec{k} = \vec{i}$$
$$|\vec{i}\wedge\vec{j}| = |\vec{i}\wedge\vec{k}| = |\vec{j}\wedge\vec{k}| = 1$$

ملاحظة: المقدار $W = |\vec{W}| = V_1.V_2.\sin(\vec{V}_1;\vec{V}_2)$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع : مما يوحي بإمكانية ربط شعاع بمساحة ما.

طريقة أخرى لكتابة الجداء الشعاعي الناتج عن الشعاعين $\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

باستعمال الإحداثيات الديكارتية في المعلم $\Re(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\vec{W}=\begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{W}=(y_1z_2-y_2z_1)\,\vec{i}-(x_1z_2-x_2z_1)\,\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\,\vec{k}$$

وبالتالي فإن الطويلة تحسب بالعبارة:

$$\boxed{W=\sqrt{(y_1z_2-y_2z_1)^2+(x_1z_2-x_2z_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}=V_1.V_2.\sin(\vec{V}_1,\vec{V}_2)} \quad (17.2)$$

مثال 6.2: إحسب الشعاع $\vec{W}$، جداء الشعاعين: $\vec{V}_1=(2,1,-1);\vec{V}_2=(1,0,-2)$، ثم استنتج الزاوية θ بينهما.

الحل:

$$\vec{W}=[(1\times-2)-(0\times-1)].\vec{i}-[(2\times-2)-(1\times-1)].\vec{j}+[(2\times0)-(1\times1)].\vec{k}\Rightarrow\vec{W}=-2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

$$V_1=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$$

$$V_2=\sqrt{1^2+0+2^2}=\sqrt{5}$$

$$W=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}=3,74$$

$$W=V_1.V_2.\sin\theta=3,74\Rightarrow\sin\theta=\frac{W}{V_1.V_2}\Rightarrow\sin\theta=\frac{3,74}{\sqrt{30}}=0,683\Rightarrow\theta=43,06°$$

9/التدرج، التباعد و الدوران: (gradient, divergence, rotationnel)

❖ **تعاريف:**

- نسمي دالة $f(x,y,z)$ حقلا سلميا إذا كانت الدالة $f(x,y,z)$ سلمية.
- بالمثل نسمي دالة $\vec{V}(x,y,z)$ حقلا شعاعيا إذا كانت الدالة $\vec{V}(x,y,z)$ شعاعية.
- نعرف المؤثر (opérateur) الشعاعي التفاضلي $(nabla)\vec{\nabla}$بـــ:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}} \qquad (18.2)$$

حيث $\frac{\partial}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}$ و $\frac{\partial}{\partial z}$ هي المشتقات الجزئية. نعرف التدرج و التباعد و الدوران بواسطة هذا المؤثر.

❖ **التدرج:** (gradient) إذا كانت $f(x,y,z)$ الدالة سلمية فإن تدرجها مقدار شعاعي معرف كالتالي:

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\,f = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}} \qquad (19.2)$$

مثال 7.2: أحسب تدرج الدالة $f(x,y,z) = f = 3x^2y^3z$

الجواب: $\overrightarrow{grad}\,f = 6xy^3z.\vec{i} + 9x^2y^2z.\vec{j} + 3x^2y^3.\vec{k}$

❖ **التباعد:** (divergence) إذا كانت $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ دالة شعاعيه فإن تباعدها مقدار سلمي معرف كالتالي:

❖

$$\boxed{div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}} \qquad (20.2)$$

مثال 8.2: أحسب تباعد الدالة الشعاعية التالية:

$$\vec{V}(x,y,z) = 2xy\vec{i} - 3yz^2\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$$

الجواب:

$$div\vec{V} = 2y - 3z^2 + 0 = 2y - 3z^2$$

❖ **الدوران:** (rotationnel) إذا كان المقدار الشعاعي $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ فإن دورانه هو:

$$\boxed{\overrightarrow{rot(\vec{V})} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right).\vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right).\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right).\vec{k}} \qquad (21.2)$$

للوصول إلى العبارة المبتغاة يستحسن إتباع الخطوات التالية:

ا/ نقيم الجدول التالي:

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = A + B + C$$

ب/ لحساب C, B, A نتبع الطريقة التالية:

$$A = \begin{vmatrix} +\vec{i} & \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_y & V_z \end{vmatrix} = +\vec{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)$$

$$B = \begin{vmatrix} & -\vec{j} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & & V_z \end{vmatrix} = -\vec{j}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)$$

$$C = \begin{vmatrix} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_z \end{vmatrix} = +\vec{k}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)$$

ج/ في النهاية نحصل على المعادلة (21.2):

$$\begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = +\vec{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)$$

مثال 9.2:أحسب دوران الشعاع: $\vec{V}(x,y,z) = 2xy\vec{i} - 3yz^2\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$.

الجواب:

$$\overrightarrow{rot(\vec{V})} = \left(27xy^2 - 6yz\right).\vec{i} - (9y^3 - 0).\vec{j} + (0 - 2x).\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot(\vec{V})} = \left(27xy^2 - 6yz\right).\vec{i} - 9y^3\vec{j} - 2x\vec{k}$$

10/الابلاسيان(le laplacien)

❖ **تعريف:**

❖ **في الإحداثيات الكارتيزية:**

– لابلاسيان **دالة سلمية** هو تباعد التدرّج الدالة:

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\left(f\right)=\vec{\nabla}^2(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} \qquad (22.2)$$

– لابلاسيان **دالة شعاعية** هو تباعد التدرّج الدالة:

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\left(\vec{V}\right)=\vec{\nabla}^2(\vec{V})=\frac{\partial^2 \overrightarrow{V_x}}{\partial x^2}\vec{i}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}\vec{j}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\vec{k}} \qquad (23.2)$$

III/الأنظمة الرئيسية للإحداثيات
PRINCIPAUX SYSTEMES DE COORDONNEES

لتحديد الموضع اللحظي لنقطة مادية يجب تعيين معلم ملائم من بين المعالم المختلفة و الشائعة:

1/المعالم العطالية أو الغليلية: (repères d'inertie ou galiléens)

(نسبة إلى الفلكي الإيطالي غليلي 1564-1642):

لتحديد موقع أي متحرك في الفضاء نختار أولا جسما صلبا مرجعيا(نسميه المرجع) و الذي نشرك له محاور إحداثيات.

❖ **تعريف**: تشكل جملة كل أنظمة محاور إحداثيات مرتبطة بنفس الجسم الصلب S **المرجعي** (référentiel)، **معلما** (repère) مرتبطا بالجسم الصلب S.

مثلا: الطاولة (مرجع) + 3محاور = معلم مرتبط بالطاولة.
الأرض (مرجع) +3 محاور مهما كان مبدؤها المشترك = معلم مرتبط بالأرض.

المعالم الغليلية تتكون من جملة حرة أي أنها في سكون أو في حركة مستقيمة منتظمة.
في مرجع R معرف، نعين موقعا نقطيا M بجملة ثلاث إحداثيات فضائية و إحداثية زمنية، و بالتالي فإن الموضع يتحدد برباعي أعداد حقيقية (X,Y,Z,t) مثلا، و هذا ما يحدد تماما موقع M فضائيا و زمنيا.
إذا رمزنا بـــ $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(x,y,z,t)$ لموضع النقطة M في اللحظة t فإن حركة M في المعلم R تعرّف بالتطبيق $t \mapsto \vec{r}(t)$.

2/أهم المراجع الغليلية:

❖ **معلم كوبرنيك**:(repère de Copernic) (نسبةإلى Copernic (1473-1543))
هذا المعلم معرف بثلاث محاور منطلقة من مركز عطالة المجموعة الشمسية و متجهة نحو ثلاث نجوم ثابتة مختارة بعناية (الشكل 1.3).
يستعمل هذا المعلم لدراسة حركة الكواكب و المركبات الفضائية العابرة للكواكب.
الأرض تدور حول القطب شمال-جنوب خلال يوم واحد و تدور حول الشمس خلال سنة.

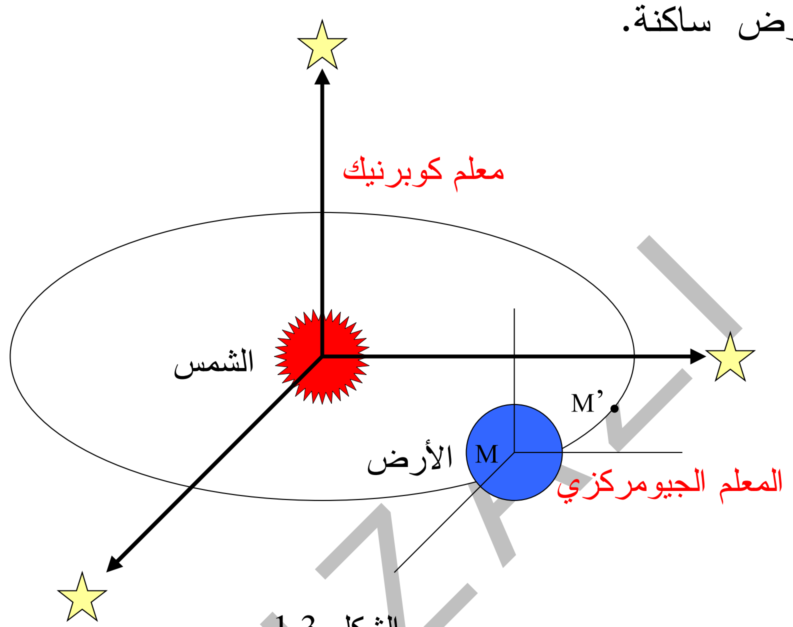
❖ **المعلم الجيومركزي**: (repère géocentrique)
المعلم الجيومركزي معرف بثلاث محاور منطلقة من مركز عطالة الأرض ومتجهة نحو

ثلاث نجوم ثابتة لمعلم كوبرنيك. يستعمل هذا المعلم لدراسة حركة القمر و الأقمار الاصطناعية حول الأرض. الأرض تدور حول نفسها خلال 24ساعة.

❖ **المعلم الأرضي:** (repère terrestre)

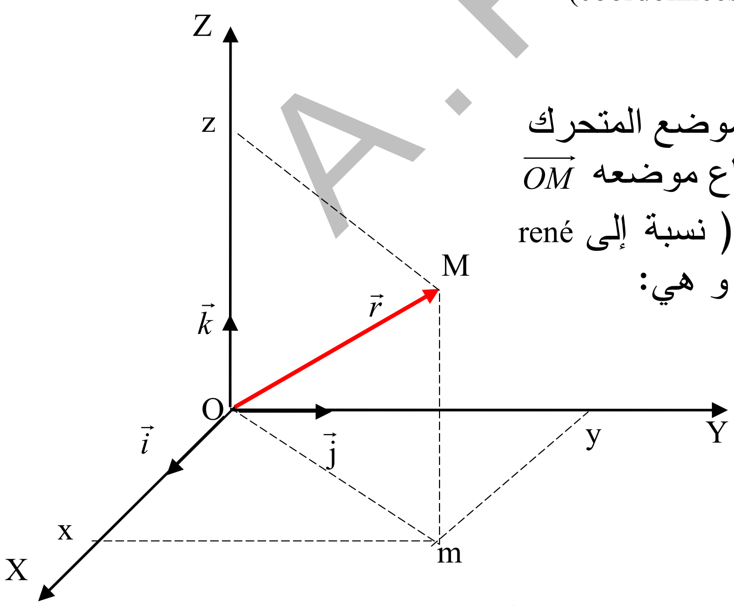
هذا المعلم معرف بثلاث محاور منطلقة من أي نقطة من الأرض و هي متعامدة.

يستعمل هذا المعلم لدراسة الأجسام المتحركة المرتبطة بالأرض. في هذا المعلم الأرض ساكنة.



الشكل 1.3

3/ الإحداثيات الكارتيزية:(coordonnées cartésiennes)



الشكل 2.3: الإحداثيات الكارتيزية

ا/ **المعلم الفضائي:** (repère spatial)

إذا كانت الحركة فضائية، يمكن تحديد موضع المتحرك النقطي M في المعلم $R(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بشعاع موضعه $\overrightarrow{OM}$ أو بإحداثياته الكارتيزية أوالديكارتية (نسبة إلى René Descartes :1596-1650) أو المستطيلة و هي:

x: الفاصلة (abscisse)

y: الترتيب (ordonnée)

z: العلو(altitude)

يمكن كتابة شعاع موضع M بالشكل:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}} \quad (1.3)$$

ب/ المعلم المستوي:(repère plan)

إذا كانت الحركة مستوية، يمكن تحديد موضع المتحرك النقطي M في المعلم $R(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل 3.3) بإحداثيتيه x و y أو بشعاع موضعه $\overrightarrow{OM}$:

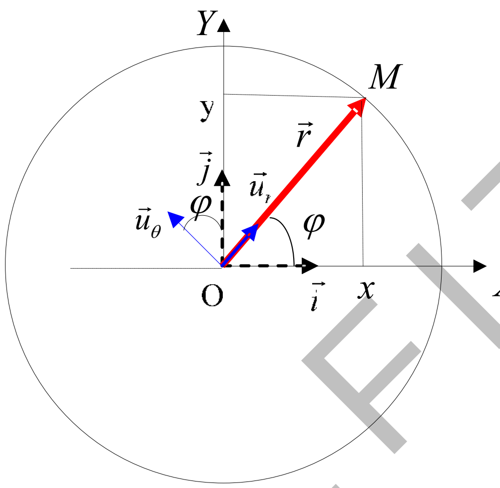
$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + \vec{y}.j} \qquad (2.3)$$

حيث: x: الفاصلة و y : الترتيب

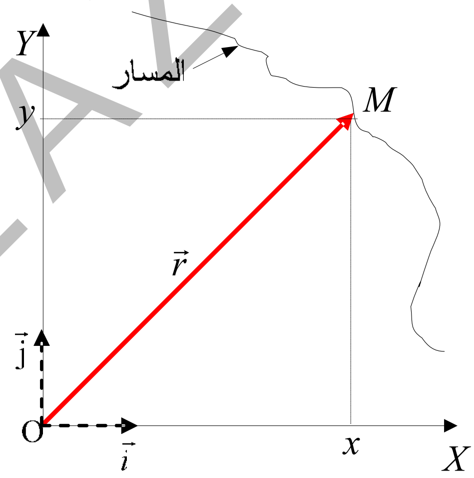
ج/ المعلم المستقيم: (repère rectiligne)

إذا كانت الحركة مستقيمة يمكن الاكتفاء بالمحور OX حيث نكتب :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i}} \qquad (3.3)$$



الشكل 4.3: الإحداثيات القطبية



الشكل 3.3: الإحداثيات المستطيلة

4/الإحداثيات القطبية(coordonnées polaires)

حين ينتمي المسار إلى مستو، هنا كذلك، يمكن تعيين الموضع اللحظي للمتحرك M بالإحداثيتين القطبيتين (r,φ). (الشكل 4.3).

r: نصف القطر القطبي (rayon polaire) و φ: الزاوية القطبية (angle polaire)

حيث يمكننا كتابة شعاع الموضع بالشكل:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r} \qquad (4.3)$$

بمثل ما حصلنا على العلاقة (8.2) يمكن كتابة:

$$\boxed{\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi} \quad و \quad \boxed{\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi}$$

و عليه يمكن كتابة شعاع الموضع في الإحداثيات القطبية على الشكل:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_r.\vec{u}_r + A_\varphi.\vec{u}_\varphi} \tag{5.3}$$

حيث: (A_r, A_φ) هما مركباتا $\overrightarrow{OM}$ في القاعدة $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$

العلاقة بين الإحداثيات المستطيلة و الإحداثيات القطبية هي:

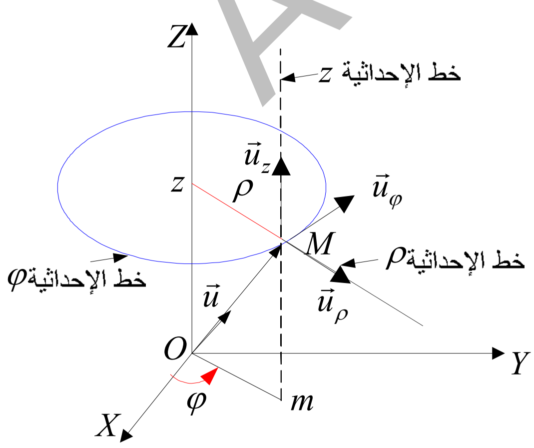
$$\boxed{\begin{array}{ll} x = r.\cos\theta & \varphi = arccos\, x/r \\ y = r.\sin\theta & \varphi = \arcsin y/r \end{array}} \tag{6.3}$$

5/ الإحداثيات الأسطوانية: (coordonnées cylindriques)

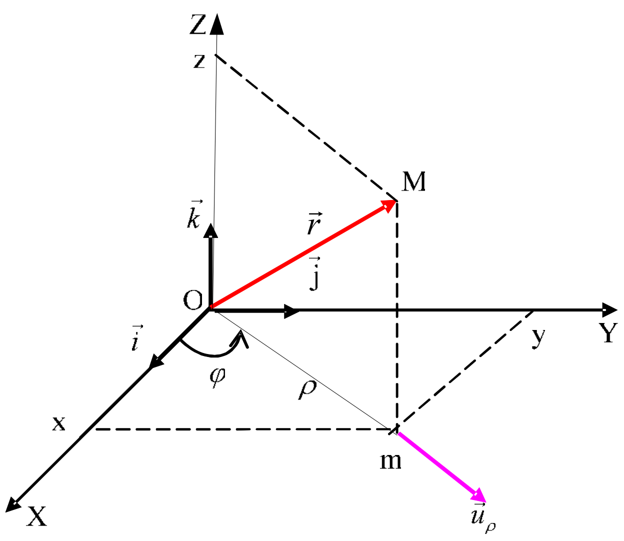
إذا كان المسار فضائيا حيث ρ و oz تلعبان دورا مميزا في تحديد موضع المتحرك، يستحسن استعمال الإحداثيات الأسطوانية (ρ, φ, z) حيث:

ρ : نصف القطر القطبي (rayon polaire)، φ: الزاوية القطبية (om,ox) (angle polaire)

z : العلو (altitude)



الشكل 6.3: قاعدة الإحداثيات الأسطوانية



الشكل 5.3: الإحداثيات الأسطوانية

نتحقق من صحة الكتابة التالية: $\overrightarrow{OM}=\vec{r}=\overrightarrow{Om}+\overrightarrow{mM}=r.\vec{u}$

$$\boxed{\vec{r}=\rho.\vec{u}_\rho+z.\vec{k}} \qquad (7.3)$$

من الشكل 5.3 نتحقق أن:

$$\boxed{\vec{u}_\rho=\vec{i}.\cos\varphi+\vec{j}.\sin\varphi} \qquad (8.3)$$

حذار من الخلط بين $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_r$. يمكننا الآن كتابة عبارة شعاع الموضع بالشكل:

$$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{OM}=\vec{r}=\vec{i}.\rho.\cos\varphi+\vec{j}.\rho\sin\varphi+\vec{k}.z\\ \overrightarrow{OM}=\vec{r}=\vec{i}.x+\vec{j}.y+\vec{k}.z\end{array}} \qquad (9.3)$$

كما يمكن تحويل عبارة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ إلى الإحداثيات الأسطوانية حيث يكون على الشكل:

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\vec{r}=A_\rho.\vec{u}_\rho+A_\varphi.\vec{u}_\varphi+A_z.\vec{u}_z} \qquad (10.3)$$

حيث: $(A_\rho,A_\varphi,A_z=z)$ هي مركبات $\overrightarrow{OM}$ في القاعدة $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z=\vec{k})$. للحصول على عبارة شعاع الواحدة $\vec{u}_\varphi$ يكفي التنبه أن القاعدة $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z=\vec{k})$ متعامدة و عليه فإن $\vec{u}_\varphi$ هو الجداء الشعاعي بين $\vec{u}_z$ و $\vec{u}_\rho$. إذن:

$$\boxed{\vec{u}_\varphi=\vec{u}_z\wedge\vec{u}_\rho=-\vec{i}.\sin\varphi+\vec{j}.\cos\varphi} \qquad (11.3)$$

بمطابقة العبارتين في (7.3) نستنتج العلاقة بين الإحداثيات الكارتيزية و الإحداثيات الأسطوانية:

$$\boxed{\begin{array}{l|c|l}x=\rho\cos\varphi & & \rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ y=\rho\sin\varphi & \Rightarrow & \varphi=arctgy/x\\ z=z & & \varphi=\arccos x/\rho=\arcsin y/\rho\end{array}} \qquad (12.3)$$

<u>ملاحظة</u>: إذا كان $z=0$ نتعرف على الإحداثيات القطبية.

<u>6/ الإحداثيات الكروية</u> : (coordonnées sphériques)

لما تقوم النقطة O و البعد عن O بدور مميز، فإن استعمال الإحداثيات الكروية (φ ، θ ، r) يصبح المفضل: حيث:

r: نصف القطر القطبي(rayon polaire)، θ: سمت، (azimut)، φ: تمام العرض (coaltitude).

نتحقق هندسيا من العلاقات بين الإحداثيات الكارتيزية و الإحداثيات الكروية :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho = r\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (13.3)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos z/r \\ \varphi = arctg\, y/x \end{cases} \qquad (14.3)$$

أما العلاقة بين الإحداثيات الكروية و الإحداثيات الأسطوانية فهي:

$$\begin{cases} \rho = r\sin\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \varphi = \varphi \\ \theta = arctg\, \rho/z \end{cases} \qquad (15.3)$$

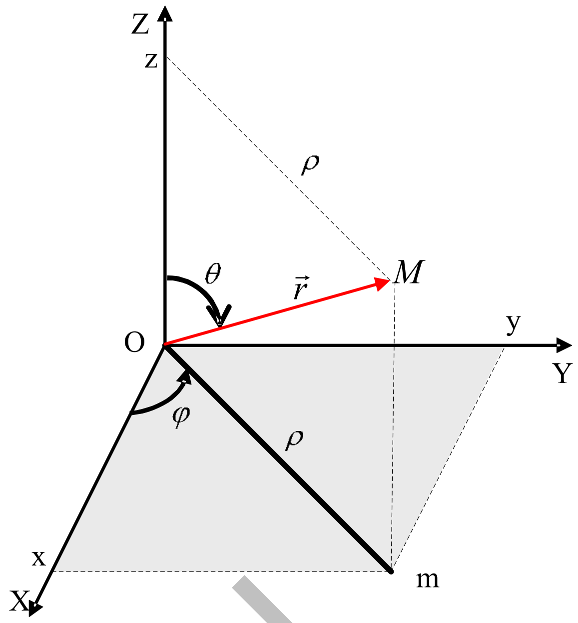
نكتب شعاع الموضع في الإحداثيات الديكارتية: $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$
أما في الإحداثيات الكروية فيكتب على الشكل:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_r.\vec{u}_r + A_\varphi.\vec{u}_\varphi + A_\theta.\vec{u}_\theta \qquad (16.3)$$

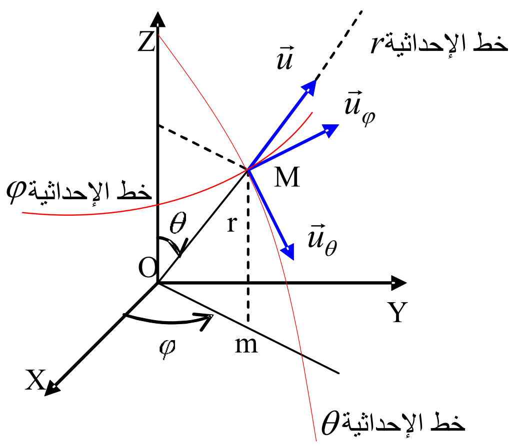
حيث: $(A_r, A_\varphi, A_\theta)$ هي مركبات $\overrightarrow{OM}$ في القاعدة $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta)$

ملاحظة: لتغطية كل الفراغ بالإحداثيات الكروية، نقبل تغير:

r من 0 إلى∞ ، θ من 0 إلى π 2 ، φ من 0 إلى π .



الشكل 7.3: الإحداثيات الكروية



الشكل 8.3 قاعدة الإحداثيات الكروية

عبارات أشعة الواحدة:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r} = r.\vec{u}_r = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} \\ \overrightarrow{Om} = \rho.\vec{u}_\rho = \rho\left[\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right] \\ \overrightarrow{mM} = z.\vec{k} = \vec{k}.r\cos\theta. \\ \rho = r.\sin\theta\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\varphi.\sin\theta + \vec{j}.\sin\varphi.\sin\theta + \vec{k}.\cos\theta} \qquad (17.3)$$

$$\boxed{\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi}$$

بما أن القاعدة $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta)$ متعامدة فإن شعاع الواحدة $\vec{u}_\theta$ هو حاصل الجداء الشعاعي بين $\vec{u}_\varphi$ و $\vec{u}$:

$$\boxed{\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta} \qquad (18.4)$$

7/ الإحداثيات المنحنية: (coordonnées curvilignes)

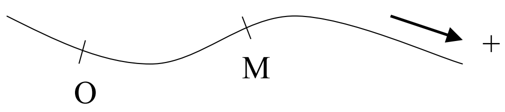
يمكن لنا تحديد موضع المتحرك على المسار نفسه بما نسميه الفاصلةالمنحنية (abscisse curviligne):

– نوجه المسار اعتباطا

– نختار نقطة ثابتة O على المسار.

تعرّف الإحداثية المنحنية بأنها المقدار الجبري s للقوس المنتمي للمسار من O إلى M:

$$\boxed{\overset{\frown}{OM} = s} \qquad (19.4)$$



الشكل 9.3:معلم الإحداثيات المنحنية

IV /علـــم الـــحـــركـــيـــات
CINEMATIQUE

A-IV/مميزات الحركة
CARACTERISTIQUES DU MOUVEMENT

1/ تعريفان:

- علم الحركة أو حركيات النقطة المادية هي دراسة الحركة دون التعرض إلى المسببات (كالقوى مثلا.....).
- النقطة المادية هي كل جسم مادي يمكن اعتبار أبعاده معدومة نظريا و مهملة عمليا مقارنة بالمسافة المقطوعة.

2/ تمهيد:

الحركة و السكون مفهومان نسبيان: فالجبل ساكن بالنسبة للأرض و لكنه متحرك بالنسبة لمراقب بعيد عن الأرض و الذي يرى الكرة الأرضية و كل ما عليها في حركة.

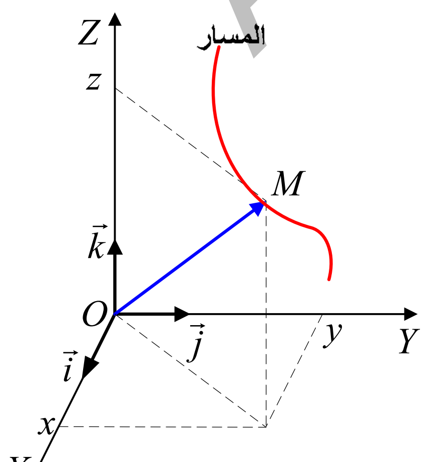
يجب على الدارس لأي حركة تعيين نظام مرجعي (معلم) و الذي تحلل الحركة بالنسبة له. تتم هذه الدراسة على أحد الشكلين:

- شعاعي : باستخدام أشعة الموضع $\overrightarrow{OM}$، السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{a}$
- جبري : بتحديد معادلة الحركة وفق مسار معيّن.

3/ موضع المتحرك:(position du mobile)

❖ شعاع الموضع:(vecteur position)

يعرف موضع نقطة مادية M في اللحظة t، في معلم فضائي كارتيزي $R(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (الشكل 1.4) بشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$:



الشكل 1.4: شعاع الموضع

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}} \qquad (1.4)$$

❖ **المعادلات الزمنية**:(équation horaire)

تكون النقطة M في سكون (repos) إذا كانت الإحداثيات x, y, z مستقلة عن الزمن،و تكون في حركة (mouvement) إذا أصبحت هذه الإحداثيات توابع للزمن. ونرمز لها بـــ:

$$\boxed{x(t), y(t), z(t)} \qquad (2.4)$$

نسمي هذه الدوال المعادلات الزمنية للحركة و يمكن التعبير عنها بالشكل:

$$\boxed{x = f(t), y = g(t), z = h(t)} \qquad (3.4)$$

❖ **المسار**:(trajectoire)

مسار نقطة مادية هو مجموع المواضع المتتالية التي احتلتها خلال أزمنة متعاقبة.
يمكن للمسار أن يكون ماديا (الطريق) أو وهميا (مسار القمر).
دراسة الحركة المستوية تتم بالإحداثيات المستطيلة في المعلم $R(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث يصبح الموضع معرف بإحداثيتين هما: $x(t), y(t)$.

الدالة $x \mapsto y(x)$ تسمى **المعادلة الكارتيزية للمسار**.(équation cartésienne de la trajectoire)

نحصل على معادلة المسار بحذف الزمن ما بين المعادلتين الزمنيتين.

مثال 1.4: المعادلات الزمنية لحركة نقطة مادية قذفت في الفضاء هي:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -5t^2 + 4t \end{cases}$$

(كل الوحدات في الجملة الدولية).
1/أوجد المعادلة الكارتيزية للمسار، ما شكله؟
2/ أكتب عبارة شعاع الموضع في اللحظة $t = 2s$.

الجواب: 1/ نستخرج الزمن بدلالة x ثم نعوض في عبارة z فنحصل على معادلة المسار و هو عبارة عن قطع مكافئ.

$$x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$$

$$z = -1.25.x^2 + 2.x$$

2/عبارة شعاع الموضع:

$$\overrightarrow{OM} = (2t).\vec{i} + (-5t^2 + 4t).\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OM}_{(t=2)} = 4\vec{i} - 12\vec{k}$$

مثال 2.4: إذا كانت حركة نقطة مادية معرفة في المعلم الديكارتي بالمعادلتين الزمنيتين:

$$x = a\sin(\omega t + \varphi)$$
$$y = a\cos(\omega t + \varphi)$$

فما هو شكل المسار المتبع؟

الجواب: نربع المعادلتين ثم نجمعهما طرف لطرف فنحصل على معادلة دائرة نصف قطرها a:

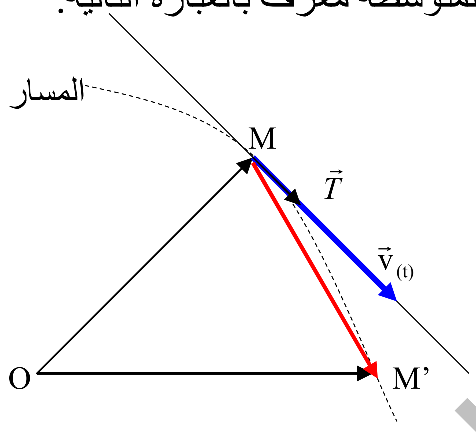
$$\left.\begin{array}{l} x^2 = a^2 \sin^2(\omega.t+\varphi) \\ y^2 = a^2 \cos^2(\omega.t+\varphi) \end{array}\right| \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

4 / شعاع السرعة: (vecteur vitesse)

نعتبر أن السرعة هي المسافة المقطوعة خلال وحدة الزمن.

❖ شعاع السرعة المتوسطة: (vecteur vitesse moyenne)

نلاحظ الشكل 2.4 : بين اللحظة t التي يشغل فيها المتحرك الموضع M و اللحظة t' التي يشغل فيها المتحرك الموضع M' فإن شعاع السرعة المتوسطة معرف بالعبارة التالية:



الشكل 2.4

$$\boxed{\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} \quad ; \quad v_{moy} = \frac{\left|\overrightarrow{MM'}\right|}{\Delta t}} \qquad (4.4)$$

$\overrightarrow{MM'}$ يسمى شعاع الإنتقال.

❖ شعاع السرعة اللحظية:(vecteur vitesse instantanée)

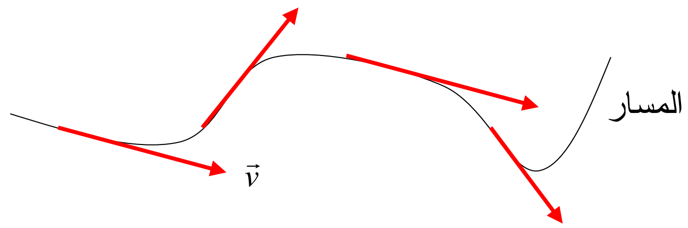
يعرف شعاع السرعة اللحظية لنقطة مادية أي شعاع السرعة في اللحظة t أنه **مشتقة** (dérivée) شعاع الموضع بالنسبة للزمن:

$$\vec{v}_t = \lim_{t\to t'} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{t-t'} = \lim_{t'\to t} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad \boxed{\vec{v}_t = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}} \qquad (5.4)$$

هام: شعاع السرعة $\vec{v}_{(t)}$ يحمله المماس للمسار في النقطة M و موجه دائما نحو اتجاه الحركة (الشكل 3.4).

في المعلم الكرتيزي نستنتج العبارة الشعاعية للسرعة من العبارة الشعاعية للموضع وذلك بعملية اشتقاق:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k}} \qquad (6.4)$$



الشكل3.4: شعاع السرعة اللحظية

مصطلحات(conventions)

- **ترميز نيوتن**(Newton): نرمز إلى المشتقة بالنسبة للزمن بوضع نقطة على الحرف الذي يرمز إلى المتغير. أما إذا كانت المشتقة بالنسبة لأي متغير آخر فإن الرمز هو وضع العلامة ' بعد الحرف الذي يرمز إلى المتغير.
- **ترميز ليبنيتز** (Leibnitz): نرمز إلى مشتقة المتغير y بالنسبة للزمن بـــ: $\frac{dy}{dt}$. و هكذا

يمكننا أن نكتب: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}; \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}; \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}$

شدة شعاع السرعة اللحظية: (module du vecteur vitesse instantanée)

$$\boxed{v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \qquad (7.4)$$

وحدة السرعة في الجملة الدولية MKS هي: $m/s = m.s^{-1}$

إحداثيات الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\vec{v}$:

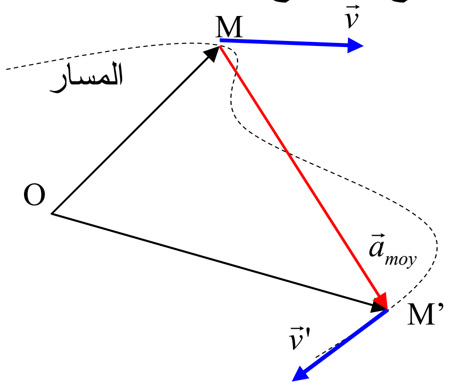
$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R \rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \end{pmatrix}_R$$

5/ شعاع التسارع: (vecteur accélération)

نعتبر التسارع مقدار تغير السرعة خلال واحدة الزمن.

شعاع التسارع المتوسط: (vecteur accélération moyenne)

إذا اعتبرنا لحظتين مختلفتين t و t' المناسبتين لشعاعي الموضع $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ و شعاعي السرعة اللحظية $\vec{v}$ و $\vec{v}'$ (الشكل 4.4) فإن شعاع التسارع المتوسط معرف بالعبارة:



$$\boxed{\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}; \quad a_{moy} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}} \qquad (8.4)$$

الشكل 4.4

❖ **شعاع التسارع اللحظي:** (vecteur accélération instantanée)

شعاع التسارع اللحظي لحركة ما يعرّف أنه مشتقة (dérivée) شعاع السرعة اللحظية بالنسبة للزمن:

$$\vec{a} = \lim_{t'\to t}\frac{\vec{v}'-\vec{v}}{t'-t} = \lim_{t'\to t}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \qquad \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}} \qquad (9.4)$$

يمكن الآن كتابة العبارة الجامعة للعلاقات بين مختلف الأشعة المميزة للحركة بترميزي كل من نيوتن و ليبنيتز:

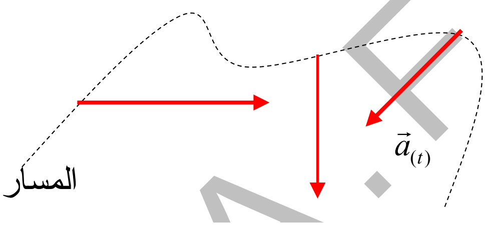
$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = \ddot{x}.i + \ddot{y}.\vec{j} + \ddot{z}.\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{k}} \quad (10.4)$$

هام: يكون شعاع التسارع موجها دائما نحو تقعر المسار (الشكل 5.4).

طويلة شعاع التسارع اللحظي:(module du vecteur accélération instantanée)

تحسب شدة أو طويلة شعاع التسارع بواسطة العبارة التالية:



الشكل 5.4: شعاع التسارع

$$\boxed{a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}} \qquad (11.4)$$

الخلاصة: في معلم ديكارتي يمكن كتابة:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R \to \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \end{pmatrix}_R \to \vec{a}\begin{pmatrix} \ddot{x} = \dot{v}_x = a_x \\ \ddot{y} = \dot{v}_y = a_y \\ \ddot{z} = \dot{v}_z = a_z \end{pmatrix}_R \qquad (12.4)$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \to \vec{v} = v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j} + v_z.\vec{k} \to \vec{a} = a_x.\vec{i} + a_y.\vec{j} + a_z.\vec{k}$$

تنبيه: تكون الحركة **متسارعة** إذا كان $\vec{a}.\vec{v} \succ \vec{0}$ و تكون **متباطئة** إذا كان $\vec{a}.\vec{v} \prec \vec{0}$. أمّا اتجاه الحركة فيدلّ عليه اتجاه شعاع السرعة $\vec{v}$.

مثال3.4: إذا كان شعاع الموضع هو $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x = 2t^2 \\ y = 4t - 5 \\ z = t^3 \end{pmatrix}$. إستنتج شعاع السرعة و شعاع التسارع اللحظيين ثم أحسب شدة كل منهما.

الجواب: نقوم بعمليتي اشتقاق متتاليتين فنصل إلى النتيجتين:

$$\vec{v} = 4t.\vec{i} + 4\vec{j} + 3t^2\vec{k} \rightarrow \quad \vec{a} = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 6t\vec{k}$$

$$v = \sqrt{16t^2 + 16 + 9t^4} \quad ; \quad a = \sqrt{16 + 36t^2}$$

B-IV/ الحركات المستقيمة
MOUVEMENTS RECTILIGNES

1/الحركة المستقيمة المنتظمة: (mouvement rectiligne uniforme)

تعريف: تكون نقطة مادية في حركة مستقيمة منتظمة إذا كان مسارها مستقيما و شعاع سرعتها ثابتا و بالتالي فإن شعاع تسارعها معدوم.

❖ **المعادلة الزمنية**: نختار المحور OX كمعلم، و نحدد الشرط الابتدائي:

$$t = 0 \;;\; x = x_0$$

انطلاقا من تعريف السرعة و بعملية تكاملية نصل إلى عبارة الفاصلة x بدلالة الزمن:

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow dx = v_0.dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0.dt$$

$$x\Big|_{x_0}^{x} = v_0 t\Big|_0^t \quad \Rightarrow x\text{-}x_0 = v_0 t$$

في آخر خطوة نحصل على المعادلة الزمنية و هي من الدرجة الأولى بالنسبة للزمن:

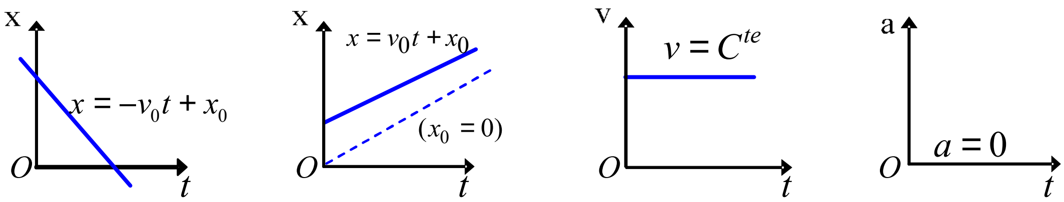
$$\boxed{x = v_0.t + x_0} \qquad (13.4)$$

نسمي x الفاصلة اللحظية بينما x_0 الفاصلة الابتدائية.

الشكل 6.4: معلم الحركة

❖ **مخططات الحركة**:(diagrammes du mouvement)

مخططات الحركة هي التمثيل البياني لكل من التسارع السرعة و الإنتقال بدلالة الزمن (الشكل 7.4).



الشكل 7.4: مخططات الحركة

مثال4.4: المعادلات الزمنية لحركة نقطة مادية هي: $x = 2t; y = 2t + 4; z = 0$ (كل الوحدات في الجملة الولية). برهن أن الحركة مستقيمة منتظمة.

تنبيه: $z = 0 \Leftarrow$ الحركة مستوية. إذا كان $y = 0; z = 0 \Leftarrow$ الحركة خطية.

إذا كان $z \neq 0; y \neq 0; x \neq 0 \Leftarrow$ الحركة فضائية.

الحل: نبرهن أولا أن الحركة مستقيمة؛ من أجل ذلك نبحث عن معادلة المسار فنجد:

$y = x + 4 \Leftarrow$ معادلة مستقيم، إذن الحركة مستقيمة.

حتى تكون الحركة منتظمة لابد أن تكون السرعة ثابتة: نكتب شعاع السرعة باشتقاق شعاع الموضع ثم نحسب شدة السرعة:

$\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow v = \sqrt{2^2 + 2^2} \Rightarrow v = \sqrt{8} = 2.83 ms^{-1}$ إذن الحركة مستقيمة ومنتظمة.

2/ الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام (mouvement rectiligne uniformément varié)

❖ **تعريف:** تكون حركة نقطة مادية مستقيمة متغيرة بانتظام إذا كان المسار مستقيما و التسارع ثابتا.

❖ **السرعة الجبرية:** باعتبار الشروط الإبتدائية: $t = 0 \; ; \; v = v_0$ و انطلاقا من التعاريف السابقة نكتب: $a = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt \Rightarrow v\Big|_{v_0}^{v} = at\Big|_0^t$

ونحصل في الأخير على معادلة السرعة اللحظية و هي من الدرجة الأولى للزمن:

$$\boxed{v = v_0 .t + v_0} \qquad (14.4)$$

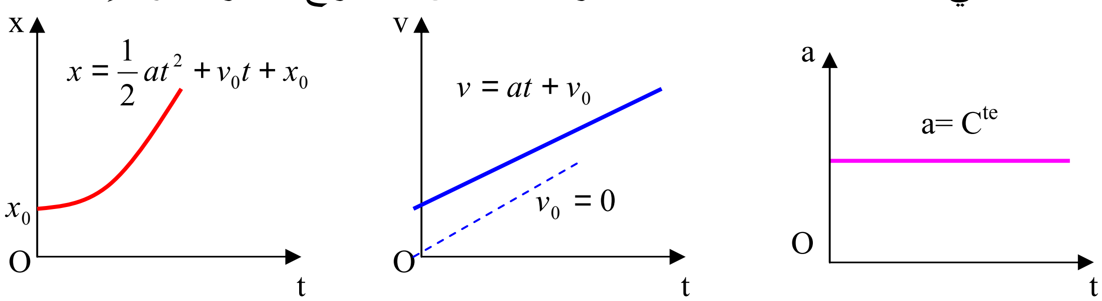
❖ **المعادلة الزمنية للحركة:** إذا أخذنا في $t = 0 \; ; \; x = x_0$ و انطلاقا مما سبق نكتب: $v = \dfrac{dx}{dt} = at + v_0 \Rightarrow dx = (at + v_0)dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (at + v_0)dt$

ومنه فإن المعادلة الزمنية هي:

$$\boxed{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0} \qquad (15.4)$$

❖ **مخططات الحركة:**

نلاحظ في الشكل 8.4 مخططات الحركة لكل من التسارع السرعة و الإنتقال.



الشكل 8.4: مخططات الحركة

يمكن للطالب أن يبرهن أن: $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

✓ تذكير: تكون الحركة مستقيمة متسارعة (accéléré) بانتظام إذا كان $\vec{a}.\vec{v} > \vec{0}$

تكون الحركة مستقيمة متباطئة (retardé) بانتظام إذا كان $\vec{a}.\vec{v} < \vec{0}$

مثال 5.4: يتحرك جسم وفق المحور OX بسرعة معادلتها: $v = 2t - 6 \quad (ms^{-1})\,; t \geq 0$

ا/إستنتج معادلة التسارع و المعادلة الزمنية لهذه الحركة علما أن في $t = 0 \;, x = 5ms^{-1}$. ما طبيعة الحركة ؟

ب/ بين الأطوار (متسارعة و متباطئة) للحركة.

الحل: ا/ نحصل على معادلة التسارع باشتقاق عبارة السرعة: $a = \dfrac{dv}{dt} = 2ms^{-2}$ و هو ثابت.

المعادلة الزمنية للحركة نتوصل إليها بتكامل عبارة السرعة:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t v dt \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t (2t-6) \Bigg| \Rightarrow \boxed{x = t^2 - 6t + 5}$$

$$x = x_0 + t^2 - 6t \;;\; t = 0 \;,\; x = 5 \Rightarrow x_0 = 5$$

ب/أطوار الحركة: نقيم جدولا للتغيرات:

t	0	1	3	5	∞
v		-	0	+	
a		+		+	
x	↘	0	-4	0	↗
av		-	0	+	
	الحركة متباطئة		*	الحركة متسارعة	

جدول التغيرات 1.4

3/ الحركة المستقيمة متغيرة التسارع: (mouvement rectiligne à accélération variable)

❖ **تعريف:** تكون حركة نقطة مادية مستقيمة و متغيرة التسارع إذا كان المسار مستقيما و التسارع تابعا للزمن $\left(a = f(t)\right)$

مثال6.4:

ينتقل جسم وفق مستقيم بتسارع: $a = 4 - t^2$ (كل الوحدات في الجملة الدولية MKS).

أوجد عبارتي السرعة و الإنتقال بدلالة الزمن متخذا الشروط التالية:

$$t = 3s\,; \quad v = 2ms^{-1} \quad ; x = 9m$$

الجواب:

للحصول على العبارة الحرفية للسرعة نكامل عبارة التسارع:

$$v = \int_0^t a dt + v_0 \Rightarrow v = v_0 + \int_0^t (4 - t^2) dt$$

$$v = 4t - \frac{1}{3}t^3 + v_0$$

نكامل من جديد لنحصل على العبارة الحرفية للانتقال:

$$x = x_0 + \int_0^t v dt \quad \Rightarrow x = -\frac{1}{12}t^4 + 2t^2 - v_0 t + x_0$$

بقي لنا الآن تحديد كل من الفاصلة x_0 و السرعة v_0 الابتدائيتين للنقطة. حسب المعطيات، نعوض في العبارتين المتوصل إليهما الزمن بالقيمة $t = 3s$:

$$t = 3s \Rightarrow x_0 = \frac{3}{4}m \quad ; \quad v_0 = -1ms^{-1}$$

في الأخير نكتب عبارتي السرعة و الإنتقال اللحظيين:

$$\boxed{x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t + \frac{3}{4}} \qquad \boxed{v = 4t - \frac{1}{3}t^3 - 1}$$

4/ الحركة المستقيمة الجيبية: (mouvement rectiligne sinusoïdal)

❖ **تعريف:** تكون الحركة مستقيمة جيبية لنقطة مادية إذا أمكن كتابة المعادلة الزمنية لحركتها بالشكل:

$$\boxed{x = X_m.\cos(\omega.t + \varphi)} \qquad (16.4)$$

أو حتى: $x = X_m.\sin(\omega.t + \alpha)$

x : الفاصلة أو المطال اللحظي ، (élongation ou abscisse instantanée)

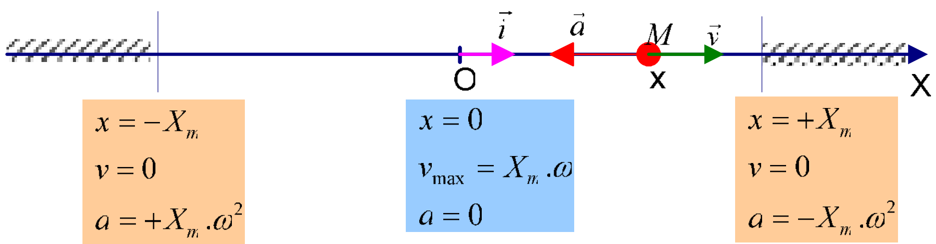
X_m : السعة أو المطال الأعظمي (amplitude ou élongation maximale): يتغير المطال بين قيمتين حديتين:

$$-X_m \leq x \leq +X_m \Leftarrow -1 \leq \cos(\omega t + \varphi) \leq +1$$

ω : نبض الحركة(pulsation du mouvement) ،

φ: الطور الإبتدائي أو الصفحة الإبتدائية(phase initiale) ،

(ωt+φ) : الطور اللحظي أو الصفحة اللحظية(phase instantanée) .



الشكل 9.4

السرعة: نشتق المادلة الزمنية: $v = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$

$$\boxed{v = -X_m.\omega \sin(\omega t + \varphi)} \qquad (17.4)$$

تتغير هذه السرعة بين قيمتين حديتين:

$$-X_m.\omega \le v \le +X_m.\omega \Leftarrow -1 \le \sin(\omega t + \varphi) \le +1$$

❖ **التسارع:** نشتق معالة السرعة: $a = \ddot{x} = \dot{v} = \dfrac{dv}{dt}$

$$\boxed{a = -X_m \omega^2 \cos(\omega.t + \varphi)} \qquad (18.4)$$

يتغير هذه التسارع بين قيمتين حديتين:

$$+X_m \omega^2 \ge a \ge -X_m \omega^2$$

يمكن كتابة عبارة التسارع على النحو التالي:

$$\boxed{a = -\omega^2.x} \qquad (19.4)$$

التسارع يتناسب طردا مع المطال و يعاكسه في الإتجاه.
عكس السرعة، ينعدم التسارع عند مرور المتحرك من موضع التوازن (مبدأ الفواصل) و يكون أعظميا عند بلوغ المتحرك مطاله الأعظمي.

❖ **المعادلة التفاضلية للحركة**(équation différentielle du mouvement)
انطلاقا من معادلة التسارع يمكن كتابة:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.x = 0} \qquad (20.4)$$

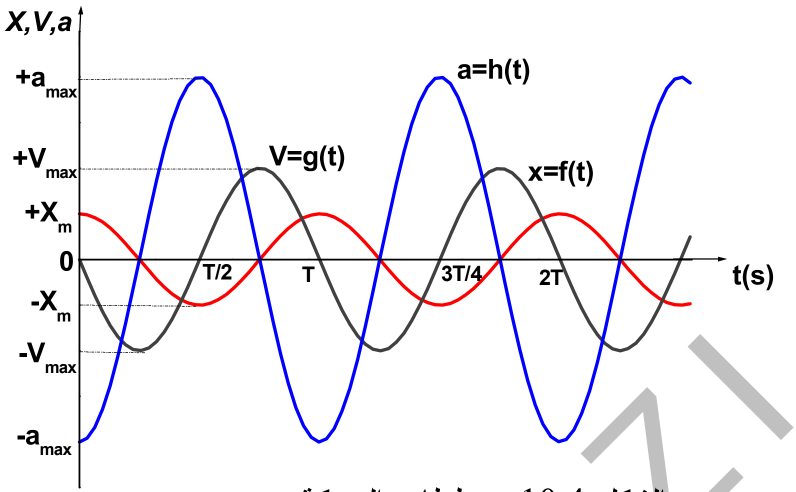
$$a = \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2.x = 0$$

رياضيا حل هذه المعادلة التفاضلية هو من الشكل $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$، والذي بفضل التحويلات المثلثية يمكن كتابته على الشكل: $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$
يحدد ثابتا التفاضل X_m و φ بمعرفة الشروط الإبتدائية لكل من المطال x_0 و السرعة v_0 الابتدائيتين؛ حيث نحصل على جملة معادلتين ذات مجهولين تسمح لنا بتعيين X_m و φ.

$$t=0 \rightarrow \begin{vmatrix} x_0 = X_m \cos\varphi \\ v_0 = -X_m \sin\varphi \end{vmatrix}$$

❖ مخططات الحركة:

يمثل الشكل 10.4 مخططات كل من الإنتقال ، السرعة ، و التسارع للحركة المستقيمة الجيبية (للتبسيط اخترنا $\varphi = 0$).



الشكل 10.4:مخططات الحركة

مثال7.4: هزاز جيبي ممثل بالمعادلة: $x = 4\sin(0.1t + 0.5)$ (كل المقادير معبر عنها في وحدات MKS).

أوجد : ا/ السعة، الدور، التواتر و الصفحة الإبتدائية للحركة.

ب/ السرعة و التسارع.

ج/ الشروط الإبتدائية.

د/ الموضع، السرعة و التسارع في $t = 5s$.

هـ/ أرسم مخططات الحركة.

الحل:

ا/ السعة، الدور، التواتر و الصفحة الإبتدائية للحركة:

$$\boxed{X_m = 4m}\ ;\ T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 20\pi = 62.8s};$$

$$N = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{N = 1.59.10^{-2}\,Hz}; \quad \boxed{\varphi = 0.5rad}.$$

ب/ حساب السرعة و التسارع:

$$\boxed{v = 0.4\cos(0.1t + 0.5)}\ ;\ a = -0.04\sin(0.1t + 0.5) = -0.04x \quad \boxed{a = -0.04x}$$

ج/ تحديد الشروط الإبتدائية:

$$t = 0 \Rightarrow x_0 = 4\sin 0.5 = 1.92m \;\Rightarrow \boxed{x_0 = 1.92m} \;;$$

$$v_0 = 0.4\cos 0.5 \approx 0.35ms^{-1} \;\Rightarrow\; \boxed{v_0 = 0.35m}$$

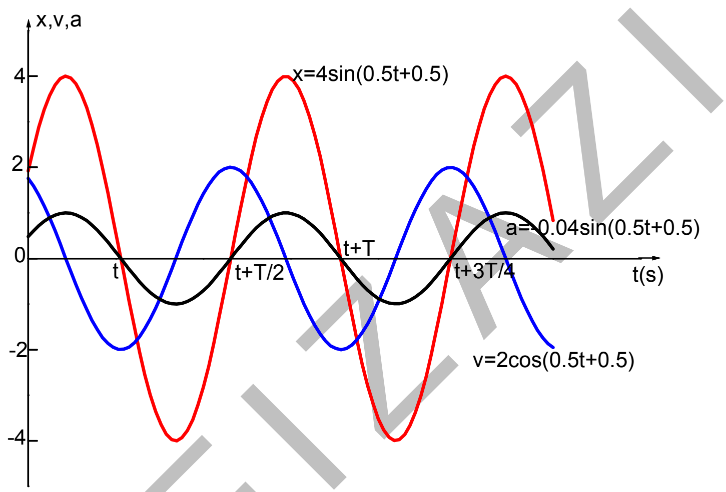
د/ تعيين الموضع، السرعة و التسارع في $t = 5s$:

$$t = 5s : \;\; x = 4sin(0.5 + 0.5) \;\Rightarrow \boxed{x = 3.36m} \;;$$

$$v = 0.4cos1 \Rightarrow \boxed{v = 0.22ms^{-1}} \;;$$

$$a = -0.04sin1 \Rightarrow \boxed{a = 0.034ms^{-2}}.$$

هـ/ مخططات الحركة: ننصح الطالب بالتمرن على القيام بها و عدم الإكتفاء بالنظر إليها.



الشكل 11.4: مخططات الحركة

C-IV /الحركات المستوية
MOUVEMENT DANS LE PLAN

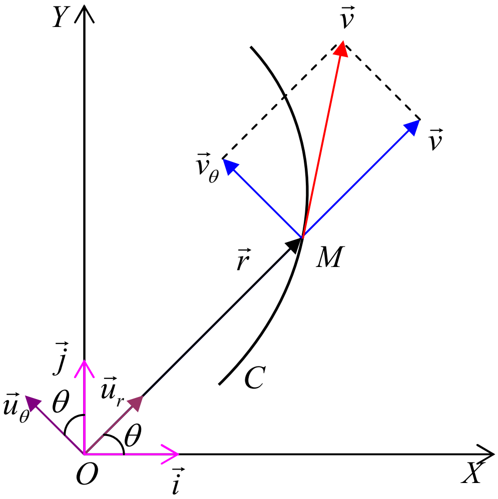
إذا كان المسار منتميا إلى مستو يمكن تحديد موضع المتحرك بواسطة الإحداثيات المستطيلة أو الإحداثيات القطبية.

1/دراسة الحركة بالإحداثيات المنحنية:

❖ **موضع المتحرك:** ليكن M نقطة مادية مسارها المنحني (C).

موضع المتحرك بالإحداثيات الكارتيزية كما سبق و أن رأينا هو:

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}} \qquad (21.4)$$



الشكل12.4:الإحداثيتان القطبيتان للسرعة

أما بالإحداثيات القطبية فهو:

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\vec{r}=r.\vec{u}_r} \qquad (22.4)$$

حيث:

$$\vec{u}_r=\vec{i}.\cos\theta+\vec{j}.\sin\theta$$

و بالتالي:

$$\overrightarrow{OM}=\vec{r}=r(\vec{i}.\cos\theta+\vec{j}.\sin\theta)$$

تنبيه: r و θ تابعان للزمن: $r=f(t)$ و $\theta=g(t)$.

❖ **عبارة السرعة:**

- بالإحداثيات الكارتيزية:

$$\boxed{\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}} \qquad (23.4)$$

- بالإحداثيات القطبية: إستنادا إلى الشكل 12.4 يمكننا كتابة عبارتي شعاعي الوحدة $\vec{u}_r$ و $\vec{u}_\theta$ بدلالة شعاعي الوحدة $\vec{i}$ و $\vec{j}$:

$$\boxed{\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta \qquad \vec{u}_\theta = -\vec{i}.\sin\theta + \vec{j}.\cos\theta} \qquad (24.4)$$

و نحسب مشتقتيهما دون نسيان التنبيه السابق:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\vec{i}.\sin\theta.\frac{d\theta}{dt} + \vec{j}\cos\theta.\frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta.\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{u}_\theta.\frac{d\theta}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{i}.\cos\theta.\frac{d\theta}{dt} - \vec{j}.\sin\theta.\frac{d\theta}{dt} = -\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt}} \qquad (25.4)$$

و نحسب الآن عبارة السرعة بالإحداثيات القطبية:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta} \qquad (26.4)$$

أي أن للسرعة مركبتان عرضية $\vec{v}_\theta$ و قطرية $\vec{v}$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta \\ \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}\vec{v}_r = \dot{r}.\vec{u}_r \\ \vec{v}_\theta = r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta\end{array} \Rightarrow v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r.\dot{\theta})^2}$$

❖ **عبارة التسارع:**

<u>بالإحداثيات المستطيلة</u>: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$

<u>بالإحداثيات القطبية</u>: نشتق العبارة السابقة للسرعة بالنسبة للزمن:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{r}.\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \ddot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \dot{r}.(\vec{u}_\theta.\frac{d\theta}{dt}) + \ddot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.(-\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt}) + r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

بتنظيم هذه العبارة و باستعمال ترميز نيوتن نتوصل إلى العبارة النهائية لشعاع التسارع بالإحداثيات القطبية:

$$\vec{a} = \dot{r}.\vec{u}_\theta.\dot{\theta} + \ddot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.(-\vec{u}_r\dot{\theta}) + r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2).\vec{u}_r + (2\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}).\vec{u}_\theta} \qquad (27.4)$$

نلاحظ أن لهذا التسارع مركبتان $\vec{a}_r$ و $\vec{a}_\theta$:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta} \qquad (28.4)$$

أما شدته فهي:

$$\boxed{a = \sqrt{(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta})^2}} \qquad (29.4)$$

❖ **حالة خاصة: الحركة الدائرية:** (mouvement circulaire)

بما أن $r = R = Cte$ ($Cte =$ ثابت)، فإن شعاع السرعة:

$$\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta} \quad (30.4)$$

و عبارة شعاع التسارع:

$$\boxed{\vec{a} = -R.\dot{\theta}^2.\vec{u}_r + R.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta} \quad (31.4)$$

نلاحظ أن للتسارع مركبتان:

✓ **التسارع الناظمي**(accélération normale) الذي يحمله الناظم و هو موجه نحو مركز الدائرة أي عكس $\vec{a}$ هو مؤشر لتغير **حامل السرعة**:

$$\boxed{\vec{a}_N = -\vec{a}_r = R\dot{\theta}^2\vec{u}_r \Rightarrow a_r = a_N = R\dot{\theta}^2} \quad (32.4)$$

✓ **التسارع المماسي** (accélération tangentielle) الذي حامله مماس للمسار في النقطة M و هو مؤشر على تغير **شدة السرعة**.

$$\boxed{\vec{a}_\theta = \vec{a}_T = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow a_\theta = a_T = R\ddot{\theta}} \quad (33.4)$$

❖ **حالة خاصة: الحركة الدائرية المنتظمة:** (mouvement circulaire uniforme)

في الحركة الدائرية المنتظمة شدة السرعة ثابتة. و بما أن $r = R =$ ثابت، فإن السرعة:

$$\boxed{v = R\dot{\theta} = R\omega} \quad (34.4)$$

حيث نتعرف على السرعة الزاوية ω و هي تمثل الزاوية الممسوحة خلال واحدة الزمن و وحدتها الراديان على الثانية ($rad.s^{-1}$).

أما التسارع فهو:

$$\boxed{a = a_r = a_N = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow \vec{a}_N = -R\omega^2.\vec{u}_r} \quad (35.4)$$

2/ المركبتان، الناظمية و المماسية، للسرعة و التسارع في معلم فرينت(Frenet):

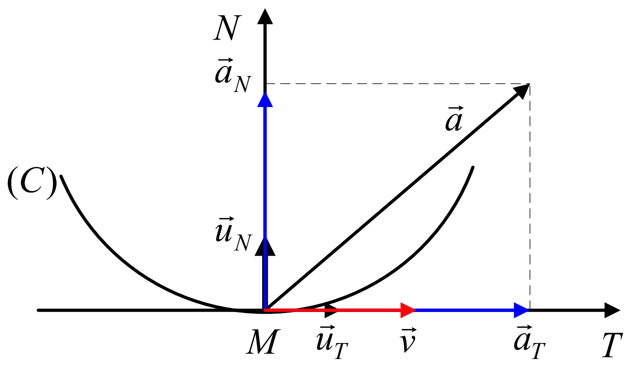
نتخذ الآن حركة مسارها (C) كيف ما كان، و نعين المعلم المشكل من المحور MT، وهو مماس للمسار في النقطة M و يحمل شعاع السرعة $\vec{v}$، والمحور MN العمودي على المحور MT.

ليكن $\vec{u}_T$ و $\vec{u}_N$ شعاعي الوحدة وفق MT و MN على التوالي.نلاحظ من الشكل أن السرعة:

$$\boxed{\vec{v} = v.\vec{u}_T} \quad (36.4)$$

و التسارع $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$ و بالتالي فإن:

$$\boxed{\vec{a} = a_T.\vec{u}_T + a_N.\vec{u}_N} \quad (37.4)$$



الشكل 13.4: السرعة و التسارع في معلم فرينت

تبعا لما سبق فأن:

$$\left.\begin{array}{l} a_T = \dfrac{dv}{dt} \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{a} = \dot{v}.\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N \Rightarrow a = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

نسمي العبارتين (36.4) و (37.4) بمركبتي السرعة و التسارع في معلم فرينت أو المركبتين الذاتيتين أو المحليتين.

إذا كان ds هو الإنتقال العنصري فيكون من البديهي أن شعاع الموضع هو:

$$\boxed{\vec{r} = \int \vec{u}_T.ds} \qquad (38.4)$$

مثال8.4:

يعطى المسار المستوي لنقطة مادية بلإحداثيات القطبية بالمعادلة: $\rho.\cos^2\dfrac{\varphi}{2} = a$

حيث a ثابت.

نفترض الشدة v لسرعة هذه النقطة تتناسب طردا مع ρ: $v = k\rho$ حيث $k > 0$.

أحسب المركبتين الناظمية v_ρ و العرضية v_φ لشعاع السرعة.

الحل:

نعرف أن: $\vec{v} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\varphi$

لاحظ هنا أننا استبدلنا الحرفين r بـــ ρ و θ بـــ φ (إذن لا تحفظ الحروف !!).

انطلاقا من المعطيات نقوم بالحسابات:

$$\rho = \frac{a}{\cos^2(\varphi/2)} \Rightarrow v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow v_\rho = \frac{a.\cos(\varphi/2).\sin(\varphi/2)}{\cos^4(\varphi/2)}.\dot{\varphi}$$

$$v_\varphi = \rho.\dot{\varphi}$$

غير أن $\dot{\varphi}$ تبقى مجهولة، و لذا يجب حسابها انطلاقا من $v^2 = {v_\rho}^2 + {v_\varphi}^2$

كما أن: $v^2 = k^2.\rho^2 = k^2.\dfrac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)}$

و عليه :

$$k^2.\frac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)} = \frac{a^2.\sin^2(\varphi/2)}{\cos^6(\varphi/2)}.\dot{\varphi}^2 + \frac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)}.\dot{\varphi}^2 \Rightarrow k^2 = \left[\frac{\sin^2(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} + 1\right].\dot{\varphi}^2$$

و منه : $\dot{\varphi}^2 = k^2.\cos^2(\varphi/2) \Rightarrow \dot{\varphi} = k.\cos(\varphi/2)$

بتعويض $\dot{\varphi}$ بقيمتها الحرفية في عبارتي v_ρ و v_φ نصل إلى ما هو مطلوب:

$$v_\rho = \frac{a.k.\sin(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} \Rightarrow \boxed{v_\rho = v.\sin(\varphi/2)}$$ و

$$\boxed{v_\theta = \frac{a.k}{\cos(\varphi/2)}}$$

D-IV/الحركات في الفضاء
MOUVEMENT DANS L'ESPACE

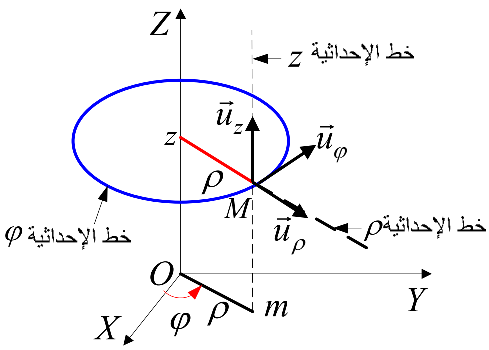
لدراسة حركة نقطة مادية في الفضاء و الذي يتميز بثلاثة أبعاد، نستعمل في الغالب الإحداثيات الأسطوانية و الإحداثيات الكروية.

1/ دراسة الحركة بالإحداثيات الأسطوانية: (étude du mouvement en coordonnées cylindriques)

❖ **موضع المتحرك:** (الشكل14.4)

يحدد موضع المتحرك M بإحداثيته الجبرية z و بإحداثيتيه القطبيتين ρ و φ لمسقطه m على المستوي XOY.

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix}\rho(t)\\ \varphi(t)\\ z(t)\end{vmatrix}$$



الشكل 14.4: قاعدة الإحداثيات الأسطوانية

العلاقة بين أشعة القاعدة $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$ و $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ هي:

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{u}_\rho=\cos\varphi.\vec{i}+\sin\varphi.\vec{j}\\ \vec{u}_\varphi=-\sin\varphi.\vec{i}+\cos\varphi.\vec{j}\\ \vec{u}_z=\vec{k}\end{array}} \qquad (39.4)$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{Om}+\overrightarrow{mM}=\rho.\vec{u}_\rho+z.\vec{u}_z} \qquad (40.4)$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\vec{i}.\rho.\cos\varphi+\vec{j}.\rho.\sin\varphi+\vec{k}.z} \qquad (41.4)$$

يلاحظ الطالب أن هذه العبارة مكافئة للعبارة (6.3).

- الانتقال العنصري يعطى بالعبارة:

$$\boxed{ds^2=d\rho^2+\rho^2d\varphi^2+dz^2} \qquad (42.4)$$

❖ **سرعة المتحرك:**

كما تعلمنا، نقوم باشتقاق شعاع موضع المتحرك المعبر عنه بالإحداثيات الأسطوانية. ننتبه هنا إلى أن، عكس حالة الحركة الدائرية المنتظمة، فإن نصف

القطر القطبي ρ هو الآن تابع زمني. نسجل كذلك أن $\vec{u}_z = \vec{k}$ ثابت، عكس $\vec{u}_\varphi$ المتغير مع الزمن.

$$\vec{r} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \vec{u}_z \frac{dz}{dt}$$

بتذكر العبارة (25.4) الخاصة بمشتقة كل من $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$ و $\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$ يمكن كتابة:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \dot{z}.\vec{u}_z} \qquad (43.4)$$

لاحظ أن للسرعة ثلاثة مركبات: **قطرية** $(\vec{v}_r)$، **عرضية** $(\vec{v}_\varphi)$ و **علوية** $(\vec{v}_z)$.

شدة السرعة بالإحداثيات الأسطوانية تحسب بالعبارة:

$$\boxed{v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho.\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}} \qquad (44.4)$$

❖ <u>تسارع المتحرك:</u>

بمواصلة عملية الاشتقاق نحصل على العبارة الشعاعية للتسارع:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}.\vec{u}_\rho + \dot{\rho}.\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}.\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \rho.\ddot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \rho.\dot{\varphi}.\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} + \ddot{z}.\vec{u}_z$$

باستعمال ترميز نيوتن و العبارة (25.4) نحصل على العبارة النهائية:

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho.\dot{\varphi}^2).\vec{u}_\rho + (\rho.\ddot{\varphi} + 2.\dot{\rho}.\dot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi + \ddot{z}.\vec{u}_z} \qquad (45.4)$$

يمكن كتابة نفس العبارة على الشكل التالي:

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho.\dot{\varphi}^2).\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2.\dot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi + \ddot{z}.\vec{u}_z} \qquad (46.4)$$

إذا كان $z = 0$ و $\rho = R = Cte$ ، تظهر لنا العبارة السابقة (31.4) لتسارع الحركة الدائرية المنتظمة.

للتسارع كذلك ثلاث مركبات: **قطرية** $(\vec{a}_r)$، **عرضية** $(\vec{a}_\varphi)$ و **علوية** $(\vec{a}_z)$.

2/ دراسة الحركة بالإحداثيات الكروية: (étude du mouvement en coordonnées sphériques)

❖ **موضع المتحرك**(الشكل15.4)

في هذا النظام فإن موضع المتحرك معرف بالعلاقة:

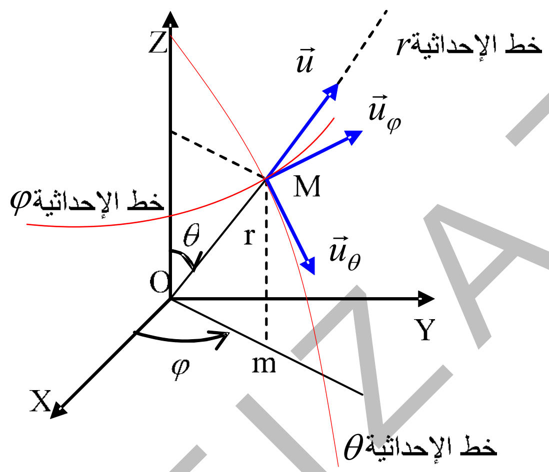
$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{array}\right. \quad \boxed{\overrightarrow{OM}=\vec{r}=r.\vec{u}_r} \qquad (47.4)$$

▪ نذكر بالعلاقات 13.4 و 14.4 بين أشعة القاعدة $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ و $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\vec{u}_r=\sin\theta.\cos\varphi.\vec{i}+\sin\theta.\sin\varphi.\vec{j}+\cos\theta.\vec{k}$$

$$\vec{u}_\varphi=-\sin\varphi.\vec{i}+\cos\varphi.\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta=\cos\theta.\cos\varphi.\vec{i}+\cos\theta.\sin\varphi.\vec{j}-\sin\theta.\vec{k}$$



الشكل15.4 قاعدة الإحداثيات الكروية

▪ الإنتقال العنصري يعطى بالعبارة:

$$\boxed{ds^2=dr^2+(r\sin\theta.d\varphi)^2+(rd\theta)^2} \qquad (48.4)$$

▲ على الطالب أن لا يحفظ الحروف و إنما مدلولاتها: لاحظ أن $\varphi=(OX,Om)$ و $\theta=(OZ,OM)$ و قد يجد في مراجع أخرى عكس هذا.

❖ **سرعة المتحرك**: نشتق عبارة شعاع الموضع: $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\vec{u}}$

نشتق الشعاع $\vec{u}$ ثم ننظم العبارة الجديدة فنحصل على:

$$\dot{\vec{u}}_r=\dot{\theta}\left[\underbrace{\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi+\vec{j}\cos\theta\sin\varphi-\vec{k}\sin\theta}_{\vec{u}_\theta}\right]+\dot{\varphi}\sin\theta\left[\underbrace{-\vec{i}.\sin\varphi+\vec{j}\cos\varphi}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

أي أن: $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta.\vec{u}_\varphi$

بالتعويض نصل إلى العبارة النهاية لشعاع السرعة:

$$\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + (r\sin\theta)\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi$$

تتجلى لنا المركبات الكروية الثلاثة لشعاع السرعة:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi} \qquad (49.4)$$

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ القاعدة المتعامدة المباشرة و هي أشعة تابعة لموضع M و بالتالي للزمن معرفة بالمعادلات الزمنية $r(t)$ ، $\theta(t)$ و $\varphi(t)$ ، تسمح بالوصول إلى القيم الجبرية v_r ، v_θ و v_φ للمركبات الكروية لشعاع السرعة و من ثمة تحديد شعاع السرعة.

❖ **تسارع المتحرك:** بمتابعة الاشتقاق نتوصل إلى عبارة التسارع:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}.\vec{u}_r + (r\sin\varphi)\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi\right]$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta + \vec{a}_\varphi \Leftrightarrow a = \sqrt{a^2{}_r + a^2{}_\theta + a^2{}_\varphi}$$

نعطي في ما يلي نتيجة اشتقاق شعاع السرعة و **على الطالب** أن يتأكد من هذه النتيجة:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} = &(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2 - r.\dot{\varphi}^2.\sin^2\theta).\vec{u}_r + \\ &(r.\ddot{\theta} + 2\dot{r}.\dot{\theta} - r.\dot{\varphi}^2.\sin\theta.\cos\theta).\vec{u}_\theta + \\ &(r.\ddot{\varphi}.\sin\theta + 2\dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta + 2r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta)\vec{u}_\varphi\end{aligned}} \qquad (50.4)$$

هنا كذلك، بمعرفة المعادلات الزمنية $r(t)$ ، $\theta(t)$ و $\varphi(t)$ نتوصل إلى القيم الجبرية a_r ، a_θ و a_φ للمركبات الكروية لشعاع التسارع و بالتالي تحديد الشعاع $\vec{a}$.

مثال 9.4:

حركة نقطة مادية M معرفة في الإحداثيات الأسطوانية بمركبتي شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ و الزاوية القطبية حيث: $\theta = ct^2$; $\overrightarrow{OM} = a.\vec{u}_\rho + bt.\vec{k}$ علما أن a,b,c ثوابت موجبة.

1/ أحسب السرعة و التسارع بدلالة الزمن.

2/ أحسب نصف قطر الإنحناء بعد دورة كاملة حول OZ.

الحل:

1/ لحساب السرعة $\vec{v}$ نشتق شعاع الموضع:

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(a\vec{u}_\rho + bt\vec{k}\right) \Rightarrow \vec{v} = a\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + b\vec{k} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{v} = a.\dot{\theta}\vec{u}_\theta + b\vec{k} \\ \theta = ct^2 \Rightarrow \dot{\theta} = 2ct \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = 2act\vec{u}_\theta + b\vec{k}}$$

شدة شعاع السرعة: $\boxed{v = \sqrt{4a^2c^2t^2 + b^2}}$

لحساب التسارع نشتق شعاع السرعة:

$$a = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(2act.\vec{u}_\theta + b\vec{k}) \Rightarrow a = 2ac\frac{d}{dt}(t.u_\theta) \Rightarrow a = 2ac\left[t.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \vec{u}_\theta.1\right]$$

$$a = 2ac\left[-t.\dot{\theta}.\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta\right] \Rightarrow a = 2ac\left[-t.2ct.\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta\right] \Rightarrow \boxed{a = 2ac\left[-2ct^2.\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta\right]}$$

شدة شعاع التسارع:

$$\boxed{a = 2ac\sqrt{4a^2t^2 + 1}}$$

2/ حساب نصف قطر الإنحناء (أو التقوس) (rayon de courbure):

نحسب المدة اللازمة للقيام بدور واحد: $\theta = 2\pi = ct^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\theta}{c}} = \sqrt{\frac{2\pi}{c}}$

ثم نعوض الزمن في معادلة التسارع الناظمي و بعده نحسب نصف قطر الإنحناء:

(على الطالب إنجاز هذا الحساب دون كلل و لا ملل !!!).

$$R = \frac{v^2}{a_N} \quad ; \quad a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} \ ;$$

$$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{4a^2c^2t}{\sqrt{4a^2c^2t + b^2}} \neq \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}!!!!!}$$

$$\boxed{a_N = 2ac\frac{\sqrt{16a^2c + b^2}}{\sqrt{a^2c^2t^2 + b^2}}}$$

$$R_{(t)}=\frac{v^2}{a_N}=\frac{\left(4a^2c^2t+b^2\right)^{3/2}}{2ac(16a^2c^4t^6+4c^2b^2t^4+b^2)^{1/2}}$$

$$\boxed{R\left(\sqrt{\frac{2\pi}{c}}\right)=\frac{\left(8\pi a^2c^2t+b^2\right)^{3/2}}{2ac(128a^2c\pi^3+b^2\left(1+16\pi^2\right))^{1/2}}}$$

مثال 10.4:

تتحرك نقطة مادية M على سطح كرة نصف قطرها R طبقا للمعادلتين:

$\theta=(OZ,OM)=30°\ ;\ \varphi=(OX,Om)=at^2$.

1/أحسب سرعة وتسارع النقطة المادية بدلالة الزمن.

2/ما هما مسار و طبيعة الحركة؟

الحل:

1/ حساب السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{a}$ بدلالة الزمن:

إذا رمزنا بـــ r,θ,φ إلى الإحداثيات الكروية فإن الإحداثيات الكارتيزية هي:

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$$

بالاشتقاق بالنسبة للزمن نحسب مركبات السرعة بالإحداثيات الكارتيزية ثم شدة السرعة:

$$\vec{v}\begin{cases} v_x=\dfrac{dx}{dt}=\dot{x}=\dot{r}\sin\theta\cos\varphi+r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \Leftrightarrow v_x=-Rat\sin(at^2) \\ v_y=\dfrac{dy}{dt}=\dot{y}=\dot{r}\sin\theta\sin\varphi+r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi+r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \Leftrightarrow v_y=Rat\cos(at^2) \\ v_z=\dfrac{dz}{dt}=\dot{z}=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta=0 \Leftrightarrow v_z=0 \end{cases}$$

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\Rightarrow \boxed{v=Rat}$$

بالاشتقاق مرة ثانية بالنسبة للزمن نحسب مركبات التسارع بالإحداثياب الكارتيزية ثم نتوصل إلى شدة التسارع:

$$\vec{a}\begin{cases} a_x=\ddot{x}=-Ra\left[\sin(at^2)+2at^2\cos(at^2)\right] \\ a_y=\ddot{y}=+Ra\left[\cos(at^2)-2at^2\sin(at^2)\right] \\ a_z=0 \end{cases} \qquad \boxed{a=Ra\sqrt{1+4a^2t^2}}$$

2/مسار و طبيعة الحركة: بما أن معادلة المسار هي: $x^2 + y^2 = \frac{R}{2}$ و أن $z = \frac{\sqrt{3}}{2}R$

فإن المسار دائرة نصف قطرها $\frac{R}{2}$ و مركزها $(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}R)$

و بما أن التسارع: ثابت $= 2a = \ddot{\varphi} \Leftarrow$ الحركة دائرية متسارعة بانتظام.

E-IV/الـــحـــركـــة الـــنـــســـبـــيـــة
MOUVEMENT RELATIF

1/تغيير المرجع:

❖ **مقدمة:**

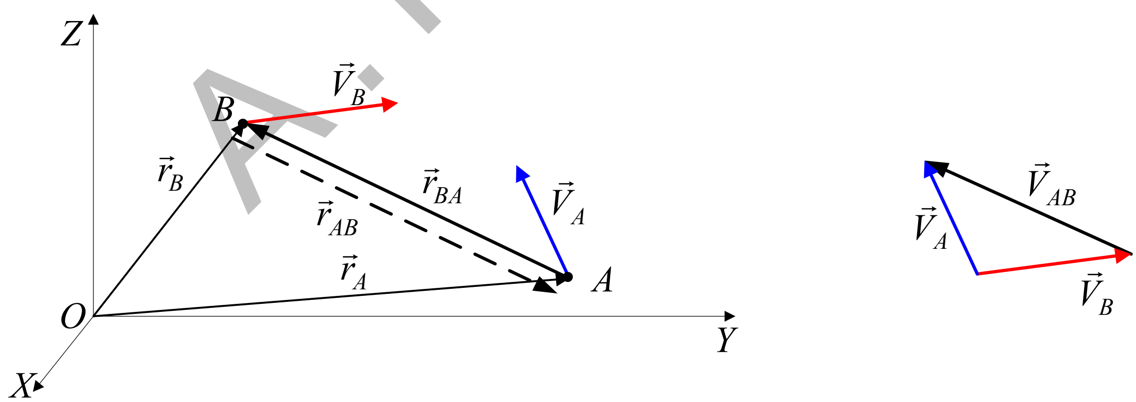
قلنا سابقا أن الحركة و السكون مفهومان نسبيان أي أن كل منهما يتعلق بوضع المتحرك بالنسبة للجسم المتخذ كمرجع.
كل الحركات التي درستاها حتى الآن نسبناها إلى معلم ساكن. فما هي سرعة متحرك بالنسبة لمتحرك آخر و هما مرتبطان بنفس المعلم؟ و كيف يكون الحال لو كان الملاحظان منتميان لمعلمين مختلفان الواحد في حركة بالنسبة للآخر؟
يختلف الموضع، المسار، السرعة و التسارع لنفس المتحرك حسب المعلم المختار من قبل المراقب.
مثلا: نقطة مادية لاصقة على محيط عجلة دراجة:

- بالنسبة لمعلم أرضي الحركة غير منتظمة و المسار شكله أقواس متتالية أي مسار دويري (cycloïde).
- بالنسبة لمعلم مرتبط بمحور الدراجة:الحركة منتظمة و المسار دائري.

من الأهمية بمكان معرفة كيف هي مرتبطة الملاحظات المسجلة من قبل مراقبين مرتبطين بمعلمين مختلفين في الحركة الواحدة بالنسبة للآخر.

2/السرعة النسبية لمتحركين:

لتكن A و B نقطتان ماديتان متحركتين في المعلم $OXYZ$.نفترض وجود ملاحظ في النقطة O. الشكل16.4



الشكل16.4: السرعة النسبية لمتحركين

سرعة A بالنسبة للملاحظ O هي: $\vec{V}_A=\dfrac{d\vec{r}_A}{dt}$ و نعرّف سرعتها بالنسبة لـــ B بـــ:

$\vec{V}_{AB}=\dfrac{d\vec{r}_{AB}}{dt}$ ، حيث $\vec{r}_{AB}=\overrightarrow{BA}=\vec{r}_A-\vec{r}_B$. و منه :

$$\vec{V}_{AB}=\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}=\frac{d\vec{r}_A}{dt}-\frac{d\vec{r}_B}{dt}\Rightarrow\boxed{\vec{V}_{AB}=\vec{V}_A-\vec{V}_B}\qquad(52.4)$$

سرعة B بالنسبة للملاحظ O هي: $\vec{V}_B=\frac{d\vec{r}_B}{dt}$ و نعرّف سرعتها بالنسبة لـ A بـ:

$$\vec{V}_{BA}=\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$$

حيث $\vec{r}_{BA}=\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$.

و منه :

$$\vec{V}_{BA}=\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}=\frac{d\vec{r}_B}{dt}-\frac{d\vec{r}_A}{dt}\Rightarrow\boxed{\vec{V}_{BA}=\vec{V}_B-\vec{V}_A}\qquad(53.4)$$

نسجل أن $\vec{V}_{AB}=-\vec{V}_{BA}$ أي أن سرعة A بالنسبة لـ B مساوية و معاكسة لسرعة B بالنسبة لـ A.

نحصل على التسارعين النسبيين للنقطتين الماديتين المتحركتين باشتقاق كل من عبارتي السرعتين النسبيتين بالنسبة للزمن:

$$\vec{a}_{AB}=\frac{d\vec{V}_{AB}}{dt}=\frac{d\vec{V}_A}{dt}-\frac{d\vec{V}_B}{dt}\Rightarrow\boxed{\vec{a}_{AB}=\vec{a}_A-\vec{a}_B}\qquad(54.4)$$

$$\vec{a}_{BA}=\frac{d\vec{V}_{BA}}{dt}=\frac{d\vec{V}_B}{dt}-\frac{d\vec{V}_A}{dt}\Rightarrow\boxed{\vec{a}_{BA}=\vec{a}_B-\vec{a}_A}\qquad(55.4)$$

نسجل هنا أيضا أن $\vec{a}_{AB}=-\vec{a}_{BA}$ أي أن تسارع A بالنسبة لـ B مساوي و معاكس لتسارع B بالنسبة لـ A.

مثال 11.4:

1/ تتحرك سيارتان A و B على رواقين لطريق سيّار مستقيم بسرعتي $110km.h^{-1}$ و $90km.h^{-1}$ على التوالي.حدد شعاع السرعة النسبية لـ A بالنسبة لـ B في الحالتين:

ا/ تسير السيارتان في نفس الاتجاه،

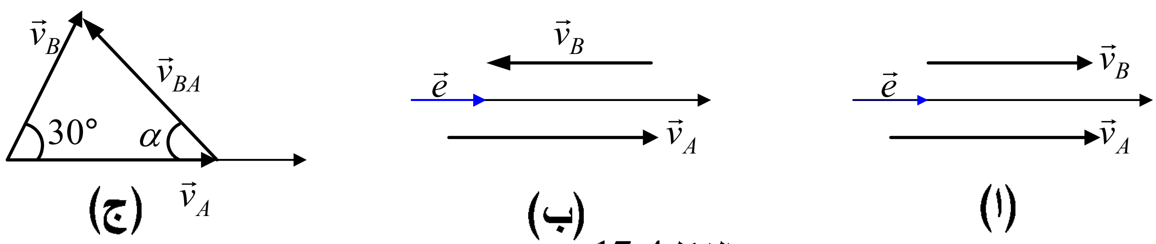
ب/ تسير السيارتان في اتجاهين متعاكسان.

2/ لو كانت السيارتان تسيران بنفس السرعتين السابقتين على طريقين متقاطعين و الزاوية بينهما $30°$، فما هي السرعة النسبية للسيارة B بالنسبة لسيارة A.

الحل:

1/ا/ سرعة السيارة A بالنسبة للسيارة B هي: $\vec{v}_{AB}=\vec{v}_A-\vec{v}_B$. باعتبار شعاع الواحدة $\vec{e}$ ؛ فإن السرعتين متوازيتان و لهما نفس الاتجاه (الشكل17.4-ا-)، أي اتجاه $\vec{e}$ و بالتالي:

$$\vec{v}_{AB}=\vec{v}_A-\vec{v}_B=110\vec{e}-90\vec{e}\Rightarrow\boxed{\vec{v}_{AB}=20\vec{e}\Rightarrow v_{AB}=20km.h^{-1}}$$



الشكل17.4

ب/ الآن و بما أن السرعتين متوازيتان و لكنهما متعاكستا الاتجاه (الشكل17.4−ب) فإن:

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 110\vec{e} - (-90\vec{e}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{AB} = 200\vec{e} \Rightarrow v_{AB} = 200 km.h^{-1}}$$

2/ الطريقان متقاطعان و بينهما زاوية مقدارها $30°$ (الشكل17.4−ج)

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \Rightarrow v_{BA} = \left(v_B^2 + v_A^2 - 2v_A v_B \cos 30°\right)^{1/2}$$

$$v_{BA} = \left(110^2 + 90^2 - 2.110.90.0,87\right)^{1/2} \boxed{v_{AB} = 54,5 km.h^{-1}}$$

لتحديد منحى السرعة النسبية $\vec{v}_{AB}$ يكفي تعيين الزاوية α و ذلك بتطبيق قانون الجيوب:

$$\frac{v_{BA}}{\sin 30°} = \frac{v_B}{\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{v_B}{v_{BA}}\sin 30°} \quad \sin\alpha = \frac{90}{54,5}.0,5 = 0,82 \Rightarrow \boxed{\alpha = 55,1°}$$

و هذا يعني أن الراكب في السيارة A يرى السيارة B تجري بسرعة $54,5 km.h^{-1}$ متجهة (حسب الشكل17.4−ج) إلى اليسار بزاوية $55,1°$.بينما الراكب في السيارة B يرى السيارة A تجري بسرعة $54,5 km.h^{-1}$ و لكن متجهة إلى يمينه بزاوية $180 - (30° + 55,1°) = 94,9°$.

كانت هذه سرعة متحرك بالنسبة لمتحرك آخر و هما مرتبطان بنفس المعلم. فكيف يكون الحال لو كان الملاحظان منتميين لمعلمين مختلفين الواحد في حركة بالنسبة للآخر؟ هذا ما سنجيب عليه في ما يلي.

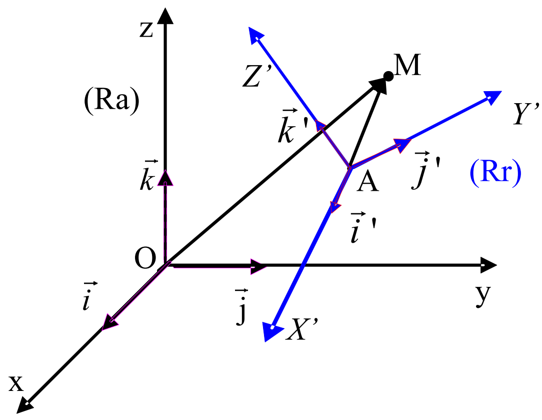
3/مصطلحات و رموز:

نعتبر المعلمين (Ra) و (Rr) و مراقبين كل واحد منهما مرتبط بأحد المعلمين. لنظر إلى الشكل 18.4.

Ra المعلم المطلق (repère absolu) و نعتبره ساكنا.

R: المعلم النسبي(repère relatif) و نعتبره متحركا بالنسبة للمعلم المطلق.

M: نقطة مادية (point matériel) في حركة بالنسبة للمعلمين.



الشكل 18.4: المعلمان المطلق و النسبي

كل مراقب أو ملاحظ يسجل قياساته. نجمع هذه النتائج في الجدول التالي:

الملاحظ	في المعلم (Ra) $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ثابتة في Ra	في المعلم (Rr) $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ متغيرة بالنسبة ل (Ra)
الموضع	$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$	$\vec{r}\,'=\overrightarrow{AM}$
السرعة	$\vec{v}_a=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{v}_e=\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt}$
التسارع	$\vec{a}_a=\dfrac{d\vec{v}_a}{dt}$	$\vec{a}_e=\dfrac{d\vec{v}_e}{dt}$

❖ **ملاحظة هامة:** افترضنا في ما سبق أن $t=t'$ ، أي أن الملاحظين يستعملان نفس الزمن ، و هذا يعني أن الزمن لا يتعلق بحركة الملاحظ. يبدو هذا جد معقول، غير أن التجربة يمكنها تفنيده. لا يمكن لهذا الافتراض أن يبقى مقبولا إلا في حالة السرعات الصغيرة بالنسبة لسرعة الضوء ، و هذا هو ما سوف نتخذه في تحليلنا الحالي.

❖ **العلاقة بين الموضعين:**

نلاحظ من الشكل 18.4 أن:

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}} \qquad (56.4)$$

$$\underbrace{x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}}_{\overrightarrow{OM}}=\underbrace{(x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}+z_A.\vec{k})}_{\overrightarrow{OA}}+\underbrace{\left(x'.\vec{i}\,'+y'.\vec{j}\,'+z'.\vec{k}\,'\right)}_{\overrightarrow{AM}}$$

❖ العلاقة بين السرعتين:

باشتقاق العبارة (56.4) بالنسبة للزمن نحصل على العلاقة بين مختلف السرعات:

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}+x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}+\vec{i}\,'\frac{dx'}{dt}+\vec{j}\,'\frac{dy'}{dt}+\vec{k}\,'\frac{dz'}{dt}$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a}=\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}+x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}}_{\vec{v}_e}+\underbrace{\vec{i}\,'\frac{dx'}{dt}+\vec{j}\,'\frac{dy'}{dt}+\vec{k}\,'\frac{dz'}{dt}}_{\vec{v}_r}} \qquad (57.4)$$

$\vec{v}_a$: السرعة المطلقة (vitesse absolue) أي سرعة M بالنسبة للمعلم (Ra).

$\vec{v}_e$: سرعة الجر (vitesse d'entraînement) أي سرعة المعلم المتحرك (Rr) بالنسبة للمعلم المطلق (Ra)، يمكن اعتبارها كسرعة مطلقة $\vec{v}_a$ للمتحرك M في (Ra) إذا كانت إحداثيات M في (Rr) ثابتة أي إذا كان M ساكنا بالنسبة للمعلم (Rr):

$$\vec{v}_r=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}_e=\vec{v}_a$$

$\vec{v}_r$: السرعة النسبية (vitesse relative) أي سرعة النقطة M بالنسبة للمعلم النسبي (Rr). يمكن اعتبارها كسرعة مطلقة $\vec{v}_a$ للمتحرك M في (Ra) إذا كان المعلم (Rr) ساكنا بالنسبة للمعلم (Ra): $\vec{v}_e=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}_r=\vec{v}_a$

العلاقة بين السرعات الثلاثة و التي تسمى **قانون تركيب السرعات** هي:

$$\boxed{\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r} \qquad (58.4)$$

ملاحظة:

- إذا كان (Ra) و (Rr) ساكنين الواحد بالنسبة للآخر $(\vec{v}_e=\vec{0})$ فإن المراقبين يقيسان نفس السرعتين، و بالتالي نفس المسارين رغم أن شعاعي الموضع مختلفان $(\overrightarrow{OM}\neq\overrightarrow{OA})$.
- إذا كان (Rr) في حركة انسحابية (منتظمة أم لا) بالنسبة للمعلم (Ra) حيث $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ ثابتة، فإن $\vec{v}_e$ مستقلة عن M.

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\frac{d\vec{j}\,'}{dt}=\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}_e=\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$$

❖ **العلاقة بين التسارعات:**

باشتقاق العبارة (57.4) بالنسبة للزمن نتوصل إلى العلاقة بين مختلف التسارعات بالنسبة للمعلمين:

$$\vec{a}_a=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\frac{d\vec{v}_a}{dt}=\left[\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}+x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2}+y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2}+z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}\right]\rightarrow\vec{a}_e$$
$$+\left[\vec{i}\,'\frac{d^2x'}{dt^2}+\vec{j}\,'\frac{d^2y'}{dt^2}+\vec{k}\,'\frac{d^2z'}{dt^2}\right]\rightarrow\vec{a}_r$$
$$+2\left[\frac{dx'.d\vec{i}\,'}{dt^2}+\frac{dy'.d\vec{j}\,'}{dt^2}+\frac{dz'.d\vec{k}\,'}{dt^2}\right]\rightarrow\vec{a}_C \qquad (59.4)$$

$\vec{a}_a$: التسارع المطلق (accélération absolue) و هو تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم (Ra).

$\vec{a}_r$: التسارع النسبي (accélération relative) و هو تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم (Rr).

$\vec{a}_e$: تسارع الجر (accélération d'entraînement) و هو تسارع المعلم (Rr) بالنسبة للمعلم (Ra).

$\vec{a}_C$: تسارع تكميلي المسمى **بتسارع كوريوليس** (accélération de Coriolis) نسبة إلى أول من وضعه سنة 1832 (Gaspard Coriolis 1792-1843).

ينعدم تسارع كوريوليس:

- إذا كان M ساكنا بالنسبة للمعلم (Rr): $\frac{dx'}{dt}=\frac{dy'}{dt}=\frac{dz'}{dt}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}_C=\vec{0}$
- إذا كان المعلم (Rr) في حركة انسحابية (حتى و لو متغيرة) بالنسبة للمعلم (Ra):

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2}=\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2}=\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}_e=\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}\\ \frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\frac{d\vec{j}\,'}{dt}=\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}_c=\vec{0}\end{array}\right|\Rightarrow\vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_e$$

مثال 12.4:

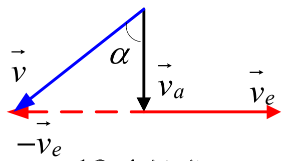
تسقط رقعات ثلج شاقوليا بسرعة $8ms^{-1}$. بأي سرعة تضرب هذه الرقعات الزجاج الأمامي لسيارة تسير بسرعة $50km.h^{-1}$؟

الحل:

$\vec{v}_e$: سرعة السيارة بالنسبة للأرض أي سرعة الجر

$\vec{v}_a$: سرعة الرقعات بالنسبة للأرض أي السرعة المطلقة

$\vec{v}$: سرعة الرقعات بالنسبة للسيارة أي السرعة النسبية



الشكل19.4

من الشكل 19.4 نرى أن:

$$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r \;\Rightarrow\; \vec{v}_r=\vec{v}_a-\vec{v}_e \quad ; \quad \vec{v}_r=\vec{v}_a+\left(-\vec{v}_e\right)$$

نحول وحدة سرعة السيارة فنجد: $50km.h^{-1}=13,9ms^{-1}$

نمر الآن إلى التطبيق العددي: $\boxed{v_r=16ms^{1}}$ $\boxed{v_r=\left(v_a^2+v_e^2\right)^{1/2}}$

لتحديد منحى أي جهة شعاع السرعة النسبية نحسب ظل الزاوية α :

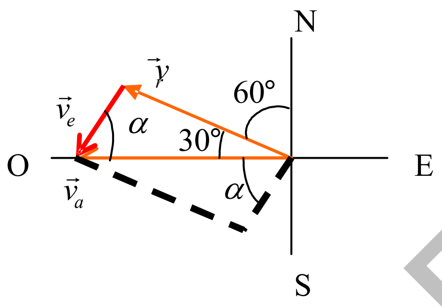
$$tg\alpha=\frac{v_e}{v_a}=1,74\Rightarrow\boxed{\alpha=60,1°}$$

و هذا يعني أن رقعات الثلج تسقط بسرعة $16ms^{1}$ تحت زاوية قدرها $\alpha=60,1°$

مثال 13.4:

أبحرت سفينة في الاتجاه شمال $60°$ غرب (N60°O) بسرعة 4km/h بالنسبة للماء. جهة التيار المائي البحري هي بحيث تكون الحركة الناتجة بالنسبة للأرض في اتجاه الغرب بسرعة 5km/h.أحسب سرعة و جهة التيار المائي بالنسبة للأرض.

الحل:



الشكل 20.4

أول ما يجب أن نبدأ به هو رسم هندسي و الذي بدونه لا يمكن حل هذا التمرين.

يجب أن نفهم أن المطلوب هو حساب شدة سرعة الجرو تحديد حاملها.

$\vec{v}_a$:السرعة المطلقة أي سرعة السفينة بالنسبة للأرض،

$\vec{v}_e$:سرعة الجر أي سرعة التيار المائي بالنسبة للأرض،

$\vec{v}$:السرعة النسبية أي سرعة السفينة بالنسبة للتيار المائي.

بعد القيام بالشكل المقابل نتوصل إلى المعادلات التالية:

$$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r\Rightarrow\vec{v}_e=\vec{v}_a-\vec{v}_r$$

$$\boxed{v_e=\left[v_a{}^2+v_r{}^2-2v_a.v_r.\cos 30°\right]^{1/2}}$$

التطبيق العددي يعطينا: $\boxed{v_e=2,52km.h^{-1}}$

لتحديد الحامل لا بد من حساب الزاوية α و ذلك باستعمال قانون الجيوب:

$$\frac{v_r}{\sin\alpha}=\frac{v_e}{\sin 30°}\Rightarrow\boxed{\sin\alpha=\frac{v_r}{v_e}.\sin\alpha} \;;\; \sin\alpha=0,4\Rightarrow\boxed{\alpha=23,6°}$$

هذا يعني أن حامل شعاع سرعة ماء البحر بالنسبة للأرض يصنع الزاوي $23,6°$ مع المحور غرب− شرق نحو الجنوب أي $O23.6°S$.

4/ حالة الحركة الدورانية:

❖ العلاقة بين السرعات:

يمكن وضع السرعة الزاوية على شكل **مقدار شعاعي** بحيث تكون جهته عمودية على مستوى الحركة في اتجاه يحدد باستعمال قاعدة اليد اليمنى لتحديد جهة الشعاع الناتج عن الجداء الشعاعي أو اتجاه تقدم برغي يدور في اتجاه حركة دوران الجسم.

نلاحظ على الشكل21.4 أن :

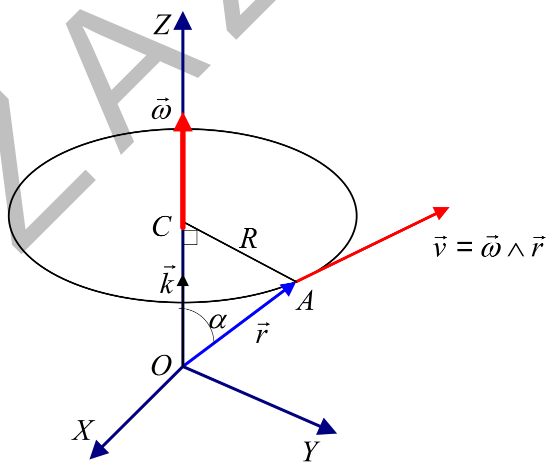
$R = r.\sin\alpha$ و نعرف أن $v = \omega.R$ و منه فإن $v = \omega R \sin\alpha$

يمكن إذن كتابة:

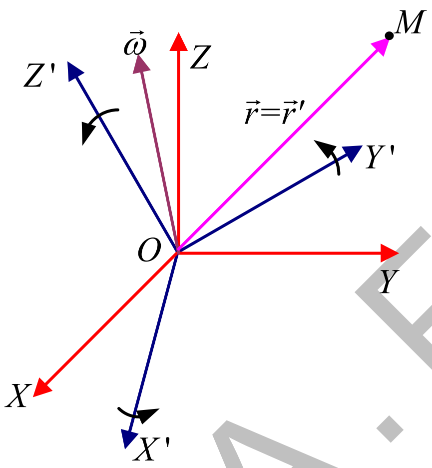
$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{r} \Leftrightarrow v = \omega.r.\sin\alpha} \qquad (60.4)$$

و لذا يصح أن نكتب كما نلاحظ: $\vec{\omega} = \dfrac{d\theta}{dt}.\vec{k}$

في الشكل (22.4) نفترض ملاحظين: الملاحظ O المرتبط بالمعلم R و الملاحظ O' المرتبط بالمعلم R' و هما في حركة دورا نية الواحد بالنسبة للآخر بدون حركة انسحابية.



الشكل21.4: شعاع السرعة الزاوية



الشكل 22.4: مرجعان في حركة دورانية منتظمة نسبية

كل ملاحظ يرى معلم الملاحظ الآخر يدور بسرعة زاوية ω.

بالنسبة للملاحظ O المرتبط بالمعلم $OXYZ$ فإن سرعة النقطة المادية M تشتق من عبارة شعاع الموضع:

$$\boxed{\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_a = \frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k}} \qquad (61.4)$$

بالنسبة للملاحظO' المرتبط بالمعلم $OX'Y'Z'$ (لاحظ أن للمعلمين نفس المبدإ، أي O' منطبقة مع O) فإن سرعة نفس النقطة A تشتق من عبارة شعاع الموضع:

$$\boxed{\vec{r}\,'=\vec{r}=x'.\vec{i}\,'+y'.\vec{j}\,'+z'.\vec{k}\,'\Rightarrow \vec{v}_r=\frac{dx'}{dt}.\vec{i}\,'+\frac{dy'}{dt}.\vec{j}\,'+\frac{dz'}{dt}.\vec{k}\,'} \qquad (62.4)$$

بالنسبة للملاحظ O، المعلم $OX'Y'Z'$ يدور و بالتالي فإن أشعة الوحدة $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ متغيرة الجهة (الحامل). و عليه فإنه يكتب بالنسبة للمعلم R':

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx'}{dt}.\vec{i}\,'+\frac{dy'}{dt}.\vec{j}\,'+\frac{dz'}{dt}.\vec{k}\,'+x'.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}} \qquad (63.4)$$

من جهة أخرى فإن نهايات الأشعة $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ تدور بحركة دائرية منتظمة بالنسبة للملاحظ O بسرعة زاوية ω. و بعبارة أخرى فإن $\frac{d\vec{i}\,'}{dt}$ تمثل سرعة نقطة تقع على بعد يساوي الوحدة من O و ينتقل بحركة دائرية منتظمة بسرعة زاوية ω.

بمثل ما هو في المعادلة (60.4) يصبح لدينا:

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{i}\,' \quad ; \quad \frac{d\vec{j}\,'}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{j}\,' \quad ; \quad \frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{k}\,'$$

من المعادلة (63.4) يمكن كتابة :

$$x'.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{\omega}\wedge x'.\vec{i}\,'+\vec{\omega}\wedge y'.\vec{j}\,'+\vec{\omega}\wedge z'.\vec{k}\,'$$

$$x'.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{\omega}\wedge(x'.\vec{i}\,'+y'.\vec{j}\,'+z'.\vec{k}\,')$$

$$\boxed{x'.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{r}} \qquad (64.4)$$

بالتعويض في المعادلة (63.4) نحصل على:

$$\boxed{\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{\omega}\wedge\vec{r}} \qquad (65.4)$$

هذه العبارة تعطي العلاقة بين السرعتين للنقطة A ، مقاستين من قبل الملاحظين و هما في حركة نسبية دورانية.

☜ **سرعة الدوران اللحظية:**

رأينا أن $\vec{\omega}=\omega.\vec{k}$. إذا كانت $\vec{\omega}$ تابع للزمن فإن $\vec{\omega}(t)=\omega(t).\vec{k}$ تمثل سرعة الدوران اللحظية. للتمييز بين السرعة الزاوية الثابتة في الحركة الدائرية المنتظمة و سرعة الدوران اللحظية فإننا نرمز لهذه الأخيرة بـــ $\vec{\Omega}(t)$.

❖ العلاقة بين التسارعات:

للحصول على العلاقة بين مختلف التسارعات نتبّع نفس المنهجية.

تسارع المتحرك M التي يقيسه المراقب O بالنسبة للمعلم $OXYZ$ هو:

$$\vec{a}_a=\frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}=\vec{i}.\frac{dv_x}{dt}+\vec{j}.\frac{dv_y}{dt}+\vec{k}.\frac{dv_z}{dt}$$

تسارع المتحرك M التي يقيسه المراقب O' بالنسبة للمعلم $OX'Y'Z'$، دون أخذ بعين الاعتبار الدوران، هو:

$$\vec{a}_r=\vec{i}'.\frac{dv_x'}{dt}+\vec{j}'.\frac{dv_y'}{dt}+\vec{k}'.\frac{dv_z'}{dt}$$

باشتقاق العبارة (65.4) ، مع التذكر أن $\vec{\omega}$ مفترضة ثابتة،نحصل على:

$$\boxed{\vec{a}_a=\frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}=\frac{d\vec{v}_r}{dt}+\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}} \qquad (66.4)$$

و بما أن: $\vec{v}_r=\vec{v}'=\vec{i}'.v_x'+\vec{j}'.v_y'+\vec{k}'.v_z'$

فإن: $$\frac{d\vec{v}_r}{dt}=\vec{i}'.\frac{dv_x'}{dt}+\vec{j}'.\frac{dv_y'}{dt}+\vec{k}'.\frac{dv_z'}{dt}+v_x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+v_y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+v_z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

بمثل ما حصلنا على المعادلة (64.4) فإننا نحصل على:

$$\vec{i}'.\frac{dv_x'}{dt}+\vec{j}'.\frac{dv_y'}{dt}+\vec{k}'.\frac{dv_z'}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{v}$$

و لدينا كذلك: $$v_x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+v_y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+v_z'\frac{d\vec{k}'}{dt}=\vec{a}$$

و منه فإن:

$$\boxed{\frac{d\vec{v}_r}{dt}=\vec{a}_r+\vec{\omega}\wedge\vec{v}'} \qquad (67.4)$$

كما لدينا أيضا:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\overrightarrow{v_a}=\vec{v}_r+\vec{\omega}\wedge\vec{v} \qquad (68.4)$$

بحيث:

$$\vec{\omega}\wedge\vec{v}_a=\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\left(\vec{v}_r+\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)$$

$$\boxed{\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)} \qquad (69.4)$$

باستبدال النتيجتين (67.4) و (68.4) في المعادلة (69.4) نحصل في نهاية المطاف على المعادلة (64.4) التي تعطي العلاقة بين الشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{a}'$ للمتحرك M المقاسين من طرف الملاحظين O و O'، و هما في حركة نسبية دورانية منتظمة.

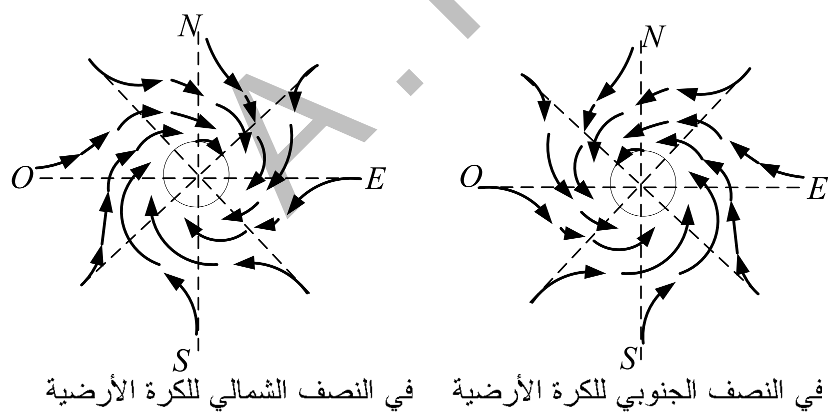
$$\vec{a}_a=\frac{d\vec{v}_r}{dt}+\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}\Rightarrow\boxed{\vec{a}_a=\vec{a}_r+2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)} \qquad (70.4)$$

الحد $2\vec{\omega}\wedge\vec{v}$ يسمى **تسارع كوريوليس**، و الحد $\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)$ يمثل تسارعا مركزيا.

كل من التسارعين (كوريوليس و المركزي) ناجمين عن الحركة النسبية **لدوران** الملاحظين.

يتجلى التسارعان في حركة الرياح الدوارة و الأعاصير (الصورة1.4)، و حتى في الماء المبتلع في حوض غسيل مثلا، إذ تظهر الحركة الدوارنية و يختلف اتجاهها حسب المنطقة من الكرة الأرضية التي تجري فيها الحادثة. في النصف الشمالي يكون الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة و في النصف الجنوبي يكون الدوران في اتجه عقارب الساعة.(الشكل 23.4)

الصورة 1.4



في النصف الشمالي للكرة الأرضية   في النصف الجنوبي للكرة الأرضية

الشكل23.4: إتجاه دوران إعصار أو دوامة هوائية (الرياح العاتية)

نختتم هذا الفصل بالإشارة إلى تسارع الجرّ في حالة حركة **دورانية غير منتظمة**.

بالرجوع إلى العبارة (59.4) فإن تسارع الجرّ هو:

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}$$

بوضع $\overrightarrow{OA} = \vec{r}\,'$ يمكن كتابة:

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left[\underbrace{x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt^2}}_{\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'}\right] = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'\right)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r} + \underbrace{\frac{d\vec{r}\,'}{dt}}_{\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'}\wedge\vec{\omega}$$

$$\boxed{\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}\,' + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'\right)} \qquad (71.4)$$

نلاحظ أن لتسارع الجرّ ثلاثة حدود حيث:

$\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}$: تسارع الحركة الانسحابية للمبدإ A للمرجع (Rr)بالنسبة للمرجع المطلق (Ra)،

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}\,'$: التسارع الناتج عن عدم انتظام دوران (Rr) بالنسبة للمرجع (Ra)، أي الناتج عن التسارع الزاوي للمرجع (Rr)،

$\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'$:التسارع المركزي الموجه نحو محور الدوران.

<u>و الخلاصة هي أنه بإدخال شعاع الدوران $\vec{\omega}$ يأخذ قانوني تركيب السرعات و التسارعات في الحالة العامة على التوالي العبارتين:</u>

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \Leftrightarrow \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right)}_{\vec{v}_e}} \qquad (72.4)$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}_{\vec{a}_a}=\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{AM}}{dt^2}}_{\vec{a}_r}+\underbrace{2.\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r}_{\vec{a}_c}+\underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{AM}+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\right)}_{\vec{a}_e}} \quad (73.4)$$

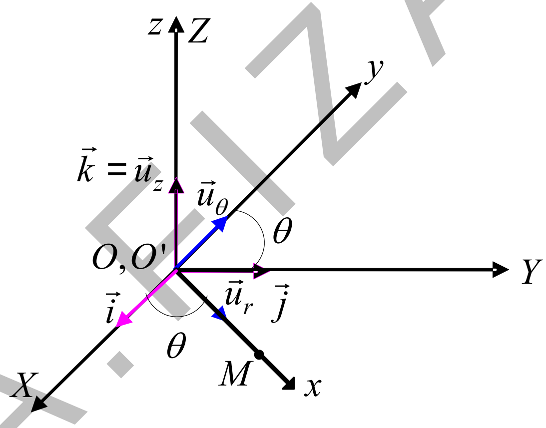
مثال 14.4:

نعتبر في المستوي الثابت OXY جملة محورين Oxy متحركين حيث يشكل المحور Ox زاوية θ مع المحور OX. تتحرك نقطة مادية M على المحور Ox و هي معرّفة بـ $r=OM$. أحسب:

1/ السرعة و التسارع النسبيين للنقطة M،
2/ سرعة و تسارع الجرّ،
3/ تسارع كوريوليس،
4/ إستنتج السرعة و التسارع المطلقين لـ M بالإحداثيات القطبية.

الحل:

ندرس حركة M في القاعدة المتحركة $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$. بالنسبة لـ M أشعة الواحدة $\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z$ مستقلة عن الزمن . الشكل24.4



الشكل 24.4

1/ شعاع الموضع: $\boxed{\overrightarrow{OM}=\vec{r}=\vec{r}\,'=r.\vec{u}_r}$ ، السرعة النسبية $\boxed{\vec{v}_r=\dot{r}.\vec{u}_r}$ و التسارع النسبي $\boxed{\vec{a}_r=\ddot{r}.\vec{u}_r}$

2/ سرعة الجرّ أي سرعة المحورين Oxy المتحركين بالنسبة للمستوى الساكن أو الثابت OXY هي:

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$
$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = 0 \quad (O \equiv O')$$
$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} = \dot{\theta}.\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta}$$

تسارع الجرّ أي تسارع المحورين Oxy المتحركين بالنسبة للمستوى الساكن أو الثابت OXY هو:

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \dot{\theta}.\vec{u}_z \wedge r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$
$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

3/ تسارع كوريوليس:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2.\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ \dot{r} & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

4/ السرعة المطلقة أي سرعة M بالنسبة للمستوى الساكن أو الثابت OXY هي:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta}$$

التسارع المطلق أي تسارع M بالنسبة للمستوى الساكن أو الثابت OXY هو:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right).\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right).\vec{u}_\theta}$$

❖ **ملاحظة**:إذا أردنا القيام بالحسابات بالنسبة للمعلم المتحرك نستعمل القاعدة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، فنعوض $\vec{u}$ و $\vec{u}_\theta$ في نتائج السرعات و التسارعات التي توصلنا إليها بـــ: $\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta$ و $\vec{u}_\theta = -\vec{i}.\sin\theta + \vec{j}.\cos\theta$

LEXIQUE معجم المصطلحات
Arabe-Français * I/ عربي- فرنسي

Français	عربية
	ا
instantané	آني
Initial	ابتدائي
Frottement	احتكاك
Coordonnées	إحداثيات
Réduction	اختزال
Terrestre	أرضي
Incertitude	إرتياب
Fondamental	أساسي
Puissance	استطاعة
Stabilité	استقرار
Continuité	استمرارية
Cylindre	اسطوانة
Collision	اصطدام
Convention	اصطلاح
Artificiel	اصطناعي
Maximal	أعظمي
Horizontal	أفقي
Cinétique	الحركية
Universel	العام
Ampère	أمبير
Tube	أنبوب
Conservation	انحفاظ
Courbure	انحناء
Glissement	انزلاق
Translation	انسحاب
Oscillatoire	اهتزازي
	ب
Bar	بار
Tonneau	برميل
Simple	بسيط
Dimension	بعد
	ت
Divergence	تباعد
Roulement	تدحرج ،(دوران)
Gradient	تدرج

Giration	تدوير
Rotationnel	تدوير
Gravitationnel	تدويري
Quadratique	تربيعي
Ordonnée	ترتيب
Nutation	ترنج أو كبو
Accélération	تسارع
Equiprojectivité	تساوي الاسقاطات
Classification	تصنيف
Application	تطبيق
Différentiel	تفاضل
Classique	تقليدي
Contact	تلامس
Coaltitude	تمام العرض
Symétrie	تناظر
Remarque	تنبيه
Equilibre	توازن
Harmonique	توافقي
ث	
Constant(e)	ثابت
Secondaire	ثانوي
Seconde	ثانية
ج	
Pesanteur	جاذبية
Algébrique	جبرية
Produit	جداء
Paroi	جدار
Entraînement	جر
Sous multiple	جزء
Particule	جسيمة
Atmosphère	جو
Sinus	جيب
Cosinus	جيب تمام
Sinusoïdal	جيبي
ح	
Volume	حجم
Volumique	حجمي
Mouvement	حركة
Champ	حقل
Hélicoïdal	حلزوني

Anneau	حلقة
	خ
Extérieur	خارجي
particulier	خاص
Propriété	خاصية
Erreur	خطأ
	د
Circulaire	دائري
Intérieur	داخلي
Poussée	دافعة
Exponentiel	دالة أسية
Degré	درجة
Température	درجة الحرارة
Degré kelvin	درجة كلفينية
Degré centésimale ou Celsius	درجة مئوية أو سلسوس
Rotation	دوران
Gravitation	دوراني
	ذ
Propre	ذاتي
	ر
Principal	رئيسية
Liaison	رابطة ، ربط
Réaction	رد الفعل
	ز
Angulaire	زاوي(ة)
Angle	زاوية
Temps	زمن
Horaire	زمني
	س
liquide	سائل
repos	ساكن
Vitesse aréolaire	سرعة المسح
Surface	سطح
Amplitude	سعة(مطال أعظمي)
Capacité	سعة(حالة مكثفة)
Scalaire	سلمية
permittivité	سماحية
Azimut	سمت
Vertical	شاقولي

ش	
Pseudo force	شبه قوة
Intensité	شدة
Vecteur	شعاع ، متجه
Figure	شكل
ص	
Choc	صدم
phase	صفحة أو طور
Plaque	صفيحة
Solide	صلب
ض	
Pression	ضغط
Lumineuse	ضوئية
ط	
Energie	طاقة
Précession	طواف أو مبادرة
Phase	طور ، صفحة
Longueur	طول
Module	طويلة ، شدة ، مقياس
ظ	
Tangente	ظل
Cotangente	ظل تمام
ع	
Expression	عبارة
Incompressible	عديم التمدد
Moment	عزم
Inertie	عطالة
Arc sinus	عكس الجيب
Arc tangente	عكس الظل
Arc cosinus	عكس جيب التمام
Arc cotangente	عكس ظل التمام
Relation	علاقة
Dynamique	علم التحريك
Statique	علم التوازن
Cinématique	علم الحركة
Altitude	علو
Travail	عمل
Colonne	عمود
Elément	عنصر

غ	
Gaz	**غاز**
Galiléen	**غاليلي**
ف	
Abscisse	**فاصلة**
Torseur	**فتال أو نظام المتجهات**
Espace	**فضاء**
Action	**فعل**
Effectif	**فعلي**
ق	
Loi	**قانون**
Projectile	**قذيفة**
Disque	**قرص**
Barre	**قضيب ، ساق**
Polaire	**قطبية**
Diagonal	**قطري**
Fond	**قعر**
Satellite	**قمر اصطناعي**
Candela	**قنديلة**
Force	**قوة**
Mesure	**قياس**
ك	
Cartésien	**كارتيزي ، ديكارتي**
Masse	**كتلة**
Densité	**كثافة**
Sphère	**كرة**
Potentiel	**كمون**
Quantité	**كمية**
Electrostatique	**كهروساكن ، كهرباء ساكنة**
Cosmique	**كوني**
Kilogramme	**كيلوغرام**
ل	
Instantané	**لحظي ، آني**
Cycloïde	**لولبي**
Mou	**لين**
م	
Fluide	**مائع**
Incliné	**مائل**
Hydraulique	**مائي**
Matière	**مادة**

Matériel	مادي
Manomètre	مانومتر
Principe	مبدأ
Retardé	متباطئ
Mobile	متحرك
vecteur	متجه
Mètre	متر
Superposé	متراكب
Equiprojectif	متساوي الاسقاطات
Perpendiculaire	متعامد ، عمودي
Variable	متغير
varié	متغير
Compressible	متمدد
Moyen	متوسط
Somme	مجموع
Creux	مجوف
Résultante	محصلة
axe	محور
Diagramme	مخطط
Référentiel	مرجع
Composantes	مركبات
Centre	مركز
Barycentre	مركز الكتلة
Elastique	مرن
Aire	مساحة
Trajectoire	مسار
Rectangle	مستطيل
Rectiligne	مستقيم
Plan	مستو
Dérivant	مشتق
Dérivée	مشتقة
Plane	مصفح
matrice	مصفوفة
Plein	مصمت
Multiple	مضاعف
Elongation	مطال
Exercé	مطبق
Absolu	مطلق
Equation	معادلة
Opérateur	معامل
Isolé	معزول

Repère	**معلم**
Notion	**مفهوم**
Grandeur	**مقدار**
Baromètre	**مقياس الضغط**
Presse	**مكبس**
Condensateur	**مكثفة**
Caractéristique	**مميز**
Discussion	**مناقشة**
Uniforme	**منتظم**
Courbe	**منحنى**
Curviligne	**منحني**
Parallèle	**موازي**
Communicant	**موصلة**
Position	**موضع، موقع**
Mole	**مول**
Mécanique	**ميكانيك**
	ن
Normale	**ناظمي**
Pulsation	**نبض**
Relatif	**نسبي**
Rayon	**نصف قطر**
Système	**نظام**
Théorème	**نظرية**
Permittivité	**نفوذية**
Point	**نقطة**
	هـ
Géométrique	**هندسي**
	و
Unitaire	**واحدة**
Unité	**وحدة**
Vase	**وعاء**

Français-Arabe * فرنسي-عربي /II

Français	عربية
A	
Abscisse	فاصلة
Absolu	مطلق
Accélération	تسارع
Action	فعل
Aire	مساحة
Algébrique	جبرية
Altitude	علو
Ampère	أمبير
Amplitude	سعة
Angle	زاوية
Angulaire	زاوي(ة)
Anneau	حلقة
Application	تطبيق
Arc cosinus	عكس جب التمام
Arc cotangente	عكس ظل التمام
Arc sinus	عكس جب
Arc tangente	عكس الظل
Artificiel	اصطناعي
Atmosphère	جو
axe	محور
Azimut	سمت
B	
Bar	بار
Baromètre	مقياس الضغط
Barre	قضيب ، ساق
Barycentre	مركز الكتلة
C	
Candela	قنديلة
Capacité	سعة
Caractéristique	مميزات
Cartésien	كارتيزي ، ديكارتي
Centre	مركز
Champ	حقل
Choc	صدم
Cinématique	علم الحركة
Cinétique	الحركية

Circulaire	دائري
Classification	تصنيف
Classique	تقليدي
Coaltitude	تمام العرض
Collision	اصطدام
Colonne	عمود
Communicant	موصلة
Composantes	مركبات
Compressible	متمدد
Condensateur	مكثفة
Conservation	انحفاظ
constante	ثابت(ة)
Contact	تلامس
Continuité	استمرارية
Convention	اصطلاح
Coordonnées	إحداثيات
Cosinus	جيب تمام
Cosmique	كوني
Cotangente	ظل تمام
Courbe	منحنى
Courbure	انحناء
Creux	مجوف
Curviligne	منحني
Cycloïde	لولبي
Cylindre	اسطوانة
D	
Degré	درجة
Degré centésimale ou Celsius	درجة مئوية أو سلسوس
Degré kelvin	درجة كلفينية
Densité	كثافة
Dérivant	مشتق
Dérivée	مشتقة
Diagonal	قطري
Diagramme	مخطط
Différentiel	تفاضل
Dimension	أبعاد
Discussion	مناقشة
Disque	قرص
Divergence	تباعد
Dynamique	علم التحريك

E	
Effectif	فعلي
Elastique	مرن
Electrostatique	كهروساكن ، كهرباء ساكنة
Elément	عنصر
Elongation	مطال
Energie	طاقة
Entraînement	جر
Equation	معادلة
Equilibre	توازن
Equiprojectif	متساوي الاسقاطات
Equiprojectivité	تساوي الاسقاطات
Erreur	خطأ
Espace	فضاء
Exercé	مطبق
Exponentiel	دالة أسية
Expression	عبارة
Extérieur	خارجي

F	
Figure	داخلي
Fluide	مائع
Fond	قعر
Fondamental	أساسي
Force	قوة
Frottement	احتكاك

G	
Galiléen	غاليلي
Gaz	غاز
Géométrique	هندسي
Giration	تدوير
Glissement	انزلاق
Gradient	تدرج
Grandeur	مقدار
Gravitation	دوراني
Gravitationnel	تدويري

H	
Harmonique	توافقي
hélicoïdal	حلزوني
Horaire	زمني
Horizontal	أفقي

Hydraulique	مائي
I	
Incertitude	إرتياب
Incliné	مائل
Incompressible	عديم التمدد
Inertie	عطالة
Initial	ابتدائي
Instantané	لحظي ، آني
Intensité	شدة
Intérieur	داخلي
Isolé(e)	معزول(ة)
K	
Kilogramme	كيلوغرام
L	
Liaison	رابطة ، ربط
liquide	سائل
Loi	قانون
Longueur	طول
Lumineuse	ضوئية
M	
Manomètre	مانومتر
Masse	كتلة
Matériel	مادي
Matière	مادة
Matrice	مصفوفة
Maximal	أعظمي
Mécanique	ميكانيك
Mesure	قياس
Mètre	متر
Mobile	متحرك
Module	طويلة ، شدة ، مقياس
Mole	مول
Moment	عزم
Mou	لين
Mouvement	حركة
Moyen	متوسط
Multiple	مضاعف
N	
Normale	ناظمي
Notion	مفهوم

Nutation	ترنج أو كبو

O

Opérateur	معامل
Ordonnée	ترتيب
Oscillatoire	اهتزازي

P

Parallèle	موازي
Paroi	جدار
Particule	جسيمة
particulier	خاص
Permittivité	نفوذية
Perpendiculaire	متعامد ، عمودي
Pesanteur	جاذبية
Phase	طور ، صفحة
Plan	مستو
Plane	مصفح
Plaque	صفيحة
Plein	مصمت
Point	نقطة
Polaire	قطبية
Position	موضع، موقع
Potentiel	كمون
Poussée	دافعة
Précession	طواف أو مبادرة
Presse	مكبس
Pression	ضغط
Principal	رئيسية
Principe	مبدأ
Produit	جداء
Projectile	قذيفة
Propre	ذاتي
Propriété	خاصية
Pseudo force	شبه قوة
Puissance	استطاعة
Pulsation	نبض

Q

Quadratique	تربيعي
Quantité	كمية

R	
Rayon	نصف قطر
Réaction	رد الفعل
Rectangle	مستطيل
Rectiligne	مستقيم
Réduction	اختزال
Référentiel	مرجع
Relatif	نسبي
Relation	علاقة
remarque	تنبيه
Repère	معلم
repos	ساكن
Résultante	محصلة
Retardé	متباطئ
Rotation	دوران
Rotationnel	تدوير
Roulement	تدحرج ، دوران

S	
Satellite	قمر اصطناعي
Scalaire	سلمية
Secondaire	ثانوي
Seconde	ثانية
Simple	بسيط
Sinus	جيب
Sinusoïdal	جيبي
Solide	صلب
Somme	مجموع
Sous multiple	جزء
Sphère	كرة
Stabilité	استقرار
Statique	علم التوازن
Superposé	متراكب
Surface	سطح
Symétrie	تناظر
Système	نظام

T	
Tangente	ظل
Température	درجة الحرارة

Temps	زمن
Terrestre	أرضي
Théorème	نظرية
Tonneau	برميل
Torseur	فتال أو نظام المتجهات
Trajectoire	مسار
Translation	انسحاب
Travail	عمل
Tube	أنبوب
U	
Uniforme	منتظم
Unitaire	واحدة
Unité	وحدة
Universel	العام
V	
Variable	متغير
varié	متغير
Vase	وعاء
Vecteur	شعاع ، متجه
Vertical	شاقولي
Vitesse aréolaire	سرعة المسح
Volume	حجم
Volumique	حجمي

Alphabet grec الأبجدية الإغريقية

النطق Prononciation	حروف مطبعية Majuscule	حروف صغيرة miniscule
Alpha	Α	α
Bêta	Β	β
gamma	Γ	γ
delta	Δ	δ
epsilon	Ε	ε
dzêta	Ζ	ζ
éta	Η	η
thêta	Θ	θ
iota	Ι	ι
kappa	Κ	κ
lambda	Λ	λ
mu	Μ	μ
nu	Ν	ν
xi	Ξ	ξ
oméga	Ω	ω
omicron	Ο	ο
pi	Π	π
rhô	Ρ	ρ
sigma	Σ	σ
tau	Τ	τ
upsilon	Υ	υ
phi	Φ	φ
Khi خي	Χ	χ
psi	Ψ	ψ

محتويات الجزء الثاني: تحريك النقطة المادية ، العمل و الطاقة

V.التحريك.. 1

1. مبدأ العطالة الغاليلي.. 1
2. كمية الحركة.. 1
3. قوانين نيوتن الأخرى... 3

مثال1.5.. 3

4. مفهوم القوة و قانون القوة.. 4
5. حركة قذيفة في حقل الجاذبية الأرضية............................ 5

مثال2.5.. 6

مثال3.5.. 6

6. قانون الجذب العام.. 6

مثال4.5.. 8

مثال5.5.. 8

7. قوى التلامس أو قوى الإرتباط.................................... 10
8. قوى لإحتكاك... 11

مثال6.5.. 12

مثال7.5.. 12

مثال8.5.. 13

مثال9.5.. 13

9. القوى المرنة.. 14
10. قوى العطالة أو شبه القوى 15

مثال10.5... 17

11. عزم قوة 17
12. العزم الحركي.. 19

مثال 11.5.. 21

VI. العمل و الطاقة.. 23

1. العمل و الإستطاعة.. 23
مثال1.6.. 25
مثال2.6.. 26
مثال3.6.. 26
2. الطاقة الحركية.. 26
مثال4.6.. 27
3. القوى المحافظة أو المشتقة من كمون................................ 28
مثال5.6.. 29
4. الطاقة الكامنة... 29
5. عبارة حقل القوة المحافظة انطلاقا من الطاقة الكامنة التي تشتق منها.... 32
مثال6.6.. 34
6. الطاقة الميكانيكية... 36
مثال7.6.. 39
7. تصادم الجسيمات.. 39
مثال8.6.. 40
مثال9.6.. 41
8. مناقشة منحنيات الطاقة الكامنة...................................... 42
9. القوى الغير محافظة.. 44

CENTRE UNIVERSITAIRE DE BECHAR

INSTITUT DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT TRONC COMMUN

Licence, Master, Doctorat
Science de la matière et sciences technologiques
(LMD/SM_ST)

COURS

LMD / PHYSIQUE-1

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Première partie :
Cinématique du point matériel

DEUXIEME EDITION

Ahmed FIZAZI
Chargé de cours

ANNEE UNIVERSITAIRE 2008-2009