✍ التمرين الأول : ☞

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 .
2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n > 1$.
3. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

أ. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية محددا أساسها .

ب. استنتج u_n بدلالة n .

✍ التمرين الثاني : ☞

لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \quad , \quad u_2 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2 \quad , \quad n \geq 2 \end{cases}$$

ونعتبر $(v_n)_{n\geq1}$ المتتالية العرفة كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. أحسب v_1 و v_2 و v_3 .
2. حدد طبيعة المتتالية العددية $(v_n)_{n\geq1}$.
3. أحسب v_n بدلالة n ؛ ثم استنتج u_n بدلالة n .

✍ التمرين الثالث : ☞

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3 .
2. بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad 0 < u_n < 1$ وأدرس رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$

أ. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية .

ب. أحسب v_n بدلالة n ؛ ثم استنتج u_n بدلالة n .

✍ التمرين الرابع : ☞

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \quad , \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ونعتبر $(v_n)_{n\geq0}$ المتتالية العرفة بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. أحسب u_2 و v_0 .
2. بين أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .
3. أحسب ؛ بدلالة n ؛ المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$
4. استنتج u_n بدلالة n .

✍ التمرين الخامس : ☞

نعتبر $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 8 \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$\forall n \in \mathbb{N} : \quad v_n = u_n + 4$.

1. حدد طبيعة المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. حدد $\mathcal{V}_n$ بدلالة n ؛ ثم استنتج u_n بدلالة n .
3. حدد؛ بدلالة n ؛ المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

✍ التمرين السادس : ☞

نعتبر $(u_n)_{n\geq1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n + 3 + 2nu_n}{3n + 3} \quad , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ بحيث : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad v_n = n(1 - u_n)$.

1. أحسب u_2 و v_1 .
2. بين أن $(v_n)_{n\geq1}$ هندسية أساسها $\dfrac{2}{3}$.
3. أحسب v_n ثم u_n بدلالة n .
4. أحسب، بدلالة n ،المجموع التالي : $S_n = u_1 + 2u_2 + ... + nu_n$

✍ التمرين السابع : ☞

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + 2u_n} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. نعتبر $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العرفة بما يلي :

$\forall n \in \mathbb{N} : \quad v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

أ. بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية وحدد أساسها

وحدها الأول .
ب. استنتج v_n ثم u_n بدلالة n ..
2. نعتبر المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كالآتي :
$\forall n\in\mathbb{N}:\quad w_n = 2^{v_n}$.
أ. بين أن المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية وحدد أساسها q وحدها الأول w_0 .
ب. أحسب ، بدلالة n ، المجموع :
$S_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$.

التمرين الثامن :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad , \quad u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{3u_{n-1}\times u_{n-2}}{u_{n-2}+2u_{n-1}} \quad , \quad n\geq 2 \end{cases}$$

نضع : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : \quad v_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}}$.

1. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية محددا أساسها q وحدها الأول v_1 .
2. أحسب u_n بدلالة n .

التمرين التاسع :

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) بحيث :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad , \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \quad , \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

و $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad v_n = u_n - 3^n$

1. بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.
2. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية وحدد أساسها و حدها الأول .
3. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمرين العاشر :

لتكن a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة مثنى مثنى وتحقق ما يلي :

i. a و b و c تكون (بهذا الترتيب) حدودا متتابعة من متتالية حسابية .
ii. b و c و a تكون (بهذا الترتيب) حدودا متتابعة من متتالية هندسية .
iii. $a+b+c=18$.

أحسب مجموع الحدود الستة الأولى لكل من المتتاليتين .

التمرين الحادي عشر :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{2}{5}u_{n+1} - \dfrac{1}{25}u_n \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

نضع : $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{5}u_n$ و $w_n = 5^n u_n \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

1. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{5}$ ، ثم حدد v_n بدلالة n .
2. أ- بين أن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها 5 .
ب- أكتب w_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .
3. أ- بين أن : $0 < u_{n+1} \leq \dfrac{2}{5}u_n \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$.
ب- استنتج أن : $0 < u_n \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ ، ثم أعط تأطيرا للحد u_{10} .

التمرين الثاني عشر :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتاليتين المعرفتين كالآتي :

$$\forall n\in\mathbb{N}: \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{5v_n - u_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{4v_n - u_n}{3} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = 0 \end{cases} .$$

نضع : $\mathscr{Y}_n = 5v_n - 2u_n \quad ; \quad \mathscr{X}_n = 3v_n - u_n \quad : \forall n\in\mathbb{N}$.

1. بين أن $(\mathscr{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(\mathscr{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين هندسيتين يتم حديد أساسيهما .
2. حدد ، بدلالة n ، كلا من $\mathscr{X}_n$ و $\mathscr{Y}_n$.
3. حدد ، بدلالة n ، كلا من u_n و v_n .
5. نضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + ... + v_n \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.
حدد S_n بدلالة n .

التمرين الثالث عشر :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2}u_n^2 + 1} \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب الحدين u_1 و u_2 .
2. لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي :
$\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad v_n = u_n^2 - 2$
أ- بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول .
ب- استنتج u_n بدلالة n .
3. أ- بين أن : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2} \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$.
ب- استنتج أن: $\sqrt{2} \leq u_n \leq \sqrt{2}\left[1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$
ج- استنتج تأطيرا للحد u_4 .

4. حدد ، بدلالة n ، $S_n = u_0^2+u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2$.

التمرين الرابع عشر :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{\sqrt{2u_n^2+2}} \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. أ- أحسب الحدين u_1 و u_2 .

ب- بين أن :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad 1-{}_{n+1} = \frac{(1-u_n)^2}{\left(\sqrt{2u_n^2+2}\right)\left(\sqrt{2u_n^2+2}+u_n+1\right)}$$

ج- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad 0\le u_n<1$.

2. أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \dfrac{|u_n-1|}{\sqrt{u_n^2+1}}\le 1$.

ب- استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad |u_{n+1}-1|\le \dfrac{1}{\sqrt{2}}|u_n-1|$.

ج- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad |u_n-1|\le\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ ،

ثم استنتج تأطيرا للحد u_4 .

التمرين الخامس عشر :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3+u_n^2}{1+u_n} \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad u_n>0$.

2. أ- تحقق أن: $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad 3-u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}(3-u_n)$

ب- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad u_n<3$.

3. بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية قطعا .

4. أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \dfrac{u_n}{1+u_n}-\dfrac{3}{4}<0$.

ب- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad 0<3-u_n\le 2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

ج- استنتج تأطيرا للحد u_4 .

التمرين السادس عشر :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1}+3u_{n-2} \quad ; \quad n\ge 2 \end{cases}$$

و لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : \quad v_n = au_n+bu_{n-1}$$

حيث a و b عددان حقيقيان غير منعدمان .

1. أ- أحسب u_2 و u_3 .

ب- أحسب v_1 و v_2 و v_3 بدلالة a و b .

ج- بين أنه إذا كانت v_1 و v_2 و v_3 ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن : $3a^2-2ab-b^2=0$.

2. نضع $b=a$:

أ- بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .

ب- أحسب v_n بدلالة n و a .

ج- استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : \quad u_n+u_{n-1}=3^n$.

3. نضع $b=-3a$:

أ- بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .

ب- أحسب v_n بدلالة n و a .

ج- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : \quad u_n-3u_{n-1}=(-1)^n$.

4. بين أن :

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية $\Leftrightarrow$ $[b=a$ أو $b=-3a]$

5. أ- حدد u_n بدلالة n .

ب- حدد بدلالة n ، المجموع التالي :

$S_n=u_0+u_1+\dots+u_{2n}$.

التمرين السابع عشر :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad u_n>0$.

ب- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

2. نعتبر $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad v_n = u_n\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

أ- بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .

ب- حدد v_n بدلالة n .

ج- استنتج v_n بدلالة n .

بالتوفيق إنشاء الله