الموضوع 1 : تصحيح

1\ الدالة $x \to x+3$ موجبة تماما وقابلة الإشتقاق على $[0;+\infty[$.

منه الدالة $x \to \ln(x+3)$ قابلة الإشتقاق على $[0;+\infty[$.

الدالة $x \to x+3$ لا تنعدم وقابلة الإشتقاق على $[0;+\infty[$.

بالقسمة ، الدالة f قابلة الإشتقاق على $[0;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{[\ln(x+3)]'(x+3) - [\ln(x+3)](x+3)'}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{\frac{(x+3)'}{(x+3)}(x+3) - \ln(x+3)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$$

$f'(x)$ له إشارة $1-\ln(x+3)$.

- $1-\ln(x+3)=0$ يعني $\ln(x+3)=1$

أي $\ln(x+3)=\ln(e)$

أي $x+3=e$

أي $x=e-3$ (لا ينتمي إلى $[0;+\infty[$)

المعادلة ليست لها حلول في $[0;+\infty[$

- $1-\ln(x+3)>0$ يعني $\ln(x+3)<1$

أي $\ln(x+3)<\ln(e)$

أي $x+3<e$

أي $x<e-3$ (مستحيل لأن $x \in [0;+\infty[$)

المتراجحة ليست لها حلول في $]0;+\infty[$.

منه ، مهما كان x من $]0;+\infty[$ لدينا $1-\ln(x+3)<0$ أي $f\,'x)<0$.

الدالة f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$. من جهة أخرى :

$f(0)=\dfrac{\ln 3}{3}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ لأن : $x+3\to+\infty$ و $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln(u)}{u}=0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	$\dfrac{\ln(3)}{3}$ $\searrow$ 0

2\ a) f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ و منه :

$n\le x\le n+1$ يعني $f(n)\ge f(x)\ge f(n+1)$

أي $f(n+1)\le f(x)\le f(n)$

b) ليكن $n\in N$. الدالة f مستمرة على المجال $[n;n+1]$ لأنها قابلة الإشتقاق .

نعلم أن مهما كان x من $[n;n+1]$ فإن $f(n+1)\le f(x)\le f(n)$

و منه $\displaystyle\int_n^{n+1} f(n+1)dx\le\int_n^{n+1} f(x)dx\le\int_n^{n+1} f(n)dx$

- $\displaystyle\int_n^{n+1} f(n+1)dx = f(n+1)\int_n^{n+1} dx$ (لأن $f(n+1)$ ثابت)

$$= f(n+1).\left[(n+1)-n\right]$$
$$= f(n+1)$$

- $\displaystyle\int_n^{n+1} f(n)dx = f(n)\int_n^{n+1} dx$ (لأن $f(n)$ ثابت)

$$= f(n).\left[(n+1)-n\right]$$
$$= f(n)$$

- $\int_n^{n+1} f(x)dx = u_n$

نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن : $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$

c) نعلم أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و منه : $\lim_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$ ؛ $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$

بالمقارنة : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0 .

3\ a) لحظنا سابقا أن الدالة $x \to \ln(x+3)$ قابلة الإشتقاق على $[0;+\infty[$.

منه الدالة F قابلة الإشتقاق على $[0;+\infty[$.

$$F'(x) = \left(\left[\ln(x+3)\right]^2\right)' = 2\left[\ln(x+3)\right]\left[\ln(x+3)\right]'$$
$$= 2\left[\ln(x+3)\right] \times \frac{1}{x+3} = 2\frac{\ln(x+3)}{x+3}$$

b) حساب $I_n = \int_0^n f(x)dx$: نلاحظ أن $F'(x) = 2f(x)$ أي

$f(x) = \frac{1}{2}F'(x)$. منه الدالة $\frac{F}{2}$ هي دالة أصلية لـِ f على $[0;+\infty[$.

مهما كان n من N :
$$I_n = \int_0^n f(x)dx = \left[\frac{F(x)}{2}\right]_0^n$$
$$= \frac{F(n)}{2} - \frac{F(0)}{2}$$
$$\frac{\left[\ln(n+3)\right]^2}{2} - \frac{\left[\ln(3)\right]^2}{2}$$

4\ مهما كان n من N :
$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$$
$$= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \ldots + \int_{n-1}^n f(x)dx$$

و حسب علاقة $Chasles$: $S_n = \int_0^n f(x)dx = I_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ لأن $\begin{cases} n+3 \to +\infty \\ \ln(n+3) \to +\infty \\ \left[\ln(n+3)\right]^2 \to +\infty \end{cases}$ المتتالية $\left(S_n\right)$ متباعدة