1 . المكثفة و ثنائي القطب RC

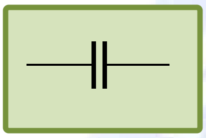
تصميم الدرس

1 . 1 . خصائص المكثفة.

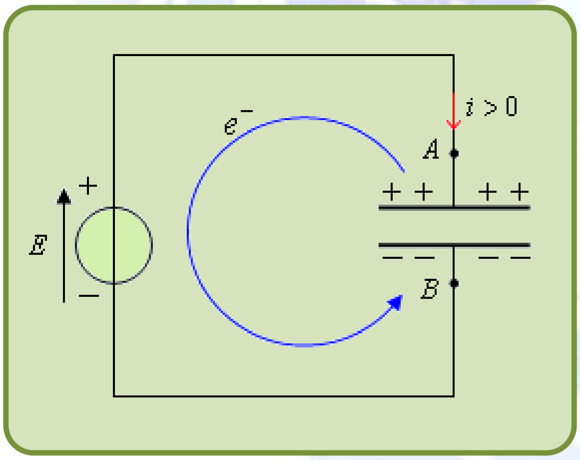
1 . 1 . 1 . وصف المكثفة

أ . تقديم و وصف المكثفة

المكثفة عنصر كهربائي قادر على تخزين الشحن الكهربائية. تتكون المكثفة من ناقلين كهربائيين يدعى كل منهما لبوسا. تفصل بين اللبوسين مادة عازلة كهربائيا مثل: الهواء، الشمع، الميكا ... الخ. تم اصطناع أول مكثفة في عام 1745 من طرف الهولندي لايد وسميت باسمه



(زجاجة لايد) يرمز للمكثفة في دارة كهربائية بالرمز المقابل.

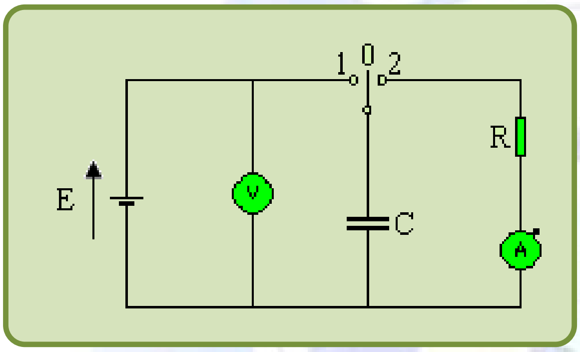


لا يمر التيار الكهربائي المستمر في دارة كهربائية تحتوي على التسلسل على مكثفة ومولد كما هو مبين على الوثيقة المقابلة، لأن العازل يمنع انتقال الالكترونات من لبوس لآخر.

إن دور المكثفة يشبه دور العصب الذي تطرقنا إليه في النشاط التمهيدي(3) حيث لا تتمكن حوامل الشحنات (الشوارد) من عبور غشاء العصب إلا بعد تنبيهه وفتح قنوات للعبور، أما في دارة المكثفة، فإن البطارية تعمل على نقل حوامل الشحنات الكهربائية (الإلكترونات) من

أحد اللبوسين إلى اللبوس الآخر عبر أسلاك التوصيل دون أن تمر عبر العازل الذي يشبه دوره دور الغشاء المحيط بالعصب.

تكون،عند كل لحظة، الشحنة الكهربائية الكلية للمكثفة معدومة لأن اللبوسين يحملان نفس الكمية من الشحن ويختلفان في الإشارة. عندما نتكلم عن شحنة المكثفة فإننا نقصد الشحنة التي نجدها على أحد اللبوسين (الموجب أم السالب).

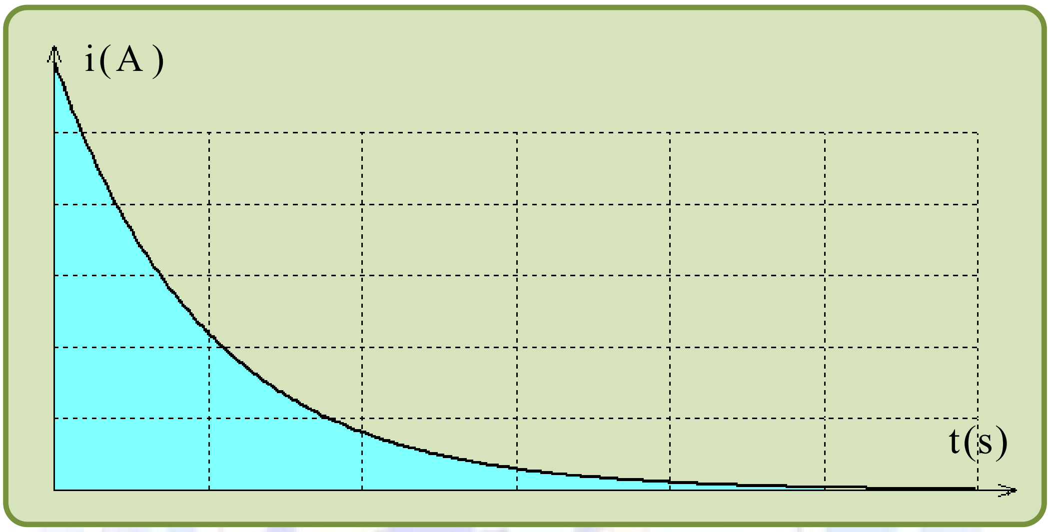


لإيجاد كمية الشحنة على أحد لبوسي المكثفة، نحقق الدارة الكهربائية المقابلة.

تشحن المكثفة بوضع القاطعة في الوضع (1) ثم تفرغ بعد وضع القاطعة في الوضع (2) و نقرأ كل 5 s شدة التيار بواسطة مقياس الأمبير متر. تسمح لنا نتائج القياس برسم البيان التالي:

تمثل مساحة الشريط المهشر في البيان كمية الشحنة Δq الموجودة على أحد اللبوسين خلال الفترة الزمنية القصيرة Δt .

أما كمية الشحنة خلال عملية الشحن فهي تمثل مساحة الشكل المحصور تحت البيان $i = f(t)$ (المساحة الملونة باللون الأزرق) كما هو مبين على الشكل التالي:



ب . سعة المكثفة

لكل مكثفة خاصية تدعى السعة وهي قدرة المكثفة على تخزين الشحن الكهربائية. تزداد قيمة الشحنة التي تخزنها المكثفة، تحت نفس التوتر الكهربائي، كلما زادت سعة المكثفة.

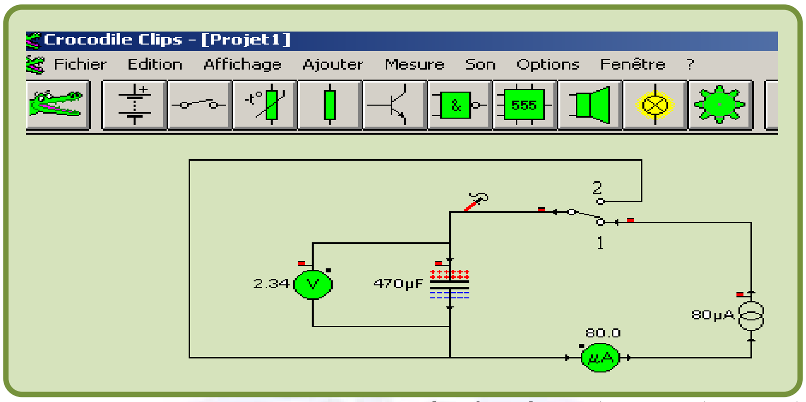
نقترح طريقتين لتحديد سعة مكثفة.

الطريقة الأولى:

نشاط

لتحقيق هذا النشاط نستعمل برنامج CROCOdile CLIPS .

نحقق التركيب المبين على الشكل التالي:

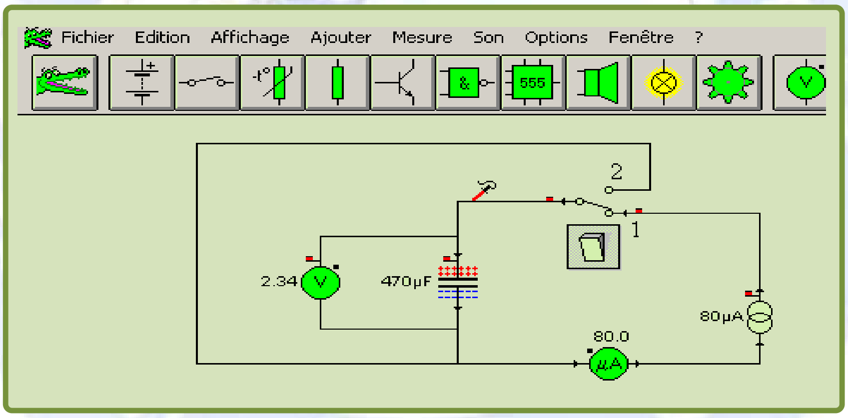


– نستعمل مكثفة يكون مكتوبا عليها $C = 470\,\mu F$

– يغذي الدارة مولد للتيار المستمر بتيار ثابت قيمته $i = 80\,\mu A$

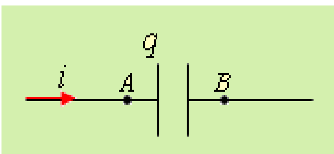
– يوصل في الدارة أمبير متر و فولط متر كما هو مبين على التركيب،

كما أننا نصل راسم الاهتزاز المهبطي كما هو مبين على الشكل التالي:



قبل الشروع في الدراسة تكون القاطعة في الوضع 2.

نقلب القاطعة في الوضع 1 ونتابع تغيرات التوتر u_C بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن.



نعتبر أن شدة التيار التي تجتاز الفرع الذي يحتوي على المكثفة تعطى بالعلاقة: $i = \frac{dq}{dt}$

1 – ما هي قيمة الشحنة q_A في اللحظة $t = 0$ ؟

2 – علما أن شدة التيار في هذه التجربة هي شدة ثابتة و قيمتها (i)،
بين أنه من أجل $t>0$ فإن q_A تتناسب طرديا مع t. ما هو ثابت التناسب ؟

3 – تسمح نتائج المتابعة بالحصول على البيان التالي:

باستعمال هذا البيان و كذلك نتيجة السؤال السابق، بين أن q_A تتناسب طردا مع u_c.

4 – ثابت التناسب الموجود بين q_A و u_c هو مقدار مميز للمكثفات، يدعى **السعة.** يرمز لهذا المقدار بالرمز C و وحدته في جملة الوحدات الدولية هي الفاراد (F). استنتج قيمة سعة المكثفة التي استعملت في هذه التجربة ثم قارنها مع القيمة التي كتبت عليها.

5 – لماذا يجب تفادي لمس قطبي مكثفة مشحونة ؟

6 – لماذا توضع هذه المعلومة على بعض الأجهزة الإلكترومنزلية " يجب عدم فتح الجهاز حتى ولو كان خارج التغذية " ؟

7– استنتج العبارة التي تربط شحنة المكثفة q بسعتها C والتوتر u_C المطبيق بين طرفيها.

تحليل النشاط :

1 – في اللحظة $t = 0$ تكون $q_A = 0$.

2 – لدينا من معطيات التحليل : $i = \frac{dq}{dt}$

و منه نجد: $q_A = i.t + q_A(t = 0)$

و بما أنه في اللحظة $t = 0$ تكون $q_A = 0$، نجد:

$$q_A = i.t \quad ....(1)$$

نلاحظ أن ثابت التناسب هو : i

3 – البيان الذي تحصلنا عليه عبارة عن خط مستقيم يمر من المبدأ، معادلته :

$$u_c = K.t \quad ....(2)$$

حيث يمثل K ثابت التناسب وهو كذلك معامل توجيه المستقيم.

نستخرج الزمن t من العبارة (2):

$$t = \frac{u_c}{K} \quad .... \; (3)$$

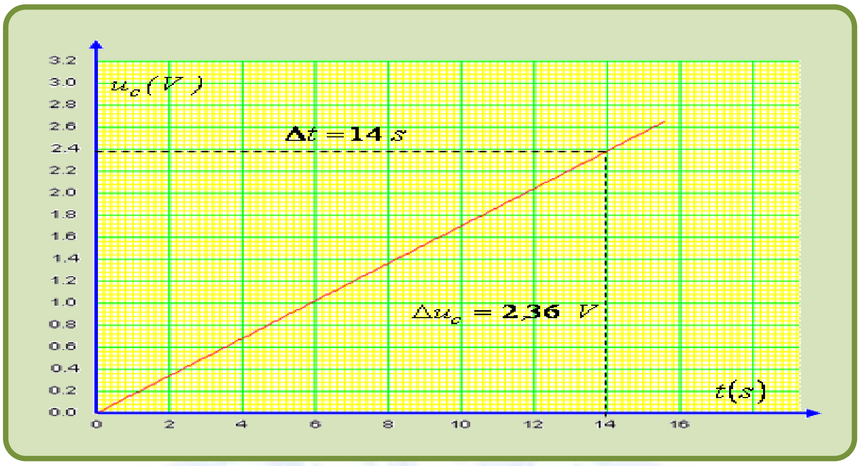
نعوض (3) في (1) فنجد:

$$q_A = \left(\frac{i}{K}\right).u_c$$

مع $\left(\frac{i}{K}\right) = cst$.

4 – حسب نص النشاط يمكن أن نضع: $C = \left(\frac{i}{K}\right)$

– من البيان نجد :



$$K = \frac{\Delta u_C}{\Delta t} = \frac{2{,}36}{\mathbf{14}} = 0{,}17$$

و منه نستنتج قيمة السعة: $C = \frac{i}{K} = \frac{80.10^{-6}}{0{,}17} = 470{,}6\ \mu\mathbf{F}$

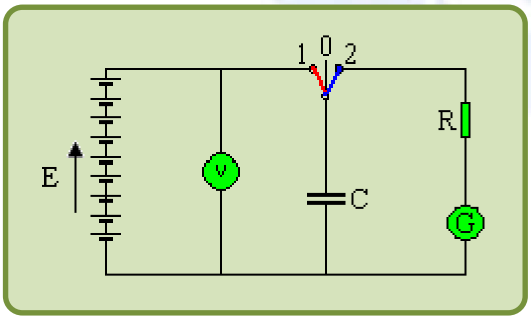
$$C = 470{,}6\ \mu\mathbf{F}$$

نرى أن القيمة التي أشار إليها الصانع تتفق مع القيمة التي تم استخراجها من خلال هذه الدراسة.

7 – نستنتج من خلال هذه الدراسة العلاقة التي تربط شحنة المكثفة q بسعتها C والتوتر u_C المطبق بين طرفيها:

$$q = C\,.u_c$$

الطريقة الثانية :



نحقق التركيب المبين على الشكل المقابل.

نشحن المكثفة بوضع القاطعة في الوضع 1 ثم نفرغها بنقل القاطعة للوضع 2. بواسطة مقياس غلفاني يتعلق انحرافه بكمية الكهرباء التي تمر فيه، يمكن معرفة شحنة المكثفة Q. نقيس بواسطة مقياس الفولط متر

التوتر الكهربائي u_{AB} بين طرفي المكثفة. بتكرار التجربة عدة مرات و تغيير u_{AB} في كل مرة، نحصل على نتائج إحدى التجارب المسجلة في الجدول التالي:

u_{AB} (V)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$Q (10^{-8} C)$	0	10,4	20,8	31,2	41,6	52,0

نرسم تغيرات $Q = f (t)$ فنحصل على البيان المبين على الشكل التالي:

نلاحظ أن البيان عبارة عن خط مستقيم يمر من المبدأ وبالتالي معادلته تكون من الشكل: $Q = a.u_{AB}$ حيث a هو معامل توجيه المستقيم.

ومنه نستنتج أن الشحنة Q تتناسب طردا مع التوتر الكهربائي u_{AB} المطبق بين اللبوسين.

نسمي الكسر الموجود بين الشحنة Q و التوتر u_{AB} : **سعة المكثفة**

يرمز لهذا المقدار بالرمز C وهو يعطى بالعلاقة:

$$C = \frac{Q}{u_{AB}}$$

وحدة السعة في جملة الوحدات الدولية هي الفاراد (F) .

وحدة الشحنة Q في جملة الوحدات الدولية هي الكولون (C)، وحدة التوتر u_{AB} هي الفولط (V).

إن قيمة سعة المكثفة المستعملة في هذه التجربة هي قيمة معامل توجيه المستقيم. عند حساب قيمة الميل نجد: $C = a = 0{,}5.10^{-9}\ F = 0{,}5\ nF$

جـ . وحدة قياس سعة المكثفة – الفاراد Farad

إن وحدة قياس سعة المكثفة هي الفاراد التي يرمز لها بالرمز F ، وتعتبر هذه الوحدة كبيرة جدا لذا في أغلب الأحيان نستعمل أجزاء الفاراد التي هي:

– الميكروفاراد (μF): $1\ \mu F = 10^{-6}\ F$.

– النانوفاراد (nF) : $1\ nF = 10^{-9}\ F$.

– البيكوفاراد (pF): $1\ pF = 10^{-12}\ F$.

د . بعض أنواع المكثفات

نجد المكثفة في عالم الإلكترونيات على عدة أشكال وأنواع، منها:

– المكثفة المستوية

وهي مكثفة لبوساها مستويان متوازيان البعد بينهما (d) وسطح كل منهما (S) حيث d صغير بالنسبة لـ S كما هو مبين على الشكل المقابل

يمكن حساب سعة هذه المكثفة بالعلاقة التالية :

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

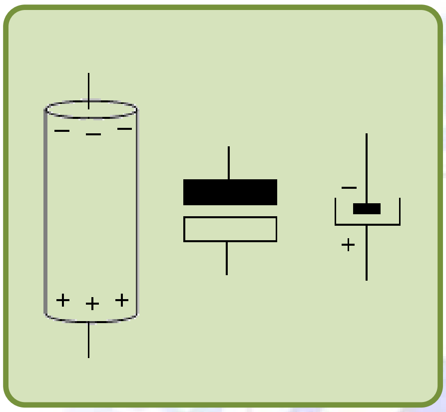
ε ثابت العزل الكهربائي: $\varepsilon = \varepsilon_0 \times \varepsilon_r$.

ε_0 ثابت العازل الكهربائي المطلق للفراغ حيث $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ F/m$

ε_r ثابت العزل الكهربائي النسبي (يميز العازل).

	الهواء	برافين	ورق مبرون	زجاج	ميكا	إيثانول	الماء
ε_r	1	2,2	4,5	4 ….6	7	24	80

– المكثفة الإلكتروكيميائية

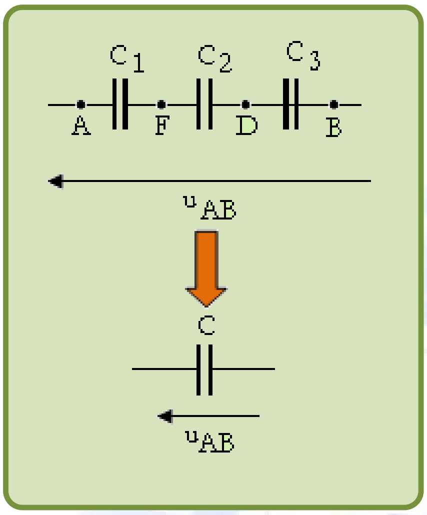


يوجد نوع آخر من المكثفات يدعى المكثفات الإلكتروكيميائية وهي مكثفات مستقطبة. يستعمل هذا النوع من المكثفات مع التيار المستمر حيث يراعى توصيل المكثفة حسب استقطابها الذي يشير إليه الصانع بإشارة (–).

نحصل على هذا النوع من المكثفات بعملية التحليل الكهربائي لملح كلور الألمنيوم باستعمال مساري (إلكترودات) من الألمنيوم، فنحصل عند المصعد على طبقة رقيقة عازلة من الألومين. تتحمل هذه المكثفات توترات عالية، سعتها كبيرة، ولكن إذا لم يحترم استقطابها عند توصيلها في الدارة فإنها تتلف.

1 . 1 . 2 . تجميع المكثفات

أ. التجميع على التسلسل:



يمثل الشكل المقابل ثلاث مكثفات موصولة على التسلسل كما هو مبين على الشكل المقابل

بتطبيق قانون جمع التوترات نكتب:

$u_{AB} = u_1 + u_2 + u_3$.

ومنه نكتب: $\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$

بما أن التوصيل على التسلسل هذا يعني أن :

$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$

ومنه نصل إلى:

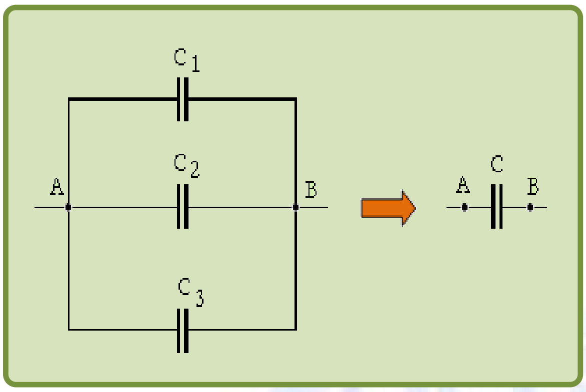
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

يمكن تعميم هذه النتيجة من أجل عدة مكثفات كما يلي:

مقلوب سعة المكثفة التي تكافؤ مجموعة من المكثفات موصولة على التسلسل يساوي مجموع مقلوب سعات هذه المكثفات.

نتيجة هذا الجمع يجعل سعة المكثفة المكافئة ضعيفة ولكن يجعل المكثفة المكافئة تتحمل توتر أعلى من التوتر الذي تتحمله كل مكثفة على حدة

ب. التجميع على التفرع :



لدينا ثلاث مكثفات موصلة على التفرع كما هو مبين على الشكل المقابل.

شحنة المكثفة المكافئة تساوي مجموع الشحن التي توجد على كل مكثفة: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

ومنه نكتب : $C.u_{AB} = C_1.u_{AB} + C_2.u_{AB} + C_3.u_{AB}$

ومنه نجد :

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

يمكن تعميم هذه النتيجة من أجل عدة مكثفات كما يلي:

سعة المكثفة التي تكافيء مجموعة من المكثفات موصولة على التفرع يساوي مجموع سعات المكثفات.

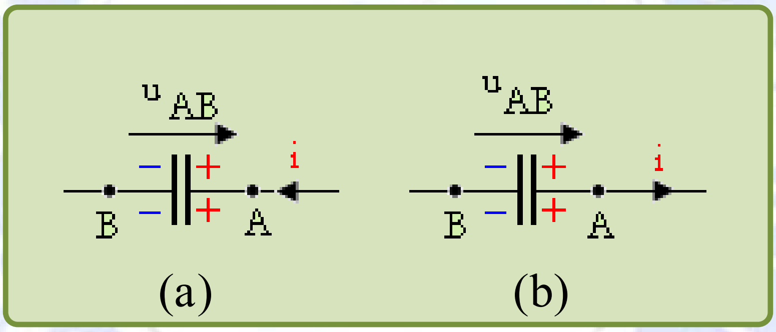
نتيجة هذا الجمع يجعل سعة المكثفة المكافئة كبيرة وهو ما يسمح باستعمال توتر ضعيف للحصول على شحنة كبيرة لا توفرها كل مكثفة على حدة.

1 . 1 . 3 . العلاقة بين شدة التيار الكهربائي والشحنة

ترتبط شدة التيار الكهربائي الذي يجتاز مكثفة، والشحنة الموجودة على أحد لبوسيها بالعلاقة التالية: $i = \frac{dq_A}{dt}$

– إذا كانت $i > 0$ يكون $i = \frac{dq_A}{dt} > 0$ و بذلك تتزايد قيمة q_A (شكل a)

– إذا كانت $i < 0$ يكون $i = \frac{dq_A}{dt} < 0$ و بذلك تتناقص قيمة q_A (شكل b)



ملاحظة

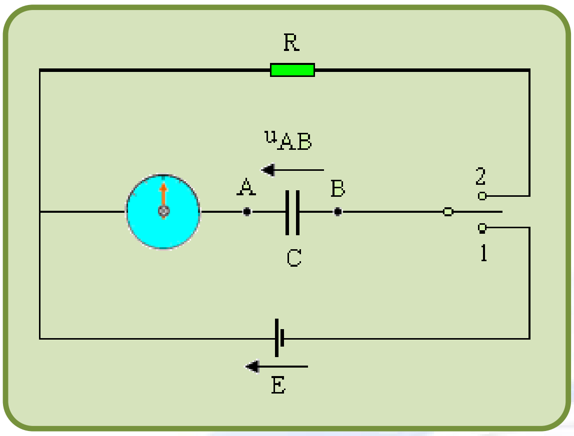
يمكن التعبير عن شدة التيار الكهربائي خلال شحن المكثفة بتيار شدته I ثابتة و تعطى هذه الشدة بالعلاقة: $Q = I.t$ و منه $I = \frac{Q}{t}$

إن العلاقة التي تربط كلا من شدة التيار الكهربائي i والسعة C للمكثفة والتوتر u_{AB} المطبق بين طرفي المكثفة هي:

$$i(t) = \frac{dq_A}{dt} = \frac{d(C.u_{AB})}{dt} = C\frac{du_{AB}}{dt}$$

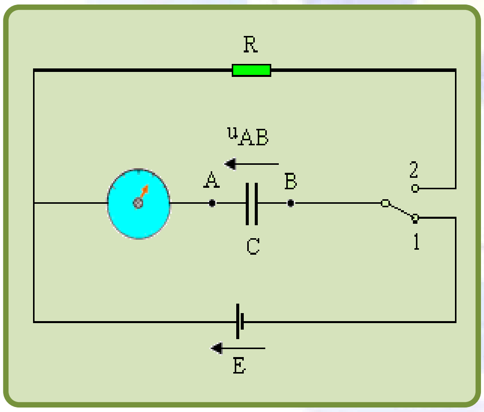
1 . 2 . شحن وتفريغ مكثفة

لكي نتعرف على آلية شحن و تفريغ المكثفة، نحقق الدارة الكهربائية التالية:



1 . 2 . 1 . شحن المكثفة.

لشحن المكثفة نضع القاطعة في الوضع 1 أي أن المكثفة تكون في جزء الدارة الذي يحتوي على المولد.



نلاحظ انحراف مؤشر المقياس الغلفاني بسرعة في الاتجاه المبين على الشكل التالي ثم يعود مباشرة إلى الصفر.

يدل هذا على أن الدارة يجتازها تيار كهربائي ولكن لفترة زمنية قصيرة.

يدعى هذا التيار **تيار الشحن**.

نفسر مجهريا بأن التيار الكهربائي المار بالدارة ناتج عن الانتقال السريع للإلكترونات نحو اللبوس B لكن وجود العازل لا يسمح لهذه الالكترونات بالانتقال إلى اللبوس A . اذا تتراكم عند اللبوس B ويشحن سلبا. في نفس الوقت تغادر الالكترونات اللبوس A ويشحن بذلك هذا اللبوس إيجابا. عندما يصبح عدد الالكترونات التي تغادر اللبوس A مساويا لعدد

الالكترونات التي تصل إلى اللبوس B، نقول بأن عملية الشحن انتهت وأصبحت المكثفة مشحونة.

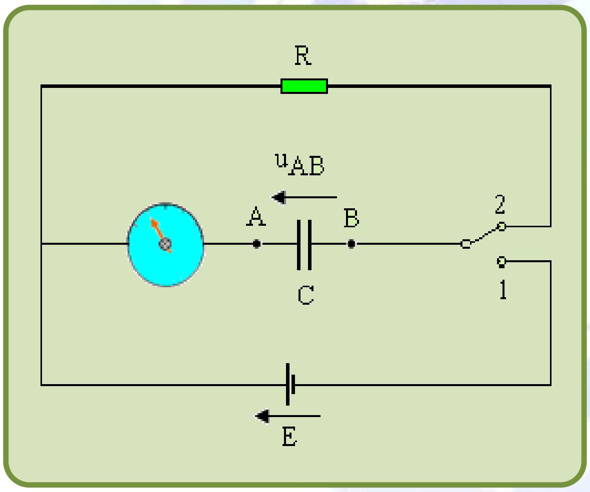
عندها تتحقق العلاقة التالية: $q_B = - q_A$ أو $|q_B| = |q_A|$ حيث $q_A = n|e^-|$.

يمثل n عدد الالكترونات التي تغادر اللبوس A أو تصل إلى اللبوس B .

نسمي q_A أو q_B **شحنة المكثفة**.

1 . 2 . 2 . تفريغ المكثفة

نضع القاطعة في الوضع 2، وفي هذه الحالة يكون المولد خارج الدارة.



نلاحظ أن مؤشر المقياس الغلفاني ينحرف عكس الاتجاه الذي انحرف فيه لما وضعت القاطعة في الوضع 1، ثم يعود إلى الصفر. يدل هذا على أن الدارة يجتازها تيار كهربائي لفترة زمنية قصيرة.

يدعى هذا التيار **تيار التفريغ**.

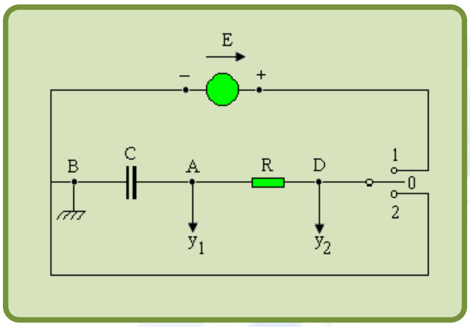
نفسر مجهريا ما حدث بأن الالكترونات تنتقل عبر المقاومة من اللبوس B إلى اللبوس A حتى يصبح اللبوسان معتدلين كهربائيا وعندها يعود مؤشر المقياس الغلفاني إلى التدريجة صفر. نقول إن المكثفة قد أفرغت.

النتيجة :

تخزن المكثفة أثناء شحنها كمية من الكهرباء وتعيدها أثناء التفريغ.

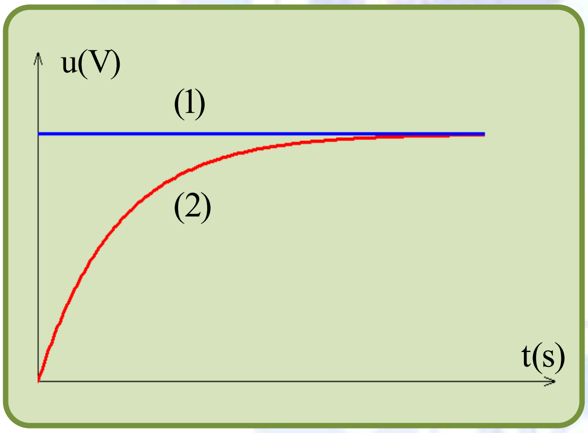
1 . 3 . تطور التوتر الكهربائي بين طرفي مكثفة

1 . 3 . 1 . خلال الشحن



نستغل النشاط التمهيدي رقم 5 الذي يستعمل التركيب المقابل.

عند وضع القاطعة في الوضع 1 نرى على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي البيانين 1 و 2 التاليين :

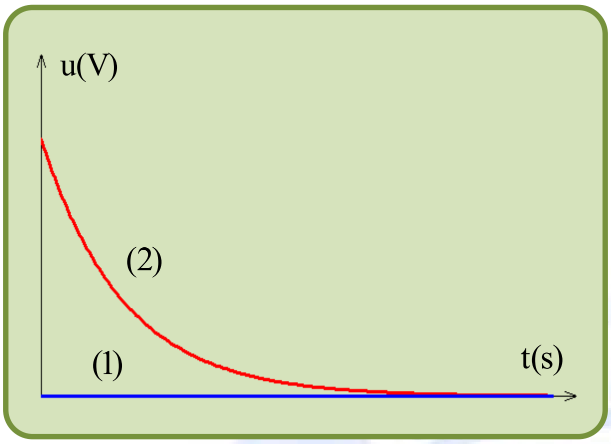


حيث يمثل البيان 1 التوتر u_{DB} بين طرفي المولد و هو ثابت وقيمته تساوي E بينما يمثل البيان 2 التوتر u_{AB} بين طرفي المكثفة حيث يتطور هذا التوتر تدريجيا خلال عملية الشحن (النظام الانتقالي) حتى يصل إلى قيمة ثابتة غير معدومة عند نهاية الشحن (النظام الدائم).

لا تتم عملية شحن المكثفة آنيا، ويمكن أن نبين ذلك كما يلي:

لدينا: $q_A = C.u_{AB}$ و C مقدار ثابت، وبما أن u_{AB} يتطور تدريجيا، فإن q_A تتطور هي أيضا تدريجيا.

1 . 3 . 2 . خلال التفريغ

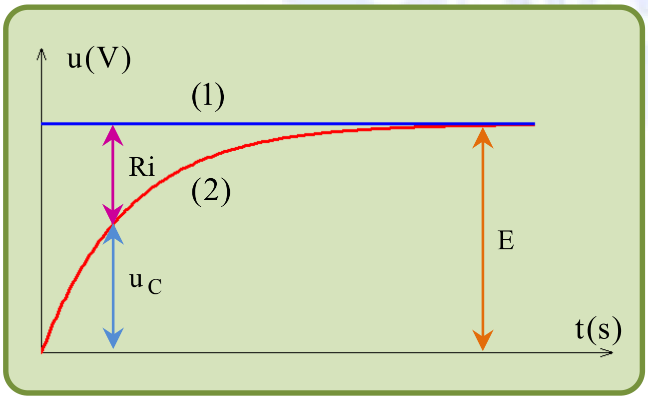


عندما ننقل القاطعة للوضع 2 نرى على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي البيانين المقابلان. يمثل البيان 1 التوتر u_{DB} بين طرفي المولد، وهو منعدم لأن المولد خارج الدارة، بينما يمثل البيان 2 التوتر u_{AB} بين طرفي المكثفة حيث يتناقص هذا التوتر تدريجيا خلال عملية التفريغ (نظام انتقالي) حتى يصل إلى قيمة ثابتة منعدمة، ويكون هذا عند نهاية عملية التفريغ (نظام دائم). عملية التفريغ لا تتم آنيا بل تتم تدريجيا وهذا يعود لنفس السبب المذكور سابقا.

ملاحظة

يمكن حساب شدة التيار الكهربائي المار في الدارة في كل لحظة خلال عملية الشحن وكذلك خلال عملية التفريغ. ويتم ذلك كما يلي :

– خلال الشحن :



$u_{DB} = u_{DA} + u_{AB}$ ، و منه

$E = Ri + u_{AB}$. و منه نجد:

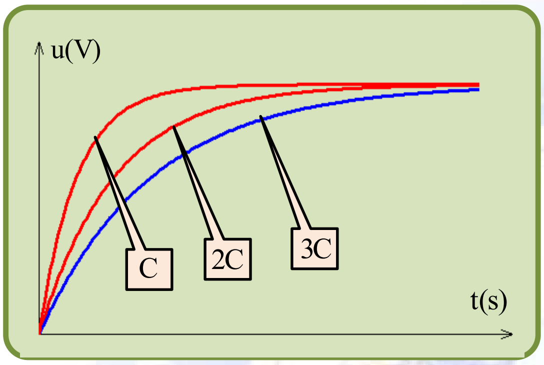
$$i = \frac{E - u_{AB}}{R}$$

- خلال عملية التفريغ :

$0 = Ri + u_{AB}$ ، و منه نجد: $i = -\frac{u_{AB}}{R}$

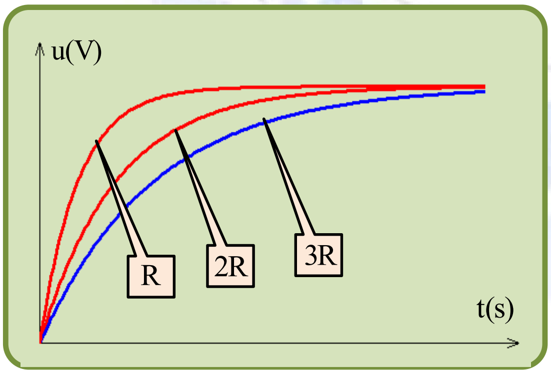
1 . 3 . 3 . ثابت الزمن للدارة RC

نثبت قيمة المقاومة R ونستعمل مجموعة من المكثفات سعتها C ، 2 C ، 3 C. نقوم بعد ذلك بشحن كل مكثفة ونتابع تطور التوتر بين طرفيها بدلالة الزمن. تسمح لنا نتائج المتابعة برسم البيان البيان المقابل.



نلاحظ أن ثابت الزمن τ يزداد مع زيادة سعة المكثفة.

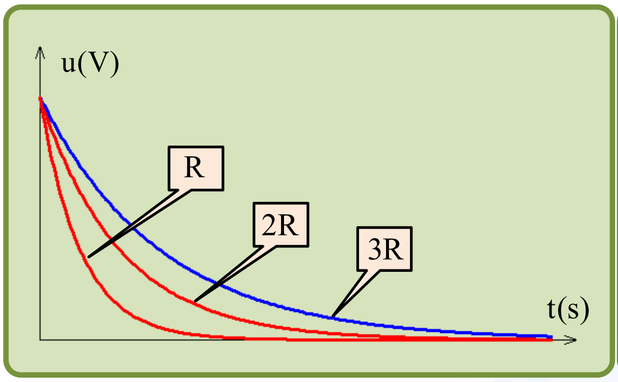
نكرر نفس العملية، ولكن نستعمل هذه المرة مكثفة واحدة سعتها C، ونشحنها عبر مجموعة من النواقل الأومية مقاوماتها R ، 2R و R 3. نتابع تطور التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة، وهذا من أجل كل مقاومة. تسمح لنا نتائج القياس برسم البيان التالي :

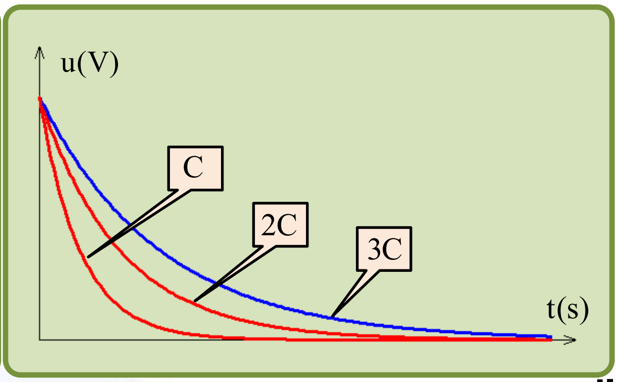


نلاحظ أن ثابت الزمن τ يزداد مع زيادة قيمة المقاومة.

ملاحظة

في حالة تفريغ المكثفة، يتناسب ثابت الزمن τ طرديا مع الجداء RC.





النتيجة :

يتناسب ثابت الزمن τ طرديا مع الجداء RC .

وحدة الجداء RC

$$[RC] = [R]\times[C] = \frac{[u]}{[t]}\times\frac{[i]\times[t]}{[u]} = [t]$$

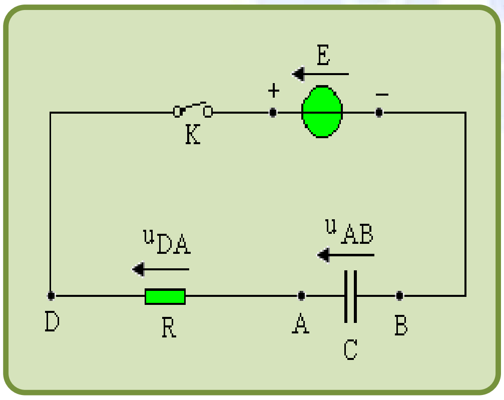
تعريف ثابت الزمن

نسمي الجداء RC ثابت الزمن لثنائي القطب RC. نرمز له بالرمز τ و وحدته في جملة الوحدات الدولية هي الثانية s.

$$\tau = R\cdot C$$

1 . 3 . 4 . الدراسة النظرية

أ . حالة شحن المكثفة :



لتكن الدارة الكهربائية المبينة على الشكل المقابل.

نطبق قانون جمع التوترات:

$$u_{DB} = u_{DA} + u_{AB}$$

ومنه نكتب: $E = Ri + u(t)$ .... (1)

حيث يمثل u(t) التوتر بين طرفي المكثفة.

نعلم أن $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du(t)}{dt}$ ....(2).

أ . 1 . المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة :

نعوض (2) في (1) فنجد: $E = RC\frac{du(t)}{dt} + u(t)$ ....(3)

نقسم طرفي المعادلة (3) على الجداء RC فنجد المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تطور التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة:

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u(t) - \frac{E}{RC} = 0 \quad .... (4)$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى.

أ . 2 . عبارة u(t) – الحل الذي تقبل المعادلة التفاضلية التي تحققها u(t) بين طرفي المكثفة.

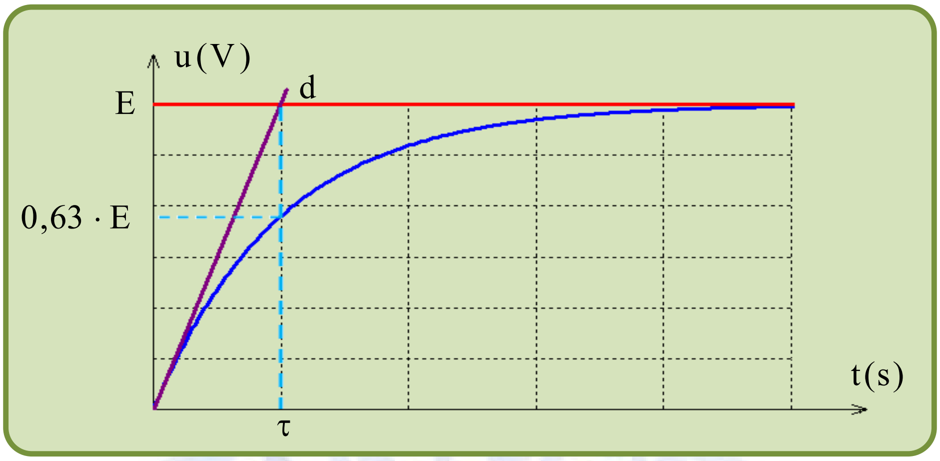
تقبل هذه المعادلة التفاضلية كحل لها الدالة:

$$u(t) = E \cdot (1 - e^{-t/RC}) \quad \text{أو} \quad u(t) = E \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \; .$$

– حالات خاصة:

من أجل $t = 0$ ، نجد: $u(o = 0\ V$. و منه $\left(\frac{du(t)}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E}{RC}$.

من أجل $t = \tau$ ، نجد $u(t) = 0,63 . E$.



أ . 3 . عبارة شدة التيار الكهربائي

نعلم مما سبق بأن شدة التيار الكهربائي التي تجتاز الدارة خلال عملية الشحن تعطى بالعلاقة التالية: $i = C\frac{du(t)}{dt}$.

نستنتج إذن عبارة الدالة $i(t)$: $i(t) = C\frac{d(ut(t))}{dt} = \frac{E}{R}e^{-t/RC}$

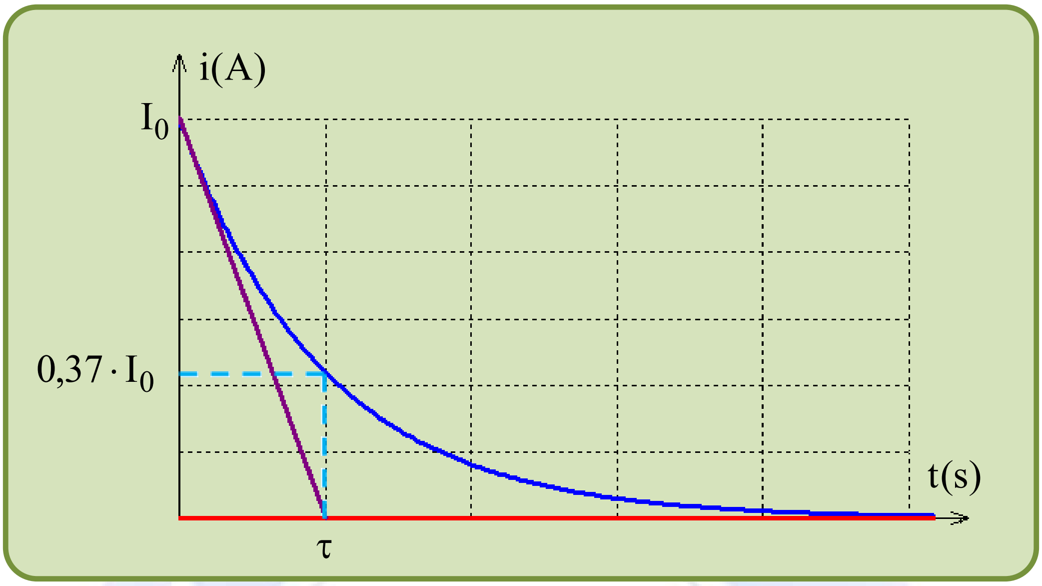
و منه نجد:

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/RC} = I_0 \cdot e^{-t/RC}$$

حالات خاصة:

من أجل $t = 0$ ، نجد $i(t=0) = \frac{E}{R} = I_0$.

من أجل $t = \tau$ ، نجد: $i(t) = 0,37 . I_0$



أ . 4 . المعادلة التفاضلية التي تحققها شحنة اللبوس الموجب q_A :

نعتبر أن $q(t) = q_A(t)$

ننطلق من المعادلة (1) : $E = Ri + u(t)$

نعوض $i = \frac{dq(t)}{dt}$ ، وكذلك $u(t) = \frac{q(t)}{C}$ في المعادلة (1) فنجد:

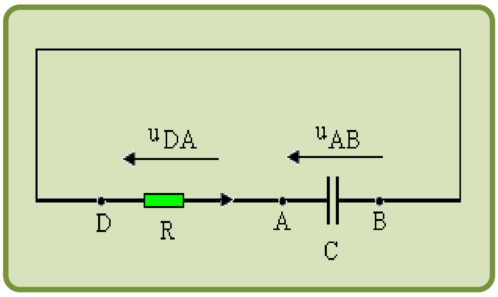
$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{RC} q(t) - \frac{E}{R} = 0$$

أ . 5 . عبارة q(t) – الحل الذي تقبله المعادلة التفاضلية التي تحققها q(t) :

لدينا: $q(t) = C.u(t)$ ، وكذلك $u(t) = E.(1 - e^{-t/RC})$.

نعوض فنجد:

$$q(t) = CE \cdot (1 - e^{-t/RC}) = Q_0 (1 - e^{-t/RC})$$



ب . حالة تفريغ المكثفة :

لتكن الدارة الكهربائية المبينة على الشكل المقابل. نطبق قانون العروات (قانون جمع التوترات): $u_{DA} + u_{AB} = 0$

ومنه نكتب: $Ri + u_C(t) = 0$

ب . 1 . المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر بين طرفي المكثفة :

نعلم أن $i = C\dfrac{du_C}{dt}$. نعوض في المعادلة السابقة فنجد:

$$RC\frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0$$

نقسم طرفي المعادلة على المقدار RC، فنجد المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة :

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u(t) = 0$$

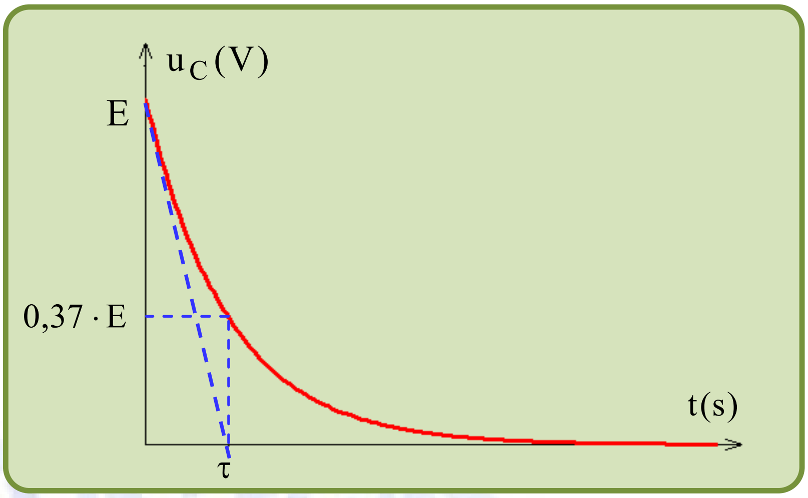
نلاحظ أن هذه المعادلة هي معادلة من الدرجة الأولى.

ب . 2 . عبارة u(t) – الحل الذي تقبله المعادلة التفاضلية :

تقبل هذه المعادلة التفاضلية كحل لها الدالة:

$$u(t) = E \cdot e^{-t/RC} \quad \text{أو} \quad u(t) = E \cdot e^{-t/\tau}$$

يمثل البيان التالي تطور التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن:



ب . 3 . عبارة شدة التيار الكهربائي التي تجتاز الدارة حين تفريغ المكثفة :

انطلاقا من عبارة u(t) نجد عبارة شدة التيار الكهربائي:

نعلم مما سبق بأن شدة التيار الكهربائي التي تجتاز الدارة خلال عملية الشحن تعطى بالعلاقة التالية: $i = C\dfrac{du(t)}{dt}$.

نستنتج إذن عبارة الدالة i(t) : $i(t) = C\dfrac{d(ut(t))}{dt} = -\dfrac{E}{R}e^{-t/RC}$

و منه نجد:

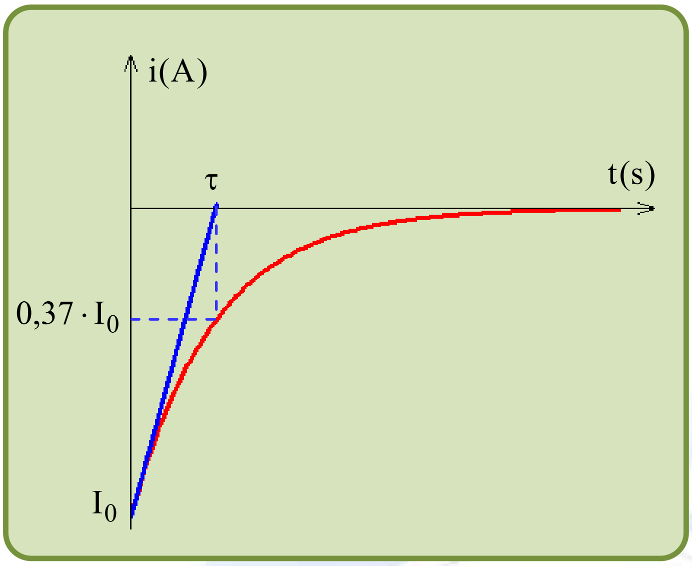
$$i(t) = -\frac{E}{R}e^{-t/RC} = -I_0 \cdot e^{-t/RC}.$$

حالات خاصة :

– من أجل $t = 0$ ، نجد $i(t=0) = -\dfrac{E}{R} = -I_0$.

– من أجل $t = \tau$ ، نجد: $i(t) = -0,37 \,.\, I_0$.

برهان رياضي :



يقطع مماس البيان عند المبدأ محور الأزمنة عند اللحظة t $= \tau$.

لدينا: $i(t) = -I_0 \cdot e^{-t/RC}$

معادلة المماس للبيان هي من الشكل: $i(t) = at + b$ حيث a هو معامل توجيه المماس،

أي : $a = \frac{di}{dt} = \frac{I_0}{\tau} e^{-t/\tau}$

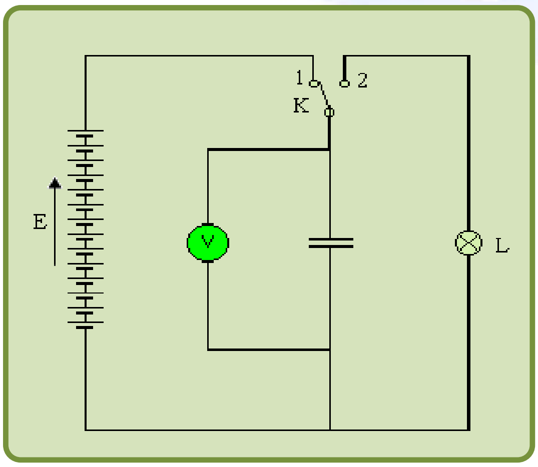
عند $t = 0$ ، يكون $b = -I_0$. و $a = \frac{I_0}{\tau}$. إذن: $i(t) = \frac{I_0}{\tau} t + I_0$

عند التقاطع مع محور الأزمنة يكون: $i(t) = 0$ ومنه: $0 = \frac{I_0}{\tau} t + I_0$

وبالتالي، عند هذه اللحظة، نحصل على: $t = \tau$.

1 . 4 . الطاقة المخزنة في مكثفة.

1 . 4 . 1 . العوامل المؤثرة على الطاقة المخزنة في مكثفة



لتحديد العوامل المؤثرة على الطاقة المخزنة في مكثفة خلال شحنها، نحقق الدارة الكهربائية المبينة على الشكل المقابل.

لدراسة تأثير توتر الشحن على الطاقة المخزنة في المكثفة، نستعمل

مكثفة سعتها $1000\ \mu F$ ثم نشحنها باستعمال الأعمدة الستة التي تتميز كل منها بقوة محركة كهربائية قيمتها $1,5\ V$. نقرأ على مقياس التوتر قيمة توتر الشحن، ثم نفرغها في المصباح، ونلاحظ توهجه. نكرر هذه التجربة عدة مرات وفي كل مرة نقوم بحذف عمود.

نلاحظ بأن توهج المصباح يزداد مع زيادة عدد الأعمدة أي مع زيادة قيمة توتر الشحن.

نستنتج بأن الطاقة المخزنة في المكثفة تزداد مع زيادة توتر الشحن.

ولدراسة تأثير السعة، نثبت توتر الشحن على القيمة $4,5\ V$ ، ونستعمل مكثفة سعتها قابلة للتغيير وبإمكانها أن تأخذ القيم $100\ \mu F$ ، $1000\ \mu F$ و$2200\ \mu F$. نكرر التجربة السابقة، وفي كل مرة نراقب توهج المصباح.

نلاحظ ازدياد توهج المصباح مع ازدياد قيمة سعة المكثفة.

النتيجة :

تزداد الطاقة المخزنة في مكثفة مع زيادة سعة المكثفة

1 . 4 . 2 . تعيين الطاقة المخزنة في مكثفة بيانيا.

لاحظنا عند شحن مكثفة بأنه عندما تزداد شحنة المكثفة يزداد التوتر الكهربائي بين طرفيها :

$$u(t) = \frac{q(t)}{C}$$

تذكر: التوتر بـ V هو الطاقة المنجزة بالـ J من طرف وحدة شحنة عنصرية بـ C.

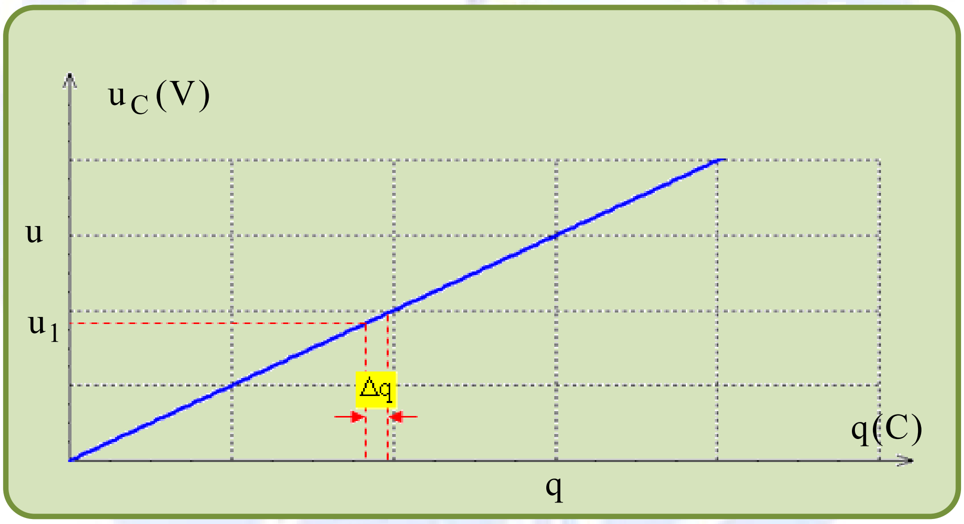
عندما تتغير شحنة المكثفة بمقدار Δq فإن المكثفة تخزن طاقة عنصرية تعطى بالعلاقة:

$$\Delta E(C) = \frac{q(t)}{C}$$

عند نهاية عملية الشحن تكون الطاقة المخزنة في المكثفة تساوي مجموع الطاقات العنصرية.

$$E(C) = \sum u_i \cdot \Delta q$$

تحسب هذه الطاقة من البيان $u = f(q)$ بحساب مساحة المثلث المحصور تحت البيان الممثل في الشكل التالي :

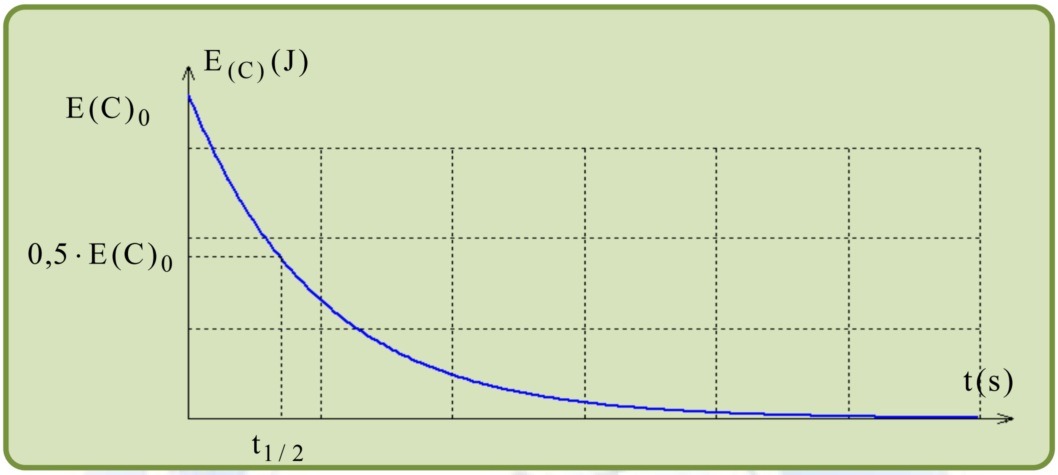


ومنه نكتب :

$$Ec = \frac{1}{2} u.q$$

1 . 4 . 3 . زمن تناقص طاقة مكثفة إلى النصف

تتناقص الطاقة المخزنة في مكثفة خلال تفريغها كما يبرزه البيان التالي:



فما هو الزمن اللازم لكي تتناقص الطاقة المخزنة في المكثفة إلى نصف قيمتها الابتدائية؟

طاقة المكثفة في كل لحظة تعطى بالعلاقة التالية: $E(C)=\frac{1}{2}Cu_C^2$

عبارة التوتر بين طرفيها خلال تفريغها هي:

$u_C = E.e^{-t/\tau}$.

نربع طرفي هذه المعادلة فنحصل على:

$$u_C^2 = E^2.e^{-2t/\tau}$$

من أجل $t = 0$ نجد:

$E_0(C)=\frac{1}{2}CE^2$ حيث $E_0 = E_{max} = E$.

من أجل $t = t_\infty$ ، لدينا :

$E(C)=\frac{1}{2}E_0(C)$ ،

$$\frac{1}{2}CE^2.e^{-(2t_{1/2})/\tau}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}CE)$$

وبعد أخذ اللوغاريتم النيبيري للطرفين نجد: $-\frac{2t_{1/2}}{\tau} = -Ln2$

ومنه نجد :

$$t_{1/2} = \frac{\tau}{2} \cdot Ln\,2$$

مقارنة شكلية بين تناقص النشاط الإشعاعي و تفريغ مكثفة

تناقص النشاط الإشعاعي	تفريغ مكثفة
تناقص عدد الذرات	تناقص الشحنة
معدل تناقص عدد الذرات هو النشاط A	معدل تناقص الشحنة هو التيار i
$A = -\frac{dN}{dt}$ و $\frac{dN}{dt} = -\lambda N_0$	$i = -\frac{dq}{dt}$ و $\frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC}$
$N = N_0 e^{-\lambda t}$	$q(t) = q_0 e^{-t/RC}$
$\tau = \frac{1}{\lambda}$	$\tau = RC$
زمن نصف العمر $t_{1/2} = \frac{Ln2}{\lambda} = \tau.Ln2$	$t_{1/2} = \frac{\tau}{2} \cdot Ln2$

بعض استعمالات المكثفة

- رفع التوتر اللحظي الذي تحتاجه الدارة الكهربائية.
- زيادة شدة التيار الكهربائي في مقطع معين من الدارة.
- ترشيح التيارات غير المرغوب فيها في الدارة و إزالة التشويش.