C- Lois usuelles

C.1- Lois discrètes- Loi uniforme

- Loi d'une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans {1,…,n} avec la même probabilité:

$$\boxed{P(X = x) = \frac{1}{n} \quad \forall x \in \{1, 2, \ldots n\}}$$

Ex : $\mathcal{E}$=« lancer d'un dé régulier »

X=numéro apparaissant sur le dé

X suit une loi uniforme de probabilité 1/6

Eléments de calcul pour l'espérance et la variance :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Moments :

$$\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2} \quad ; \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$$

C.1- Lois discrètes- Loi de Bernoulli

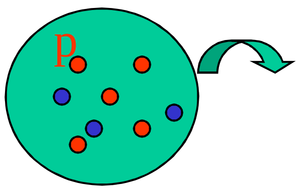
- Loi : $X \sim \mathcal{B}(p) \Leftrightarrow$

$$\boxed{P(X = x) = p^x q^{1-x}, \quad x \in \{0,1\}}$$

- Moments

$$\boxed{E(X) = p \quad ; \quad V(X) = pq}$$

$\mathcal{E}$: Tirage dans une urne de Bernoulli ayant une proportion p de boules rouges. q=1-p



X=nombre de boules rouges

Fonction indicatrice de A : $1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Rq :

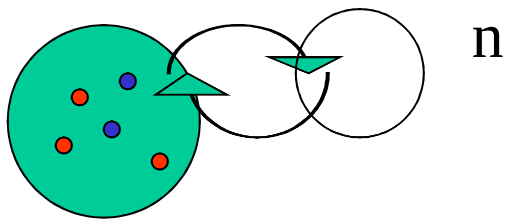
$X = 1_A \sim \mathcal{B}(P(A))$

C.1- Lois discrètes- Loi Binomiale

- Loi : $X \sim \mathcal{B}(n,p) \Leftrightarrow$

$$\boxed{P(X=x) = C_n^x p^x q^{n-x} \quad \forall x \in \{0,\ldots,n\}}$$

$\mathcal{E}$: n tirages avec remise dans une urne de Bernoulli ayant une proportion p de boules rouges



X=nombre de boules rouges

Moments :

$$\boxed{E(X) = np \quad ; \quad V(X) = npq}$$

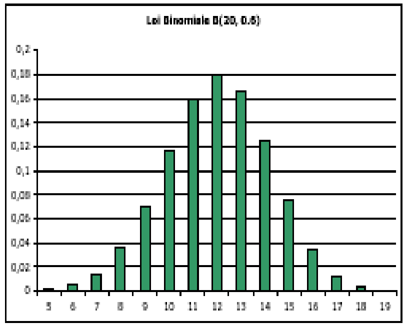
- Propriétés

Si n>50 et p<0.1 $\quad X \approx \mathcal{P}(np)$

Si n>50 et p>0.1 $\quad X \approx N\left(np, \sqrt{npq}\right)$

$$\left.\begin{array}{c} X_1 \sim \mathcal{B}(n_1,p) \\ X_2 \sim \mathcal{B}(n_2,p) \\ X_1 \perp X_2 \end{array}\right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$$

Outils :



$$\boxed{\begin{array}{l} C_n^x = \dfrac{n!}{x!(n-x)!} \\ \displaystyle\sum_{x=0}^{n} C_n^x p^x q^{n-x} = 1 \\ C_n^x = \dfrac{n}{x} C_{n-1}^{x-1} \end{array}}$$

C.1- Lois discrètes- Loi de Poisson

- Loi : $X \sim \mathcal{P}(\lambda),\ \lambda > 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad \forall x \in \mathbb{N}}$$

- Moments

$$\boxed{E(X) = V(X) = \lambda}$$

- Propriétés :

Si λ grand, $X \approx \mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$

$$\left.\begin{array}{c} X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1) \\ X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2) \\ X_1 \perp X_2 \end{array}\right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

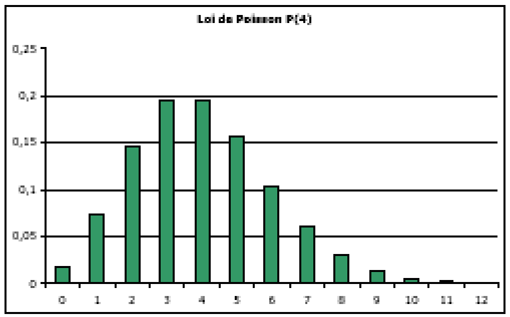
- Ex : nombre de personnes se présentant à l'arrêt de bus après une durée λ.

Processus de Poisson

Soit X le nombre d'événements survenus sur une période donnée.
On suppose que
- la probabilité qu'un événement a de se produire dans la période ne dépend que de la durée de la période
- le nombre d'événements se produisant durant la période est indépendant du nombre d'événements survenus dans les autres périodes.

- Outils :

$$\sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$$



C.1- Lois discrètes- Loi Binomiale négative

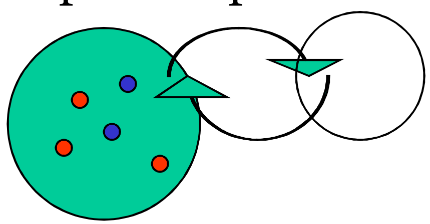
- Loi : $X \sim \mathcal{BN}(r,p) \Leftrightarrow$

$$\boxed{P(X=x)=C_{x+r-1}^{x}p^{r}q^{x}\ \forall x\in\mathbb{N}}$$

- Moments :

$$\boxed{E(X)=\frac{rq}{p}\quad;\quad V(X)=\frac{rq}{p^{2}}}$$

$\mathcal{E}$: tirages avec remise dans une urne de Bernoulli ayant une proportion p de boules rouges



X=nombre de boules blanches précédent la r° boule rouge

Outils:

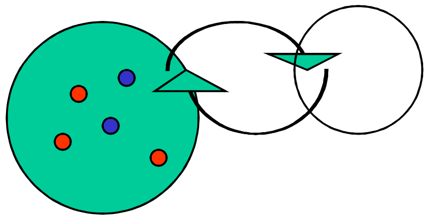
$$\boxed{\sum_{x=0}^{\infty}C_{x+r-1}^{x}p^{r}q^{x}=1}$$

C.1- Lois discrètes- Loi Géométrique

- Loi : $X \sim \mathcal{G}(p) \Leftrightarrow$

$$\boxed{P(X = x) = pq^{x-1} \;\forall x \in \mathbb{N}}$$

$\mathcal{E}$: tirages avec remise dans une urne de Bernoulli ayant une proportion p de boules rouges



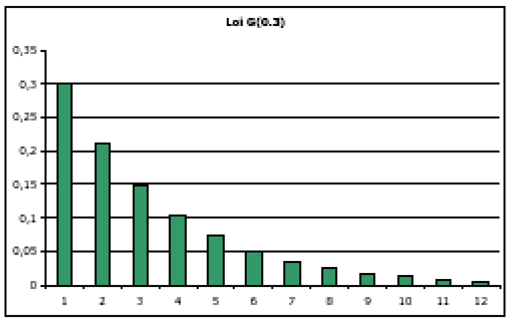
X=rang de la 1° boule rouge

- Moments :

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p} \quad ; \quad V(X) = \frac{q}{p^2}}$$

- Outils

$$\boxed{\sum_{x=0}^{\infty} p^x = \frac{1}{1-p}}$$



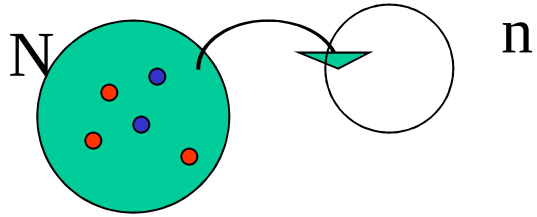
très utilisé en durée de vie et en biologie.

C.1- Lois discrètes- Loi Hypergéométrique

- Loi : $X \sim \mathcal{H}(n, \mathrm{N}, p) \Leftrightarrow$

$$\boxed{P(X = x) = \frac{C_{Np}^{x} C_{N-Np}^{n-x}}{C_{N}^{n}} \quad \forall x \in \{0, \dots, n\}}$$

$\mathcal{E}$: n tirages sans remise dans une urne de Bernoulli ayant une proportion p de boules rouges



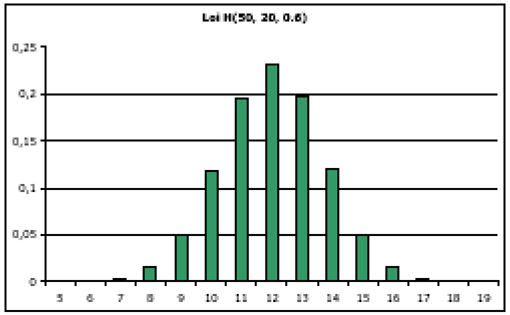
- Moments :

$$\boxed{E(X) = np \quad ; \quad V(X) = \frac{N-n}{N-1} npq}$$

X=nombre de boules rouges

- Propriétés

Si N>>n (N>10n) $\quad X \approx \mathcal{B}(n, p)$



C.2- Lois continues- Loi uniforme

- Loi :

$$X \sim \mathcal{U}[a,b] \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{a \leq x \leq b} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Moments

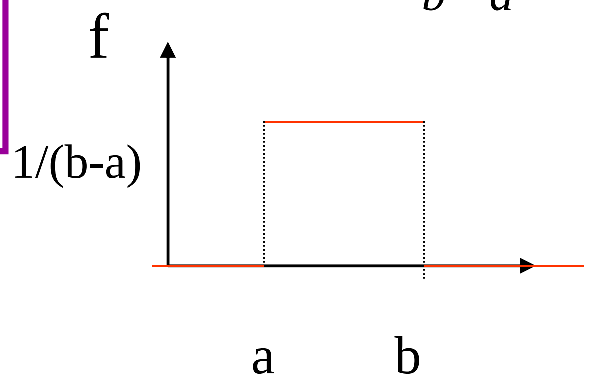
$$E(X) = \frac{a+b}{2}; \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

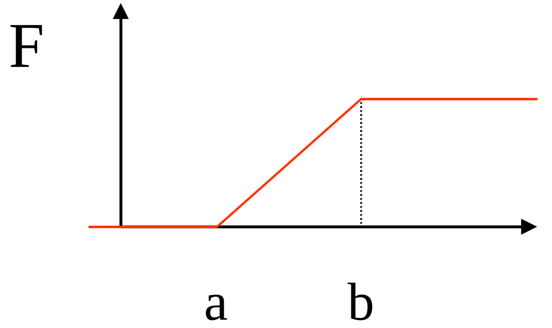
- Fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

- Propriétés

$$X \sim \mathcal{U}[a,b] \Leftrightarrow \frac{X-a}{b-a} \sim \mathcal{U}[0,1]$$





C.2- Lois continues- Loi normale

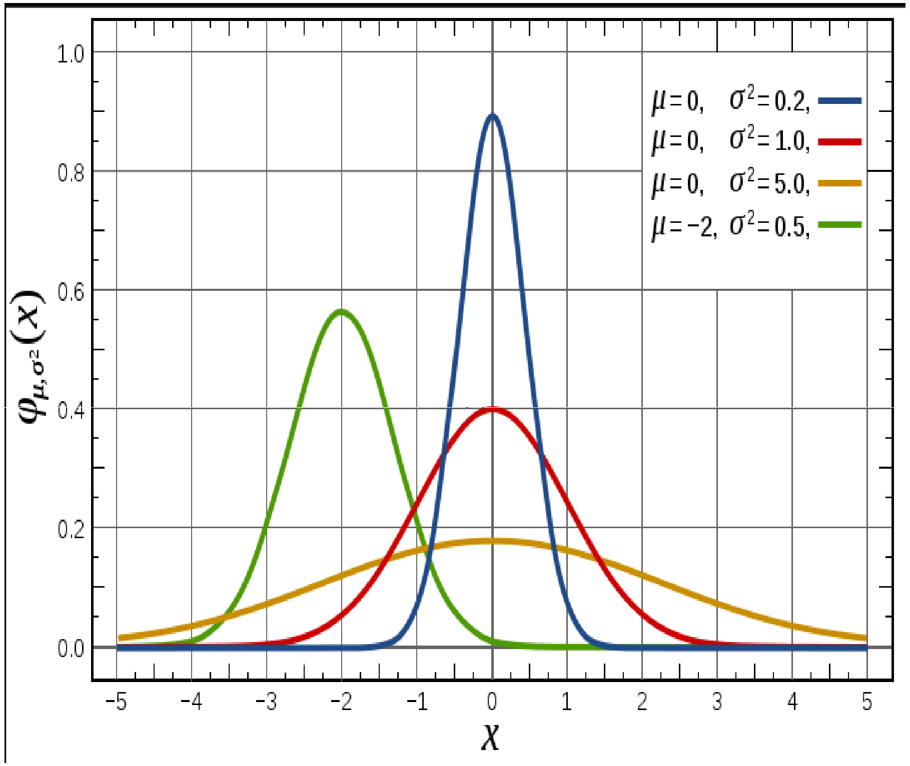
- Loi $X \sim N(\mu,\sigma) \Leftrightarrow$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

- Moments

$$\boxed{E(X) = \mu\,; V(X) = \sigma^2}$$

- Propriétés :



$$\left.\begin{array}{c} X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1) \\ X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2) \\ X_1 \perp X_2 \end{array}\right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$$

$$\boxed{X \sim N(m,\sigma) \Leftrightarrow U = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)}$$

C.2- Lois continues- Loi normale

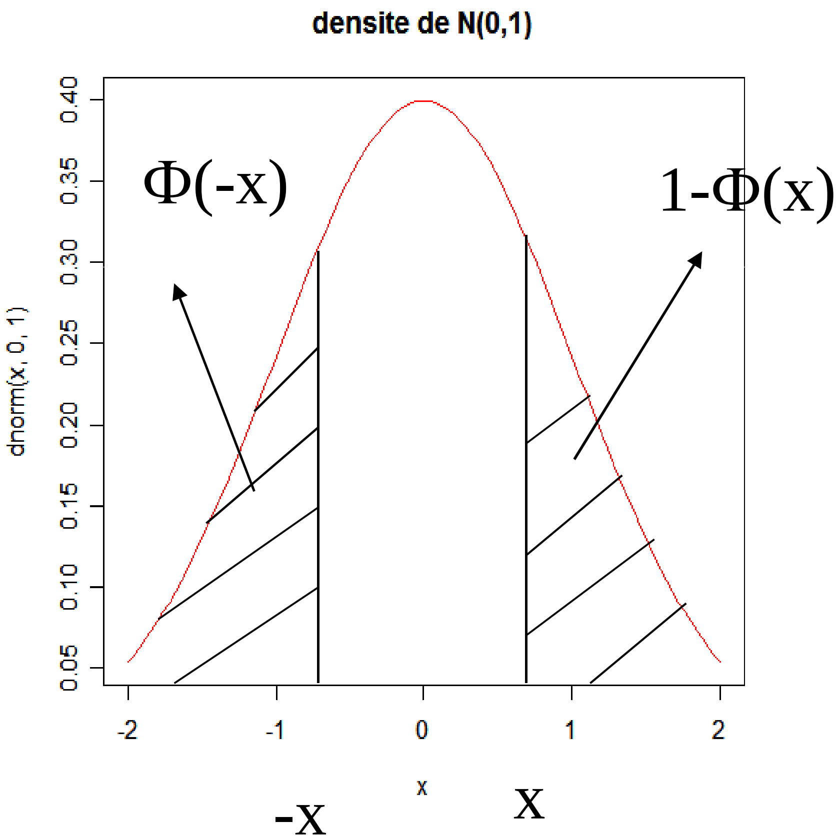
- Propriétés d'une v.a. U de loi normale N(0,1)

On note Φ la fdr de U

$$\Phi(0)=\frac{1}{2}; \quad \Phi(x)<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x<0$$

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

$$P(|X|<x)=2\Phi(x)-1$$



C.2- Lois continues- Loi log-normale

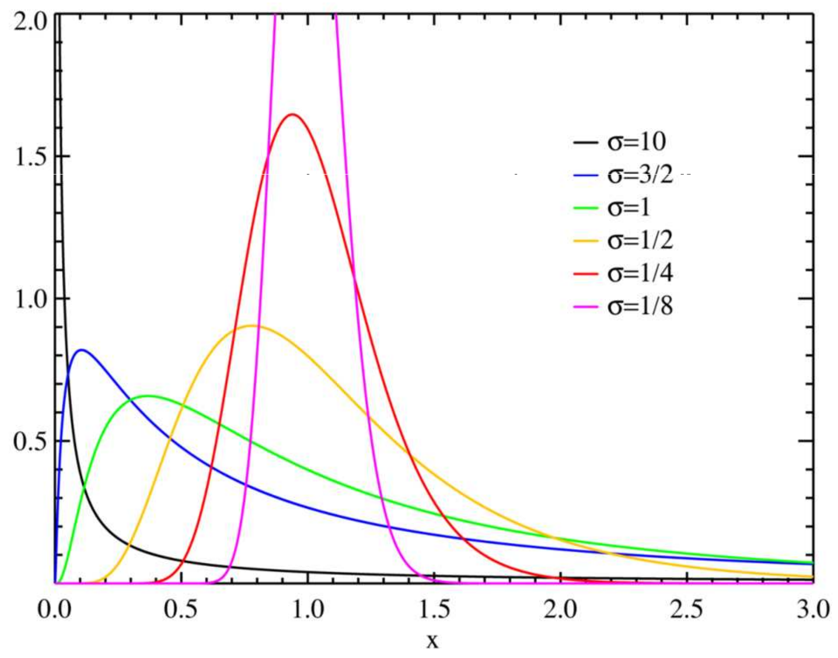
- Loi

$$\boxed{X \sim LN(\mu,\sigma) \Leftrightarrow Y = \ln(X) \sim N(\mu,\sigma)}$$

- Moments

$$E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

$$V(X) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right)e^{2\mu+\sigma^2}$$



C.2- Lois continues- Loi exponentielle

- Loi $X \sim \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda), \quad \lambda > 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x \geq 0} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}}$$

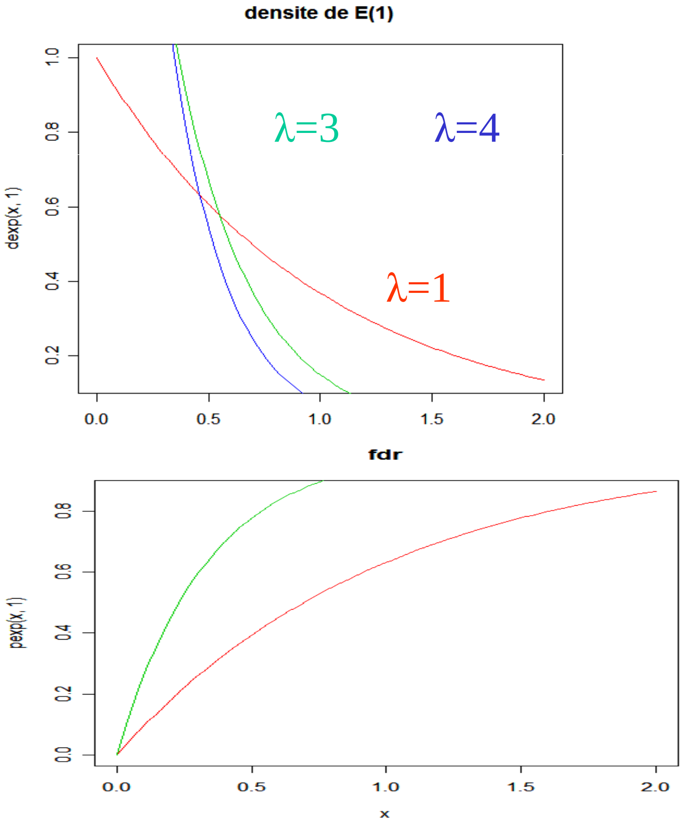
- Moments

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}; V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

- Fonction de répartition :

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}}$$

Loi souvent utilisée en fiabilité :
durée de vie d'un composant



C.2- Lois continues- Loi gamma

- Loi $X \sim \Gamma(k,\theta), \quad k>0, \theta>0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{f(x) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k)\theta^k} 1_{x \geq 0}}$$

- Moments

$$\boxed{E(X) = k\theta \,;\, V(X) = k\theta^2}$$

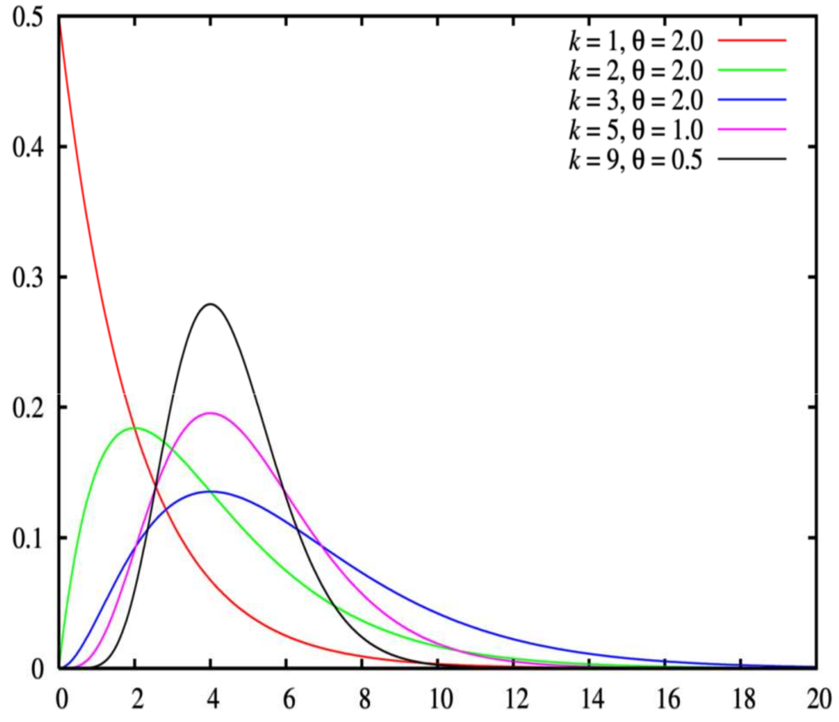
- Propriétés

Si k=1, $X \sim \varepsilon(1/\theta)$

Si θ=2, $X \sim \chi^2(2k)$

Si k entier, la loi de X s'appelle loi d'Erlang

Si $X_i \text{ i.i.d.} \sim \varepsilon(1/\theta) \Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n,\theta)$



$$\boxed{\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} dt \quad ; \quad \Gamma(k+1) = k\Gamma(k)}$$

C.2- Lois continues- Loi du chi2

- Loi : la loi du chi2 à k ddl est la loi de la somme de n variables de loi N(0,1):

$$\boxed{X \sim \chi^2(k), \quad k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow X \text{ a même loi que } Z = \sum_{i=1}^{k} U_i^2 \quad , U_i \quad i.i.d. \sim N(0,1)}$$

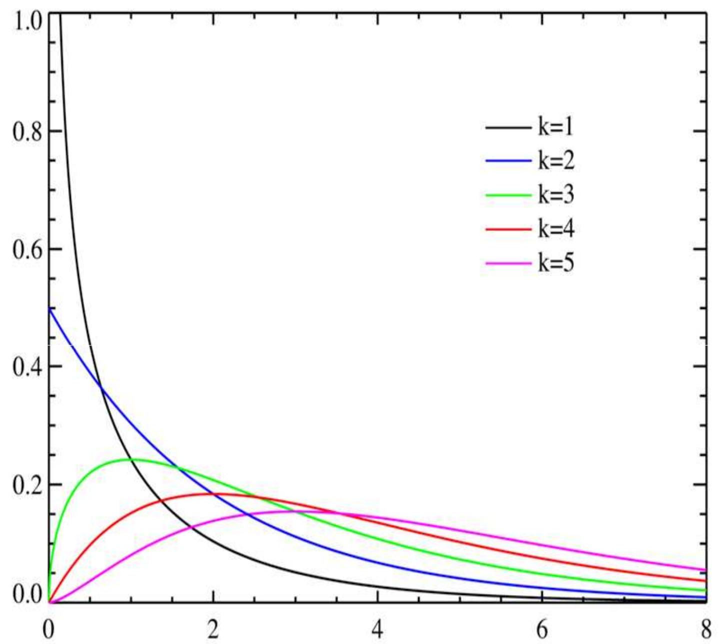
- Moments

$$\boxed{E(X) = k \quad ; \quad V(X) = 2k}$$

- Propriétés :

X à valeurs positives.
La loi de X/2 est une loi gamma(n)
Lorsque k=2 X suit E(1/2)
Si k>50,

$$X \approx N(k, \sqrt{2k})$$



$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} 1_{x \geq 0}}$$

C.2- Lois continues- Loi de Student

- Loi :

$$X \sim \mathcal{T}(k), \quad k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow X \text{ a même loi que}$$

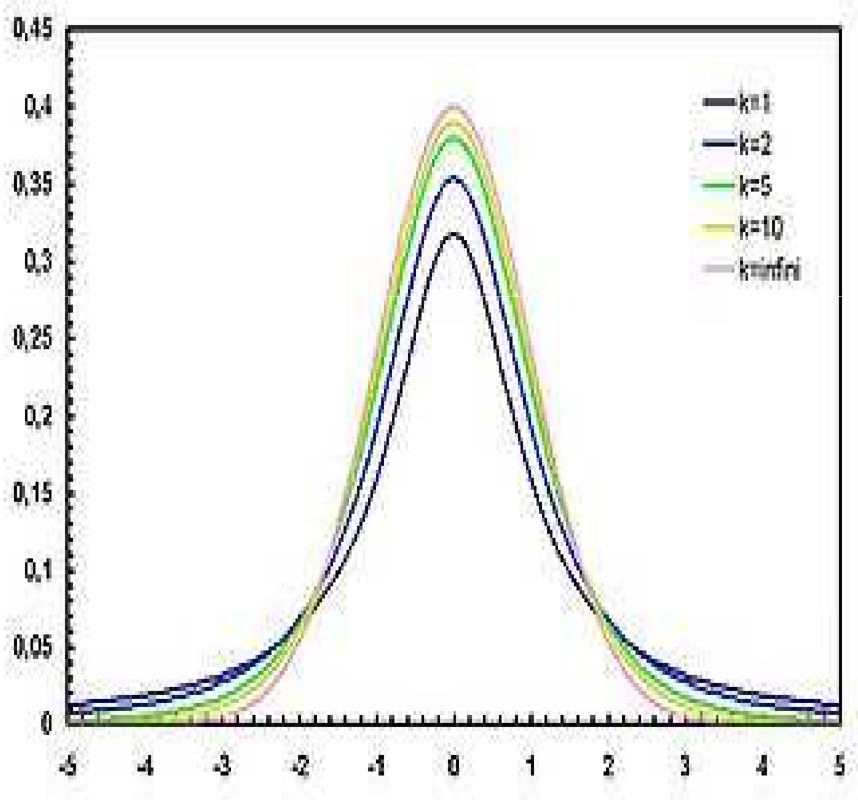
$$T = \frac{U}{\sqrt{Z/k}}, \quad U \perp Z, \quad U \sim N(0,1), \quad Z \sim \chi^2(k)$$

- Moments

$$E(X) = 0, k > 1 \qquad V(X) = \frac{k}{k-2}, k > 2$$

- Propriétés :

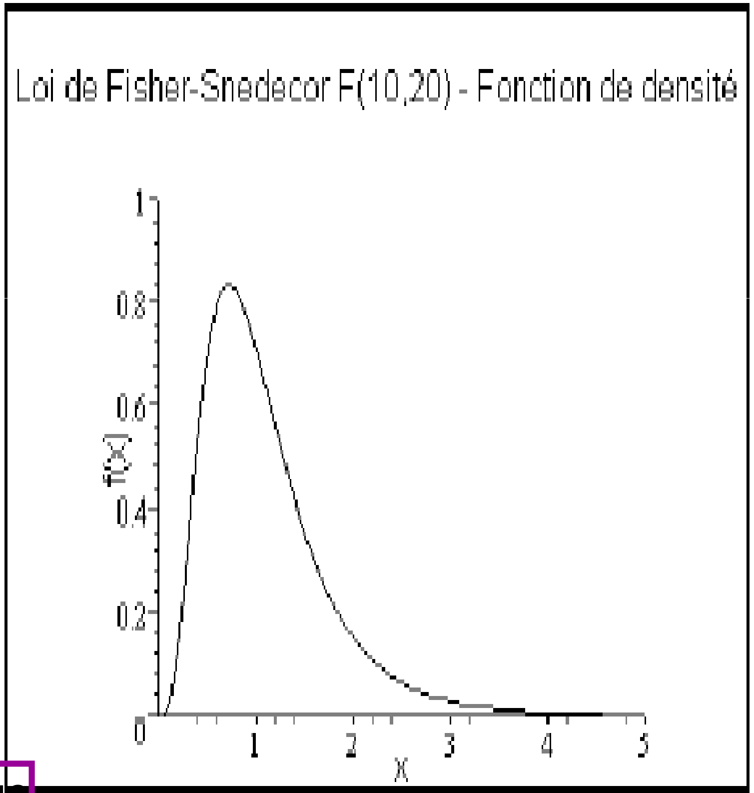
Si k>30 alors $X \approx N(0,1)$



C.2- Lois continues- Loi de Fisher

- Loi :

$$X \sim F(n_1, n_2), \quad n_i \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow X \text{ a même loi que}$$
$$F = \frac{Z_1 / n_1}{Z_2 / n_2}, \; Z_1 \perp Z_2, \quad Z_1 \sim \chi^2(n_1), \quad Z_2 \sim \chi^2(n_2)$$



- Moments

$$E(X) = \frac{n_2}{n_2 - 2}, n_2 > 2$$

$$V(X) = \frac{2n_2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)}, n_2 > 4$$

- Propriété

$$X \sim F(1, n_2) \Leftrightarrow X \text{ a même loi que}$$
$$F = T^2, \quad T \sim \mathcal{T}(n_2)$$

C-3 Simulations de lois

✓ Théorème d'inversion

Soit F une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$. On note $F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} / F(x) \geq y\}$ l'inverse généralisé de F (vaut l'inverse habituelle lorsque F est continue est strictement croissante). Soit U deloi uniforme sur [0,1]. Alors,

1. $X = F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F

2. Si F est continue sur $\mathbb{R}$ et X de fdr F, U=F(X) suit une loi uniforme sur [0,1].

C-3 Simulations de lois

✓ Simulation d'une loi continue

Simulation de n réalisations X de loi F:

- on simule n réalisations d'une loi uniforme sur [0,1] (tirage au hasard de n nombres sur cet intervalle) : u1,...,un

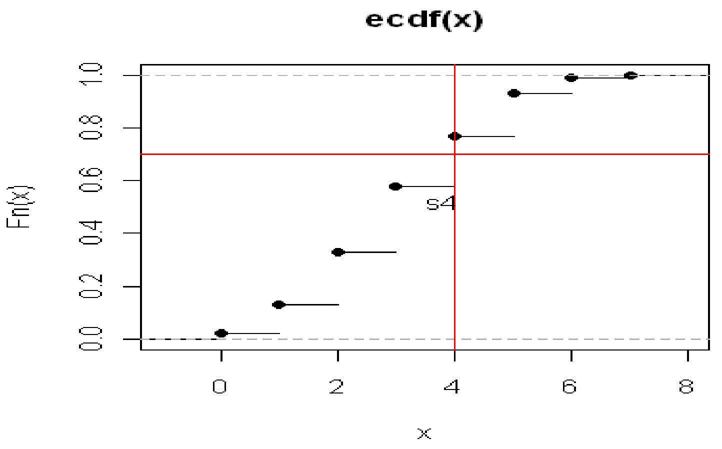
- On calcule $\forall i = 1, \ldots, n, \quad x_i = F^{-1}(u_i)$. Ce sont n réalisations de X de loi F.

C-3 Simulations de lois

✓ Simulation d'une loi discrète

Soit $\left(p_i = P(X = x_i)\right)_{1\le i\le n}$ la loi de probabilité discrète d'une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1,\ldots,x_n\}$. On note $s_k = P(X \le x_k) = \sum_{i=1}^{k} p_i$ et $F(u) = \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} 1_{x_{k-1}\le u < x_k}$ la fonction de répartition de cette loi en tout point.
Soient $u_1,\ldots,u_n$ n réalisations d'une variable de loi uniforme sur [0,1].

Alors $$\forall i = 1,\ldots,n,\ x_k^* = F^{-1}(u_i) = \sum_{k=1}^{n} x_k 1_{s_{k-1}\le u_i < s_k}$$



Sont n réalisations d'une variable aléatoire discrète de loi F.