

6. Étude de courbes paramétrées

6.1. Définitions

Soit deux fonctions f et g définies sur le même sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}$. Le point $M(t)$ de coordonnées $(f(t); g(t))$ décrit un sous-ensemble (C) du plan lorsque t varie dans un intervalle I .

Remarques

La courbe (C) n'est pas nécessairement le graphe d'une fonction ; c'est pourquoi on parle de *courbe* paramétrée et non pas de *fonction* paramétrée.

On peut parfois, en éliminant le paramètre t entre les deux équations, obtenir y comme fonction de x , et ramener l'étude de la courbe à celle d'une courbe définie par une relation $y = h(x)$.

Une **représentation paramétrique** d'une courbe (C) est un système d'équations où les coordonnées des points de la courbe sont exprimées en fonction d'un **paramètre** (souvent noté t, k, θ, \dots).

$$(C) : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Ces équations sont appelées **équations paramétriques de (C)** .

On note parfois également $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Si l'on veut que cette définition ait un sens, il faut que $x(t)$ et $y(t)$ existent simultanément.

C'est pourquoi le **domaine de définition D** de la courbe (C) est l'intersection des domaines de définition D_x et D_y des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. On a donc $D = D_x \cap D_y$.

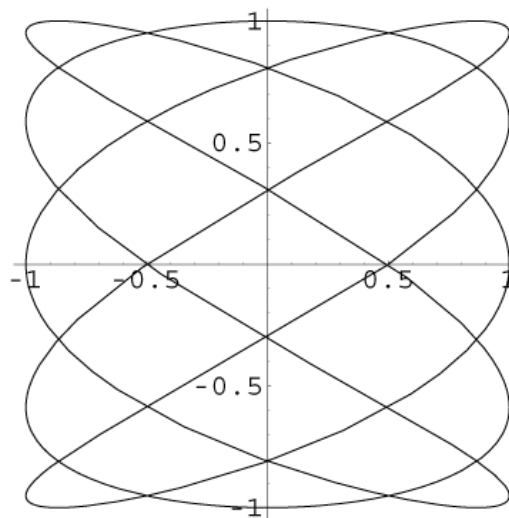
Exercice 6.1

Soit a et b deux nombres réels. Trouvez le domaine de définition de la courbe paramétrée : $\begin{cases} x = \sqrt{t-a} \\ y = \sqrt{b-t} \end{cases}$

6.2. Exemple de courbes paramétrées : figures de Lissajous



Jules Antoine **Lissajous**
(Versailles, 4/3/1822 -
Plombières, 24/6/1880)



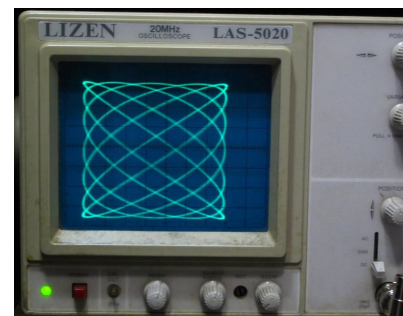
$$\begin{cases} x = \sin(5t) \\ y = \cos(3t) \end{cases}, t \in [0; 2\pi[$$

Les figures de Lissajous (ou courbes de Bowditch) sont de la forme :

$$\begin{cases} x = a \sin(t) \\ y = b \sin(nt + \phi) \end{cases}$$

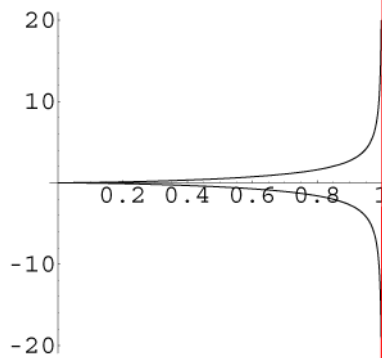
avec $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ et $n \geq 1$

En électronique, on peut faire apparaître des figures de Lissajous sur un oscilloscope.



6.3. Asymptotes

Asymptote verticale



Asymptote verticale $x = 1$

On obtient une telle asymptote lorsque x tend vers une valeur finie a et y tend vers une valeur infinie.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a, \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

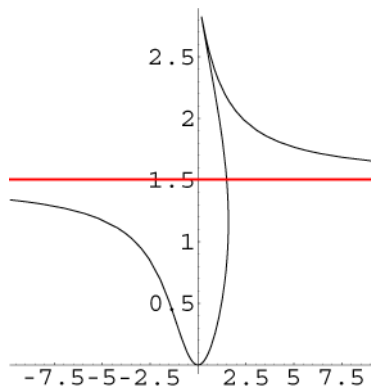
$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm \infty$$

L'asymptote verticale est une droite qui a pour équation $x = a$.

Si $x(t) - a$ est positif, la courbe est à droite de l'asymptote, sinon elle est à gauche.

La courbe coupe l'asymptote lorsque $x(t) = a$.

Asymptote horizontale



Asymptote horizontale $y = 1.5$

Cette fois, x tend vers l'infini et y tend vers une valeur finie b lorsque t tend vers t_0 .

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm \infty$$

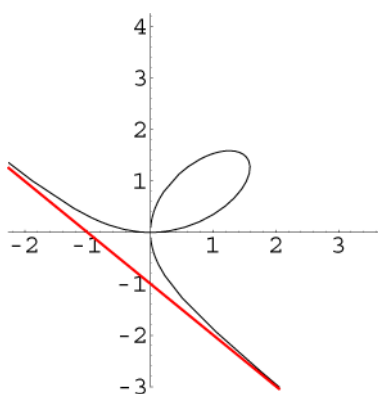
$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b, \text{ avec } b \in \mathbb{R}$$

L'asymptote horizontale est une droite qui a pour équation $y = b$.

Si $y(t) - b$ est positif, la courbe est en dessus de l'asymptote, sinon elle est en dessous.

La courbe coupe l'asymptote lorsque $y(t) = b$.

Asymptote oblique



Asymptote oblique $y = -x - 1$

Une asymptote oblique ne peut exister que si x et y tendent tous deux vers l'infini lorsque t tend vers t_0 . Cette condition est nécessaire mais pas suffisante.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm \infty$$

La droite $y = mx + h$ est une asymptote oblique si :

$$m = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} \in \mathbb{R}$$

$$h = \lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - m \cdot x(t)) \in \mathbb{R}$$

Si $m = \infty$, il n'y a pas d'asymptote oblique.

Ces formules sont analogues à celles rencontrées au chapitre 5, page 33.

La position de la courbe est donnée par le signe de $y(t) - mx(t) - h$.

Si cette expression est positive, la courbe est en dessus de l'asymptote, sinon, elle est en dessous.

6.4. Dérivées et points particuliers

Dérivées

Les valeurs de t décrivant le domaine d'étude, on étudie, lorsque c'est possible, le signe des dérivées $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$.

Comme pour les fonctions d'une seule variable (voir chapitre 5), on présentera les résultats sous forme d'un tableau, qui est constitué de deux tableaux accolés, donnant les variations de x et y (voir § 6.6).

Calcul de $\frac{dy}{dx}$

Regardons deux points voisins de la courbe : $M(t_0)$ et $M(t_0 + \epsilon)$. La droite passant par ces deux points tend vers la tangente à la courbe au point $M(t_0)$ lorsque ϵ tend vers zéro.

La pente de la droite passant par $M(t_0)$ et $M(t_0 + \epsilon)$ est :

On peut écrire :

$$m = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad m(t_0; \epsilon) = \frac{y(t_0 + \epsilon) - y(t_0)}{x(t_0 + \epsilon) - x(t_0)} = \frac{y(t_0 + \epsilon) - y(t_0)}{\epsilon} \cdot \frac{\epsilon}{x(t_0 + \epsilon) - x(t_0)} = \frac{\frac{y(t_0 + \epsilon) - y(t_0)}{\epsilon}}{\frac{x(t_0 + \epsilon) - x(t_0)}{\epsilon}}$$

$\frac{dy}{dx}$ donne la pente de la tangente à la courbe.

Lorsque ϵ tend vers 0, la pente tend vers $\frac{\frac{dy}{dt}(t_0)}{\frac{dx}{dt}(t_0)} = \frac{dy}{dx}(t_0)$.

Points particuliers

Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$, la courbe admet une **tangente horizontale** en $M(t_0)$.

Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, la courbe admet une **tangente verticale** en $M(t_0)$.

Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$, la courbe admet un **point singulier** en $M(t_0)$.

On pourra compléter le tableau des dérivées par une ligne donnant les valeurs de $\frac{y'_t}{x'_t}$ pour les valeurs de t figurant déjà dans ce tableau.

6.5. Méthode

L'étude d'une courbe paramétrée comprend six étapes.

1. Domaine de définition	Déterminer le domaine D où la courbe est définie.
2. Asymptotes	Déterminer, s'il y en a, les A.V, les A.H et les A.O.
3. Dérivées et tableau de variation	Calculer $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dy}{dx}$. Faire le tableau de variation.
4. Points particuliers	Déterminer, s'il y en a, les points à tangente verticale, les points à tangente horizontale et les points singuliers. Calculer la limite de la pente de la tangente aux points singuliers, i.e. $m = \lim_{t \rightarrow a} \frac{dy}{dx}(t)$
5. Intersection avec les axes	Trouver les t qui satisfont $x(t) = 0$ et $y(t) = 0$.
6. Représentation graphique	Dessiner la courbe en utilisant les renseignements glanés aux étapes 1 à 5. Il n'est pas interdit de calculer certains points de la courbe, afin de faire un dessin plus précis.

6.6. Deux exemples complets

Premier exemple

$$\text{Étudions la courbe } \begin{cases} x = \frac{t^2}{t-1} \\ y = \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$$

1. Domaine de définition

L'ensemble de définition de la courbe est $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

2.1. Asymptote verticale (A. V.)

Il y a une A. V. quand $t = -1$, puisque

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow -1} x(t) = -\frac{1}{2} \\ \lim_{t \rightarrow -1} y(t) \text{ n'existe pas, car } \begin{cases} \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t < -1}} y(t) = -\infty \\ \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} y(t) = +\infty \end{cases} \end{cases}$$

2.2. Asymptotes horizontales (A. H.)

Quand $t \rightarrow +\infty$, il y a une A. H., car $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0 \end{cases}$

Quand $t \rightarrow -\infty$, il y a une A. H., car $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0 \end{cases}$

2.3. Asymptotes obliques (A. O.)

Il y a une A. O. quand $t = 1$, puisque

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 1} x(t) \text{ n'existe pas, car } \begin{cases} \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} x(t) = -\infty \\ \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} x(t) = +\infty \end{cases} \\ \lim_{t \rightarrow 1} y(t) \text{ n'existe pas, car } \begin{cases} \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} y(t) = -\infty \\ \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} y(t) = +\infty \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Calcul de } m \quad m = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{t}{t^2-1}}{\frac{t}{t-1}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{t+1}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t}{t+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Calcul de } h \quad h = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t - t^2(t+1)}{2(t^2-1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t^3 - t^2 + 2t}{2(t^2-1)} =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(-t^2 - 2t)(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(-t^2 - 2t)}{(t+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3}{2} = -\frac{3}{4}$$

L'A. O. a donc pour équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.

3. Dérivées et tableau de variations

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t(t-1)-t^2}{(t-1)^2} = \frac{t^2-2t}{(t-1)^2} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2} \quad \text{s'annule en } t=0 \text{ et } t=2.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t^2-1)-2t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{-t^2-1}{(t^2-1)^2} \quad \text{ne s'annule pas.}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2} \cdot \frac{(t-1)^2}{t(t-2)} = -\frac{t^2+1}{(t-1)^2(t+1)^2} \cdot \frac{(t-1)^2}{t(t-2)} = -\frac{t^2+1}{t(t-2)(t+1)^2} \quad \text{ne s'annule pas.}$$

Les valeurs de t intéressantes sont $t = -1, 0, 1$ et 2 (valeurs trouvées aux étapes 1 et 3). Il faut aussi voir ce qui se passe quand $t \rightarrow \pm\infty$.

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
x	$-\infty$	\rightarrow	$-\frac{1}{2}$	\rightarrow	0	\leftarrow		\leftarrow	4	\rightarrow	$+\infty$
$\frac{dx}{dt}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	0^-	\downarrow		\downarrow	0	\downarrow		\downarrow	$\frac{2}{3}$	\downarrow	0^+
$\frac{dy}{dt}$		$-$		$-$	-1	$-$		$-$	-5	$-$	
	A. H.		A. V.		tangente verticale		A. O		tangente verticale		A. H.

4. Points particuliers

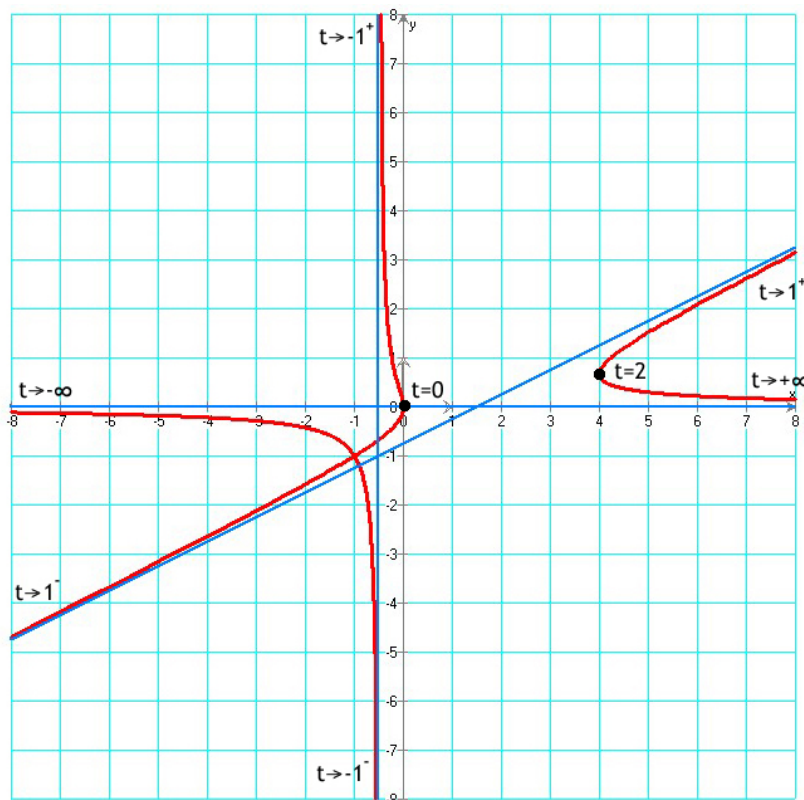
En inspectant le tableau ci-dessus, on s'aperçoit qu'il n'y a pas de points singuliers, mais deux points à tangente verticale.

5. Intersection avec les axes

Il y a une seule intersection en $t = 0$. Le point d'intersection est $(0 ; 0)$.

6. Représentation graphique

En bleu, les trois asymptotes.



Second exemple

$$\text{Étudions la courbe } \begin{cases} x &= 2t - \frac{1}{t^2} \\ y &= 2t + t^2 \end{cases}$$

1. Domaine de définition

L'ensemble de définition de la courbe est $D = \mathbb{R}^*$

2. Asymptotes

Il y a une asymptote horizontale quand $t = 0$, puisque $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0 \end{cases}$

Il n'y a pas d'asymptotes quand $t \rightarrow \pm\infty$.

3. Dérivées et tableau de variations

$$\frac{dx}{dt} = 2 + \frac{2}{t^3} \quad \text{s'annule en } t = -1.$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 + 2t \quad \text{s'annule en } t = -1.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+t}{1+\frac{1}{t^3}} = \frac{1+t}{\frac{t^3+1}{t^3}} = \frac{t^3(t+1)}{t^3+1} = \frac{t^3(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{t^3}{(t^2-t+1)} \quad \text{ne s'annule jamais.}$$

Les valeurs de t intéressantes sont $t = -1$ et 0 (valeurs trouvées aux étapes 1 et 3). Il faut aussi voir ce qui se passe quand $t \rightarrow \pm\infty$.

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x	$-\infty$	\rightarrow	-3	\leftarrow		\rightarrow	$+\infty$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$		$+$	
y	$+\infty$	\downarrow	-1	\uparrow	0	\uparrow	$+\infty$
$\frac{dy}{dt}$		$-$	0	$+$	2	$+$	
$\frac{dy}{dx}$			$-\frac{1}{3}$				

Point
singulier

Asymptote
horizontale

4. Points particuliers

En inspectant le tableau, on s'aperçoit qu'il y a un point singulier en $t = -1$. Il est utile dans ce cas de calculer $\frac{dy}{dx}(-1)$ pour connaître la pente de la tangente en ce point.

5. Intersections avec les axes

$$x(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{qui correspond au point } (0 ; 2.22)$$

$$y(t) = 0 \Rightarrow t = -2 \quad \text{qui correspond au point } (-4.25 ; 0)$$

6. Représentation graphique

En esquissant le dessin de cette courbe, on s'apercevra que cette courbe contient un point double. Pour le calculer, il faut résoudre $\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$ avec $t \neq s$.

Ce n'est en général pas facile ! En résolvant le système avec *Mathematica*, on a trouvé $t = -1 - \sqrt{2}$ et $s = -1 + \sqrt{2}$. Ces deux valeurs correspondent au point $(-5 ; 1)$.

**Exercice 6.2**

Étudiez et dessinez les courbes suivantes selon les exemples du § 6.6 ($a > 0$).

$$\text{a. } \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases} \qquad \text{b. } \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad \text{d. } \begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} x(t) = \frac{e^{-t}}{t} \\ y(t) = \frac{1}{t(t-1)} \end{cases} \qquad \text{f. } \begin{cases} x(t) = \frac{e^{-t}}{t} \\ y(t) = \frac{1}{t(t+2)} \end{cases}$$

$$\text{g. } \begin{cases} x(t) = \frac{\ln(t)}{t} \\ y(t) = t \ln(t) \end{cases} \qquad \text{h. } \begin{cases} x(t) = a(t - \sin(t)) \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) \end{cases}$$

$$\text{i. } \begin{cases} x(t) = a \cos^3(t) \\ y(t) = a \sin^3(t) \end{cases} \qquad \text{j. } \begin{cases} x(t) = a \cos^3(t) \\ y(t) = a \sin(t) \end{cases}$$

6.7. Ce qu'il faut absolument savoir

Trouver les asymptotes d'une courbe paramétrée

 ok

Trouver les points particuliers d'une courbe paramétrée

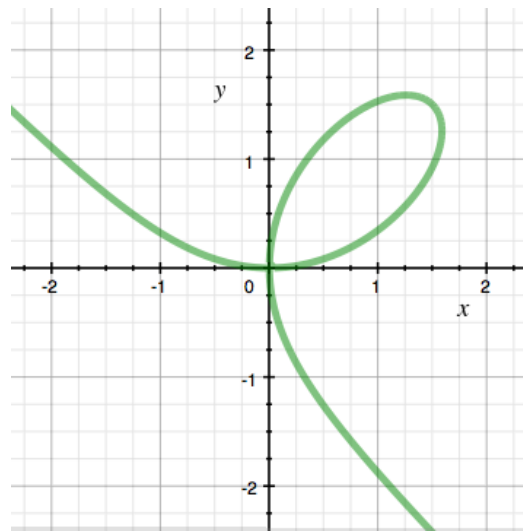
 ok

Connaître les six étapes de la méthode par cœur

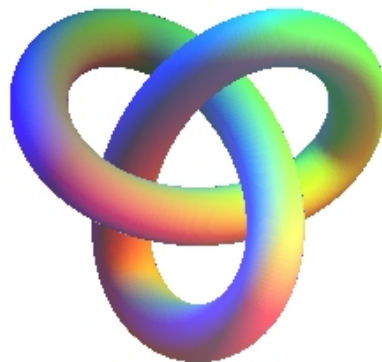
 ok

Maîtriser parfaitement chaque étape de la méthode

 ok



Folium de Descartes
$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = tx \end{cases}$$



Trèfle gauche
$$\begin{cases} x = \cos(t) + 2\cos(2t) \\ y = \sin(t) - 2\sin(2t) \\ z = -2\sin(3t) \end{cases}$$