Algèbre linéaire et géométrie

LAVOISIER
11, rue Lavoisier
75008 Paris

Serveur web : www.hermes-science.com

2-7462-0993-4 ISBN Général

2-7462-0994-2 ISBN Volume 1

APPLICATIONS MATHÉMATIQUES AVEC MATLAB®

Algèbre linéaire et géométrie

rappel de cours et exercices corrigés

Luc Jolivet
Rabah Labbas

Hermes Science publications

Table des matières

Avant-propos

Le but de cette collection "Applications Mathématiques avec *Matlab*" est de comprendre et d'utiliser les outils mathématiques fondamentaux de premier cycle à l'aide d'un logiciel de calcul. Elle correspond à l'esprit des formations en IUT, BTS, Ecoles d'ingénieurs, mais aussi en premiers semestres du cycle L du nouveau schéma LMD.

Nous nous sommes basés sur l'expérience de nos cours, travaux dirigés et séances de travaux pratiques de mathématiques avec des étudiants de 1ère et 2ème année du département d'Informatique d'IUT de l'Université du Havre. Pour cet enseignement, nous disposons du logiciel *Matlab*[1](la version actuellement installée est 6.5.0) et de son extension *Symbolic Math Toolbox* (version 2.1.3).

Ces outils nous ont permis d'accompagner les notions de base présentées, par des illustrations numériques et graphiques, et par des vérifications utilisant le calcul formel.

L'utilisation d'un logiciel de calcul permet de se concentrer davantage sur la compréhension du problème posé, sur une stratégie de résolution et sur l'interprétation des résultats. L'étudiant devra aussi porter un regard critique sur les réponses fournies, en prenant garde aux erreurs d'arrondi dans les calculs numériques, et aux simplifications abusives dans certaines expressions symboliques.

Ce premier tome comprend trois parties.

La première partie est consacrée à une présentation des notions essentielles de *Matlab*[2], fréquemment utilisées par la suite. Elle est illustrée par des exemples et peut servir d'initiation à la pratique de ce logiciel.

---

1. *Matlab* est une marque déposée de *The MathWorks Inc.* Tous les autres produits cités sont des marques déposées de leur société respective.

2. à partir de la version 5

En deuxième partie, on présente les notions de base et les principaux théorèmes de l'algèbre linéaire, le plus souvent sans démonstrations, pour les utiliser principalement dans des applications et calculs concrets.

Une importance particulière a été accordée à la géométrie, traitée en troisième partie. On y présente les notions de base, en faisant le lien avec la partie précédente. On y montre aussi les outils nécessaires en vue d'applications concrètes, comme par exemple en infographie.

Chaque partie est composée de chapitres. Ils sont accompagnés d'illustrations et d'exemples traités avec *Matlab*. Des exercices sont ensuite proposés. Certains sont originaux, d'autres sont repris ou inspirés de divers manuels dont la liste est donnée en bibliographie. La correction de ces exercices se trouve en fin de chapitre. Nous avons choisi de la présenter en utilisant systématiquement *Matlab*. Le lecteur pourra cependant traiter la plupart de ces exercices "à la main".

Lorsqu'une commande *Matlab* est utilisée pour la première fois, elle apparaît en gras. Les programmes et séquences de calcul sous *Matlab* sont mis en évidence dans des tableaux.

En fin d'ouvrage, se trouve un index regroupant les mots-clés mathématiques et les commandes *Matlab* utilisées. Ces dernières apparaissent en italique.

Nous tenons à remercier vivement tous nos collègues qui ont consacré un temps précieux à la lecture de cet ouvrage, notamment Serge Derible, Thierry Dumont, Khaled Sadallah et Francis Wirth.

Nous remercions particulièrement François Coquet, Professeur à l'Université du Havre, pour sa lecture attentive, ses remarques et conseils judicieux .

Nous remercions également la Maison d'éditions Hermes/Science qui a réalisé avec efficacité la publication des trois tomes.

Nous accueillerons avec reconnaissance les éventuelles remarques que le lecteur voudra bien nous faire parvenir.

Note au lecteur

Ce recueil de rappels de cours et d'exercices corrigés fait partie d'un ensemble comportant trois tomes.

Tome 1

– première partie : présentation de *Matlab,*

– deuxième partie : algèbre linéaire,

– troisième partie : géométrie.

Tome 2

– première partie : analyse,

– deuxième partie : analyse numérique élémentaire.

Tome 3

– théorie élémentaire du signal.

PREMIÈRE PARTIE

Présentation de Matlab

Chapitre 1

Calculs avec Matlab

Le but de ce premier chapitre est de se familiariser avec l'utilisation du logiciel *Matlab.* Il est conseillé pour cela de reprendre les exemples traités et de faire au fur et à mesure les exercices proposés (de niveau Terminale).

Ce sont les commandes de base de *Matlab* qui sont présentées dans ce chapitre et le suivant. D'autres commandes seront introduites au fur et à mesure des besoins, en fonction des notions mathématiques abordées.

1.1. Calculs numériques usuels

1.1.1. *Exemple*

On utilise la formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pour résoudre l'équation

$$3,5x^2 + 152x - 0,9 = 0.$$

Pour lancer *Matlab*, si on dispose d'un environnement graphique, il suffit le plus souvent de sélectionner l'icône correspondante. Sinon, dans une fenêtre de commande, on écrit :

matlab

Il est toujours préférable de créer un sous-répertoire approprié (destiné à contenir les sauvegardes personnelles relatives à *Matlab),* puis de se placer dans ce répertoire (par exemple en utilisant la commande *cd*).

Dans la fenêtre *Matlab*, on peut dès lors introduire les instructions souhaitées :

```
» diary exoSecondDegre.txt
```

Cette première instruction permet de sauvegarder sa session de travail (commandes et réponses) dans un fichier texte qui pourra être relu, corrigé, imprimé, ..., dès qu'on aura donné l'instruction *diary off* ou qu'on aura quitté *Matlab*.

On introduit les variables a, b, c en leur affectant la valeur souhaitée.

```
» % Entrée des coefficients
» a = 3.5 ;
» b = 152 ;
» c = -0.9 ;
```

Ce qui suit le signe "%" est un commentaire (utile lorsqu'on imprime ou relit son travail). Le point-virgule à la fin des trois instructions précédentes évite l'affichage du résultat.

On utilise ensuite les opérations usuelles (addition, multiplication,...) et la fonction prédéfinie **sqrt** de *Matlab* pour calculer les solutions de l'équation.

```
» %Calcul du discriminant
» delta = b^2 -4 * a*c
delta =2.3117e+004
» racDelta = sqrt(delta)
   racDelta = 152.0414
» x1 = (-b - racDelta)/(2*a)
   x1 =-43.4345
» x2 = (-b + racDelta)/(2*a)
   x2 =0.0059
```

Par défaut, les résultats sont affichés avec quatre chiffres après la virgule. Mais on peut modifier cet affichage grâce à la commande **format**.

```
» format long
» x2
   x2 =0.00592024557515
» format     % retour au format d'affichage par défaut
» clear
```

La dernière commande, **clear**, efface de la mémoire toutes les variables. Elle est utile si on veut passer à un nouvel exercice.

1.1.2. *Remarques*

On peut écrire plusieurs instructions sur une même ligne, en les séparant d'une virgule, ou d'un point-virgule.

La touche du clavier $\boxed{\uparrow}$ permet de rééditer les lignes d'instructions déjà validées, pour corriger les fautes de frappe ou recommencer un calcul. On peut aussi se déplacer sur la ligne courante, pour supprimer, insérer, corriger en utilisant les touches $\boxed{\rightarrow}$ et $\boxed{\leftarrow}$.

Pour quitter correctement *Matlab*, il suffit d'utiliser la commande **quit**.

1.1.3. *Connaître les fonctions utilisables*

1.1.3.1. *Fonctions mathématiques*

En plus de la fonction *sqrt* déjà rencontrée, on peut utiliser les fonctions :

– logarithmes népérien (*log*) ou décimal (*log10*), exponentielle (*exp*),

– trigonométriques (*sin*, *cos*, *tan*...),

– etc...

1.1.3.2. *L'utilisation de helpwin*

On peut obtenir la liste de ces fonctions disponibles et leur descriptif en ouvrant la fenêtre d'aide par la commande

» **helpwin**

et en sélectionnant *Elementary math functions* (*elfun*).

Plus généralement, cette fenêtre d'aide, très utile, permet d'afficher la liste des fonctions ou commandes correspondant à un thème sélectionné. Elle permet aussi d'obtenir directement des informations sur une fonction ou une commande dont on donne le nom.

1.1.4. *Calculs répétés sur tous les éléments d'un tableau*

Avec *Matlab*, l'utilisation de tableaux est particulièrement simple pour stocker une suite de valeurs, effectuer globalement des calculs sur l'ensemble des valeurs du tableau.

1.1.4.1. *Exemple*

Calculer

$$y = x^2 \log(1 + x)$$

pour $x = 1,\ 2,\ 5,\ 10$, puis pour $x = 0,\ 0.2,\ 0.4, \ldots 1$.

– On utilise les crochets pour entrer un premier tableau de valeurs isolées :

```
» X =[1 2 5 10]
  X =1 2 5 10
```

– On effectue les calculs qui s'appliqueront à tous les éléments du tableau. Il faut pour cela utiliser l'opérateur $\cdot *$ à la place de $*$, de même $\cdot /$ et $\cdot\hat{}$ respectivement à la place de $/$ et $\hat{}$

```
»Y = X·^2·*log(1+X)
Y =    0.6931 4.3944 44.7940 239.7895
```

– On entre un second tableau de valeurs régulièrement espacées en donnant successivement la valeur initiale 0, le pas 0.2, et la valeur finale 1. On calcule ensuite les images de ces valeurs :

```
»X1 = [0 : 0.2 : 1]
X1 = 0 0.2000 0.4000 0.6000 0.8000 1.0000
» Y1 = X1·^2·*log(1+X1)
Y1 = 0 0.0073 0.0538 0.1692 0.3762 0.6931
```

1.2. Graphiques

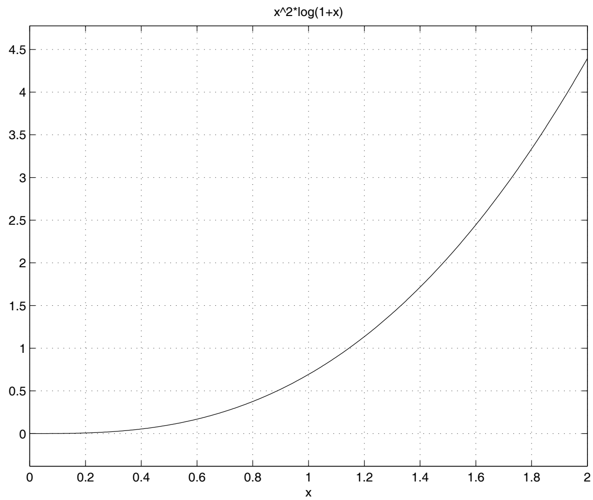
1.2.1. *Représentation graphique d'une fonction*

Pour dessiner le graphe d'une fonction dont l'expression est donnée, on utilise

ezplot*('expression', borneInf, borneSup)*

Le cadre et le titre sont automatiquement ajustés. Par exemple :

```
» ezplot ('x^2*log(1+x)',0,2)
» grid on     % fait apparaître un quadrillage sur la figure
```



1.2.2. *Autres représentations graphiques planes*

1.2.2.1. *La commande plot*

C'est la commande de base, qu'on utilise sous la forme

plot*(X,Y,options)*

où X représente une abscisse ou un tableau d'abscisses, Y l'ordonnée ou le tableau des ordonnées correspondantes, et *options* est une chaîne de caractères permettant de préciser le type et la couleur du tracé (utiliser l'aide concernant cette commande *plot* pour connaître ces options). Par défaut, la figure s'ajuste automatiquement à l'ensemble des points à représenter, mais la commande **axis** permet d'imposer ses propres choix :

– **axis equal** pour un repère orthonormé,

– **axis([xMin xMax yMin yMax])** pour définir un cadre.

Plusieurs tracés pourront être effectués sur la même figure grâce à la commande **hold on** (par défaut, une nouvelle figure est créée pour chaque tracé, ce qui correspond à *hold off*). La commande **clf** permet de réinitialiser la figure courante. On peut ouvrir simultanément plusieurs figures, et les numéroter, grâce à la commande **figure**(n).

1.2.2.2. *Exemple*

Dessinons un triangle ABC, une de ses médianes $[AI]$, et son centre de gravité G. On donne les coordonnées des points A, B, C, I, G dans le plan muni d'un repère orthonormé :

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ C\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix},\ I\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ G\begin{pmatrix} 8/3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour imposer un repère orthonormé et fixer le cadre défini par

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 7 \\ 0 \leqslant y \leqslant 6, \end{cases}$$

on écrit

```
» clf ; hold on
» axis equal
» axis([-1 7 0 6])
```

On représente le point G à l'aide d'une croix de couleur rouge :

```
» plot(8/3,2,'xr')
```

On dessine ensuite en pointillés le segment $[AI]$ en formant le tableau de ses abscisses et de ses ordonnées :

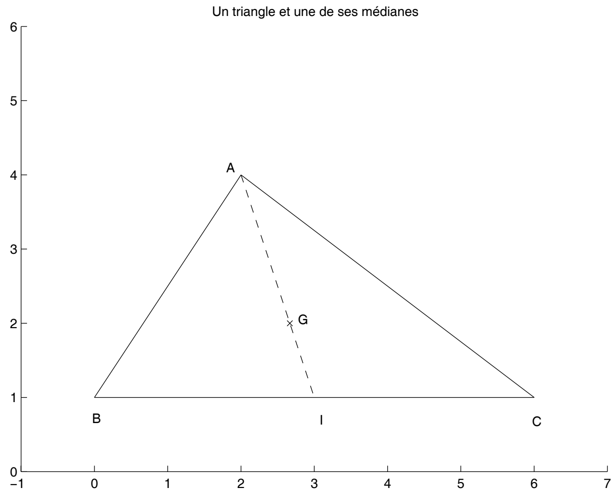
```
» X=[2 3] ; Y=[4 1] ;
» plot(X,Y,'- -')
```

On construit aussi les tableaux de coordonnées du triangle ABC, ou plutôt de la ligne polygonale fermée $ABCA$ (pour que le côté $[CA]$ soit lui aussi dessiné).

```
» X=[2 0 6 2] ; Y=[4 1 1 4] ;
» plot(X,Y)     % dessin d'un trait continu par défaut
```

La commande **title** permet de donner un titre, et **gtext** permet de placer à l'aide de la souris la chaîne de caractères choisie :

```
» title('Un triangle et une de ses médianes' )
» gtext('A') ;  gtext('B') ;  gtext('C') ;  gtext('G') ;  gtext('I')
```



1.3. Calcul symbolique avec *Symbolic Math Toolbox*

Souvent on est amené à transformer des expressions algébriques à l'aide de règles connues, plutôt qu'évaluer directement leur valeur numérique approchée. Si le logiciel *Matlab* est avant tout un outil de calcul numérique, son complément *Symbolic Math-Toolbox* (basé sur le logiciel *Maple*) permet d'effectuer les calculs mathématiques usuels (appelés aussi "calculs symboliques", ou "calculs formels").

1.3.1. *Simplification d'expression algébrique*

Pour simplifier l'expression

$$s = \frac{\sqrt{12}+3}{\sqrt{12}-3},$$

on multiplie numérateur et dénominateur par l'expression dite conjuguée de ce dénominateur :

$$\begin{aligned} s &= \frac{(\sqrt{12}+3)^2}{(\sqrt{12}-3)(\sqrt{12}+3)} = \frac{12+9+2\times 3\sqrt{12}}{12-9} \\ &= \frac{21+6\sqrt{12}}{3} = 7+2\sqrt{12} = 7+4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Un tel calcul peut être effectué avec *Matlab* en utilisant :

– **sym** qui construit une expression symbolique à partir d'une chaîne de caractères ;
– **simple** qui simplifie cette expression symbolique.

```
» s= sym('((sqrt(12)+3)/(sqrt(12)-3))')
s =((sqrt(12)+3)/(sqrt(12)-3))
» simple(s)
ans =7+4*3^(1/2)
```

simplify, factor, collect, expand effectuent également les transformations et simplifications de ces expressions, *simple* appelant une à une toutes ces fonctions et retenant finalement le résultat le plus "simple" (celui correspondant à la chaîne de caractères la plus courte). Pour obtenir une valeur numérique approchée de l'expression, il suffit d'utiliser **double** :

```
» double(s)
ans = 13.9282
```

1.3.2. *Un exemple de calcul avec une variable*

Soit par exemple l'expression

$$P = n(n+1)(n+2)(n+3)+1,$$

où n désigne une variable entière. On demande de calculer P pour $n = 2, 3, 4, 5$, puis de montrer que P est toujours le carré d'un entier.

Pour cela, on construit, en utilisant la commande *sym*, une expression symbolique P dans laquelle figure la lettre $'n'$. Puis on utilise la commande **subs** pour remplacer $'n'$ par 2 dans l'expression P. Enfin la commande *factor* permet de factoriser le résultat et de mettre en évidence un carré parfait.

```
» P = sym('n*(n+1)*(n+2)*(n+3)+1');
» subs(P,'n',2)
ans = 121
» factor(ans)
ans = 11 11
```

On effectue le même calcul pour remplacer $'n'$ par 3, et on ferait de même pour

$$n = 4, 5.$$

```
» factor(subs(P,'n',3))
ans = 19 19
```

Pour montrer que P est toujours le carré d'un entier, on factorise directement l'expression P :

```
» factor(P)
ans = (n^2+3*n+1)^2
```

Le résultat montre que P est toujours le carré de l'entier $n^2 + 3n + 1$.

1.3.3. *Utilisation de syms*

Une simple variable (mathématique) telle que n, x, θ est elle-même une expression symbolique élémentaire et il est souvent commode de l'affecter à une variable (informatique) de même nom :

```
»n=sym('n') ; x = sym('x') ; theta = sym('theta')
```

On peut remplacer cette suite d'affectations par la seule commande

```
»syms n x theta
```

On peut ensuite effectuer des calculs utilisant ces variables :

```
» subs(exp(x),x,n*theta)
ans = exp(n*theta)
```

On peut imposer aux variables mathématiques ainsi déclarées de prendre des valeurs réelles (par défaut, elles prennent des valeurs dans $\mathbb{C}$) ou réelles positives :

```
» syms x real
» simplify(sqrt(x^2))
ans =signum(x)*x
» syms x positive
» simplify(sqrt(x^2))
ans = x
```

1.3.4. *Calculs trigonométriques*

Le calcul symbolique permet d'effectuer des calculs trigonométriques exacts, à ne pas confondre avec le calcul numérique approché :

```
» sym(cos(pi/4))
ans = sqrt(1/2)
» cos(pi/4)
ans = 0.7071
```

Les commandes *expand*, *simplify*, *factor* permettent aussi de développer, simplifier, factoriser les expressions trigonométriques par application des formules usuelles.

```
» syms x y
» expand (cos(x+y))
ans=cos(x)*cos(y) - sin(x)*sin(y)
```

La commande *simple* teste l'application de plusieurs méthodes, pour retenir l'expression la plus simple

```
» syms x
» simple(cos(x)^2-sin(x)^2)
» % plusieurs réponses  dont
simplify : 2*cos(x)^2-1
factor : (cos(x)-sin(x))*(cos(x)+sin(x))
...
ans= cos(2*x)
```

1.3.5. *Résolution d'équations ou d'inéquations*

Le calcul symbolique permet aussi de transformer, puis résoudre des équations, des systèmes d'équations ou des inéquations. La commande de base est **solve**.

1.3.5.1. *Equations*

Résolvons les équations

$$2x^3 - 13x^2 - 10x + 21 = 0$$

et

$$2(\ln x)^3 - 13(\ln x)^2 - 10 \ln x + 21 = 0.$$

On utilise pour cela les commandes *syms, solve, subs*.

```
» syms x
» E = 2*x^3-13*x^2-10*x+21;
» solve(E)
ans = [ 1 -3/2 7]
```

```
» E1=subs(E,x,log(x))
E1 = 2*log(x)^3-13*log(x)^2-10*log(x)+21
» solve(E1)
ans = [ exp(1) exp(-3/2) exp(7) ]
```

1.3.5.2. *Système d'équations*

On résout le système

$$\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40. \end{cases}$$

par :

```
» [X,Y]=solve('2*exp(x)-exp(y)=15','exp(x)+2*exp(y)=40')
X = log(14)
Y = log(13)
```

1.3.5.3. *Une inéquation*

La fonction *solve* de *Matlab* ne permet pas de résoudre des inéquations. Il faut utiliser directement celle de *Maple*. Par exemple l'inéquation

$$(x-3)^4 > x-3$$

se résout avec la syntaxe suivante :

```
» maple('solve((x-3)^4>(x-3))')
ans = RealRange(-inf,Open(3)), RealRange(Open(4),inf)
```

L'ensemble solution est donc $]-\infty; 3[\cup]4; +\infty[$.

1.3.6. *Mises en garde*

1.3.6.1. *Remarque 1*

La commande *maple* présentée ci-dessus ne reconnaît pas les variables définies dans l'environnement *Matlab*. Si on a défini par exemple :

```
» syms x ; A=(x-3)^4 ; B= x-3 ;
```

l'instruction

```
» solve(A-B)
```

peut être utilisée pour résoudre l'équation

$$(x-3)^4 = x-3,$$

mais l'instruction

```
» maple('solve(A>B)')
```

donnera

```
ans = ' '
```

1.3.6.2. *Remarque 2*

Le calcul symbolique de *Matlab* ne prend pas en compte les cas particuliers. Par exemple, lorsqu'on doit résoudre l'équation, d'inconnue x,

$$mx = m - 1,$$

on a, pour $m \neq 0$, la solution

$$x = (m - 1)/m,$$

mais pour $m = 0$, l'équation n'a pas de solution. Ce cas n'est pas pris en compte par *Matlab* :

```
» syms x m
» solve('m*x=m-1',x)
ans = (m-1)/m
```

De la même façon, des simplifications abusives peuvent être effectuées :

```
» syms x m
» simplify((x-m-x)/m)
ans = -1
```

Il appartient donc à l'utilisateur de détecter ces cas particuliers, et de les traiter à part.

1.3.6.3. *Remarque 3*

Les variables symboliques sont supposées réelles, réelles positives, ou complexes. On ne peut restreindre leur domaine à un intervalle borné de $\mathbb{R}$, ni à $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, ... On ne pourra donc obtenir de simplification de $\sin(n\pi)$ si on suppose n entier, car cette hypothèse ne peut pas être prise en compte par *Matlab*.

1.3.6.4. *Remarque 4*

Les résultats obtenus dans le calcul symbolique avec *Symbolic Math Toolbox* dépendent essentiellement de la version utilisée. Nous avons par exemple constaté des différences entre les versions 2.0 et 2.1.3.

1.4. Itérations et étude de suites

Les instructions d'itération classiques, **while** et **for**, permettent de répéter un traitement sur les termes successifs d'une suite.

La syntaxe générale est :

for *variable = valeurInitiale : pas : valeurFinale*
  % traitements à répéter
end

ou bien

while *condition*
  % traitements à répéter
end

On veut par exemple calculer les 20 premiers termes de la suite géométrique de raison 0.5 et de premier terme 100, puis déterminer la somme de ces termes. On place dans un tableau

$$U = [U(1)\ U(2) ... U(n)]$$

les termes successifs de cette suite :

```
» U(1) = 100 ;
» for i=1 :1 :19
   U(i+1) =0.5* U(i) ;
end
```

Aucun affichage ne se produit, en raison du $';'$ placé à la fin de l'instruction

$$U(i+1) = 0.5 * U(i)$$

Si on souhaite n'afficher que les quatre premiers et les cinq derniers termes :

```
» U(1 :4)
100.0000 50.0000 25.0000 12.5000
» U(16 :20)
0.0031 0.0015 0.0008 0.0004 0.0002
```

Enfin, on utilise la fonction *Matlab* **sum** pour calculer la somme de tous les éléments du tableau U :

```
» sum(U)
ans =199.9998
```

On calcule maintenant tous les termes de la suite jusqu'à l'obtention d'un terme inférieur à 10^{-6} :

```
» V(1) = 100 ; i = 1 ;
» while V(i)>=1e-6,
   V(i+1)=0.5*V(i) ;
   i= i+1 ;
end
```

On utilise la fonction *length*, qui donne le nombre d'éléments du tableau :

```
» length(V)
ans = 28
```

En faisant afficher les éléments de V au format *long*, on peut vérifier que $V(28)$ est le premier terme inférieur à 10^{-6} :

```
» format long
» V
...
Columns 25 through 28
0.00000005960464 0.00000002980232 0.00000001490116 0.00000000745058
```

1.5. Exercices

1.5.1. *Format long, format short*

Calculer la valeur numérique de

$$y = e^{-\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}}$$

pour $x = 1.3181$, au format "short", puis au format "long".

(solution p. 34)

1.5.2. *Tableau d'évaluation*

Calculer les valeurs numériques de

$$y = e^{-\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}}$$

pour $x = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, \cdots, 5$.

(solution p. 34)

1.5.3. *Graphe d'une fonction*

Représenter graphiquement la fonction f définie par

$$f(x) = e^{-x^2/\sqrt{2\pi}},$$

sur l'intervalle $[-3, 3]$.

(solution p. 35)

1.5.4. *Dessin d'un quadrilatère*

On donne les points

$$A\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix},\ C\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix},\ D\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Dessiner dans un repère orthonormé le quadrilatère $ABCD$ et ses diagonales.

(solution p. 35)

1.5.5. *Egalités symboliques*

On donne l'expression

$$E = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(y - \frac{\pi}{4}\right).$$

Vérifier les égalités

$$\begin{aligned} E &= 2(\sin x \cos x - \sin y \cos y) \\ &= \sin(2x) - \sin(2y) \\ &= 2\sin(x-y)\cos(x+y). \end{aligned}$$

(solution p. 36)

1.5.6. *Itérés d'une suite*

1) Calculer les 20 premiers nombres de Fibonacci définis par

$$\begin{cases} f_1 = 1,\ f_2 = 1, \\ \forall\, n \geqslant 1, \quad f_{n+2} = f_n + f_{n+1}. \end{cases}$$

2) Calculer tous les nombres de Fibonacci inférieurs à 10^6. Combien y en a-t-il ?

(solution p. 37)

1.5.7. *Suite de Fibonacci*

On définit les réels

$$A = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ B = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

et, pour tout entier $n \geqslant 1$

$$F_n = aA^n + bB^n. \tag{I}$$

1) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

2) Trouver a et b pour que

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1. \end{cases}$$

3) On en déduit que F_n défini par la formule (I), avec les valeurs de a et b obtenues à la question 2, est le n-ième nombre de Fibonacci (cf 1.5.6). Le vérifier en calculant les 20 premiers nombres de Fibonacci à l'aide de la formule (I) et en comparant aux résultats de l'exercice 1.5.6.

1.6. Solutions

Exercice 1.5.1

On utilise la fonction *exp* et la constante *pi* pour effectuer le calcul.

```
» format
» x=1.3181 ;
» y= exp(-x^2/sqrt(2*pi))
y = 0.5000
» format long
y = 0.50001490296477
```

Ce deuxième affichage montre que y n'est pas exactement égal à $1/2$, contrairement à ce que le premier affichage pouvait laisser penser !

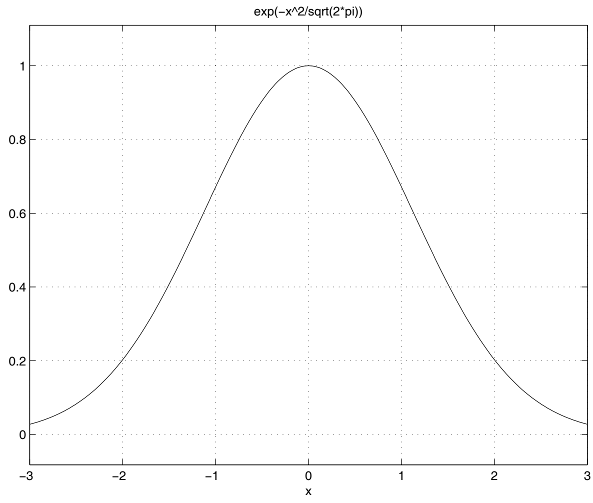
Exercice 1.5.2

On crée le tableau X des valeurs de x, puis on obtient Y tableau des valeurs correspondantes pour y.

```
» X =0.5 :0.5 :5 ;
» Y = exp(-X.^2./sqrt(2*pi))
Y = 0.9051 0.6710  0.4075  0.2028 0.0826
    0.0276 0.0075 0.0017  0.0003 0.0000
```

Exercice 1.5.3

```
» ezplot('exp(-x^2/sqrt(2*pi))',-3,3)
» grid on
```



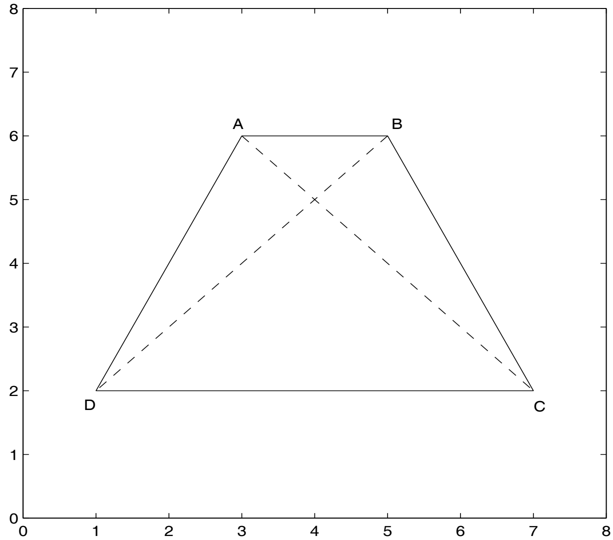
Exercice 1.5.4

On forme les tableaux d'abscisses et d'ordonnées, pour la ligne polygonale

$$Quad = ABCDA,$$

les segments $[AC]$ et $[BD]$.

```
» Xquad=[3 5 7 1 3] ;
» Yquad=[6 6 2 2 6] ;
» plot(Xquad,Yquad) ;%trait continu
» hold on ;
» axis equal ; axis([0 8 0 8])
» Xac=[3 7] ;
» Yac=[6 2] ;
» plot(Xac,Yac,'- -') ; % pointillé
» Xbd=[5 1] ;
» Ybd=[6 2] ;
» plot(Xbd,Ybd,'- -')
» gtext('A') ;gtext('B') ;gtext('C') ;gtext('D') ;
```



Exercice 1.5.5

On définit l'expression E comme différence de

$$E_x = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

et

$$E_y = \cos^2\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(y - \frac{\pi}{4}\right).$$

```
» syms x y
» Ex = (cos(x-pi/4))^2-(sin(x-pi/4))^2;
» Ey= subs(Ex,x,y);
» E= Ex - Ey;
```

La commande *simple* permet de faire apparaître deux des trois expressions demandées.

```
» simple(E)
expand :
2*sin(x)*cos(x)-2*sin(y)*cos(y)
combine(trig) :
sin(2*x)-sin(2*y)
```

Pour la troisième, on effectue la vérification inverse :

```
» F = 2*sin(x-y)*cos(x+y)
» simple(F)
ans = sin(2*x)-sin(2*y)
```

On peut aussi vérifier que la différence entre les deux expressions est nulle.

```
» simple(F-E)
ans = 0
```

Exercice 1.5.6

– Utilisation de l'instruction *for :* les deux premiers termes étant donnés, on calcule les 18 suivants.

```
» F(1) = 1 ;F(2)=1 ;
» for n=1 :18,
   F(n+2)=F(n)+F(n+1);
end
» F
F =1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233
377 610 987 1597 2584 4181 6765
```

– Utilisation de l'instruction *while* : l'itération se terminera lorsque

$$F(n) \geqslant 10^6.$$

Tous les termes, sauf le dernier, sont donc inférieurs à 10^6.

```
» clear F
» F(1)=1 ;F(2)=2 ;
» n = 2 ;
» while(F(n)<1e6),
   F(n+1)=F(n)+F(n-1) ;n=n+1 ;end
» F(1 :n-1)
ans = 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610  987
   1597 2584 4181 6765 10946 17711 28657 46368
   75025 121393 196418 317811 514229 832040
» n-1
ans = 29
```

Exercice 1.5.7

1) On déclare les variables symboliques a, b, n et on définit par leurs expressions A, B et F_n.

```
» A = sym('(1+sqrt(5))/2') ;
» B = sym('(1-sqrt(5))/2') ;
» syms a b n
» Fn=a*A^n+b*B^n
Fn=a*(1/2+1/2*5^(1/2))^n+b*(1/2-1/2*5^(1/2))^n
```

On vérifie la relation de récurrence

```
» FnPlus1 = subs(Fn,n,n+1) ;
» FnPlus2 = subs(Fn,n,n+2) ;
» simple(FnPlus2-FnPlus1-Fn)
ans = 0
```

2) On calcule F_1 et F_2, puis on cherche a et b vérifiant les conditions

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1. \end{cases}$$

Les solutions du système obtenu sont placées dans des variables a_1 et b_1 :

```
» F1 = subs(Fn,n,1)
F1 = a*(1/2+1/2*5^(1/2))+b*(1/2-1/2*5^(1/2))
» F2 = subs(Fn,n,2)
F2 = a*(1/2+1/2*5^(1/2))^2+b*(1/2-1/2*5^(1/2))^2
» [a1, b1] =solve(F1-1, F2-1)
a1 = 1/5*5^(1/2)
b1 = -1/5*5^(1/2)
```

3) On remplace, dans l'expression de F_n, a et b par les valeurs obtenues ci-dessus, et on calcule les 20 premiers termes de la suite :

```
» Fn=subs(Fn,a,a1) ; Fn=subs(Fn,b,b1)
Fn =1/5*(1/2+1/2*5^(1/2))^n*5^(1/2)-1/5*(1/2-1/2*5^(1/2))^n*5^(1/2)
» for k=1 :20, f(k)= simple(subs(Fn,n,sym(k))) ;end
» f
f = 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377  610 987
    1597  2584  4181 6765
```

On retrouve bien les valeurs de la suite de Fibonacci.

Chapitre 2

Programmation avec Matlab

Dans le chapitre précédent, on a vu comment entrer une à une des instructions *Matlab*, pour en obtenir immédiatement le résultat. Mais *Matlab* est aussi un langage de programmation, permettant d'écrire et de réutiliser des sous-programmes, d'effectuer des tests logiques, d'exécuter des actions conditionnelles, etc...

2.1. Créer des sous-programmes

2.1.1. *Mémoriser des instructions dans un fichier script*

Un fichier *scrip*t est simplement un fichier texte contenant une suite d'instructions. Cela permet de mémoriser, de corriger, de réutiliser ces instructions. A l'aide d'un éditeur de texte [1], on crée dans le répertoire courant un fichier dont le nom comporte obligatoirement l'extension *'.m'*, par exemple

$$scriptCalculSuiteFibonacci.m$$

on y copie les instructions voulues, en respectant la syntaxe de *Matlab*, en plaçant des commentaires appropriés, puis on sauvegarde. Pour exécuter ces instructions, il suffira, sous $Matlab$ d'appeler

```
» scriptCalculSuiteFibonacci
```

1. L'environnement *Matlab*, pour la plupart des versions, comprend un éditeur, que l'on ouvre en sélectionnant le menu *File/New/M.file*.

2.1.2. *Représenter une fonction mathématique*

2.1.2.1. *Exemple*

On considère la fonction f_1 définie par

$$f_1(x) = x \ln x.$$

On crée là aussi un fichier texte dans lequel sera définie la fonction f_1. Ce fichier doit être enregistré dans le répertoire de travail courant, sous le nom $f1.m$. Le contenu de ce fichier doit respecter scrupuleusement la syntaxe suivante :

```
% fonction qui calcule y = x * log(x)
function y = f1(x)
y = x.*log(x);
```

La première ligne est un commentaire qui sera automatiquement affiché si on appelle

$$help\ f1.$$

La deuxième indique que le calcul de la fonction dépend d'une variable (ici x) et que la valeur que devra retourner cette fonction est y. La troisième ligne indique justement le calcul de y en fonction de x. L'utilisation de l'opération '$\cdot *$' permettra d'appliquer cette fonction à un tableau de valeurs.

Définir ainsi une fonction permet d'effectuer, selon les besoins :

– des calculs numériques

```
» f1(1.5)
ans = 0.6082
```

– des calculs sur des tableaux de valeurs (à condition de bien noter **.***, **./**, **.^** les opérations à effectuer)

```
» X =1 :0.1 :2 ;
» f1(X)
ans = 0 0.1048 0.2188 0.3411 0.4711 0.6082
        0.7520 0.9021 1.0580 1.2195 1.3863
```

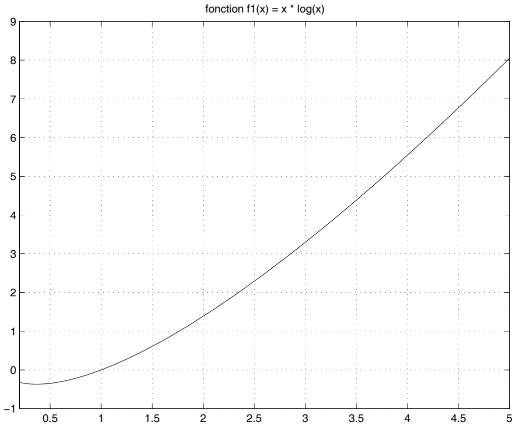
– des calculs symboliques : on vérifie par exemple que, pour tous réels strictement positifs a, b

$$bf_1(a) + af_1(b) = f_1(ab).$$

```
» syms a b positive
» b*f1(a)+a*f1(b)
ans = b*a*log(a)+a*b*log(b)
» simple( b*f1(a)+a*f1(b) -f1(a*b))
ans = 0
```

– des représentations graphiques, en utilisant la commande **fplot**

```
» fplot('f1',[0.2 5])
» grid on
» title('fonction f1(x) = x * log(x)')
```



2.1.2.2. *Comparaison entre deux méthodes*

Au chapitre précédent, on a vu comment représenter une fonction mathématique à l'aide d'une expression symbolique :

```
» syms x
» f1DeX=x·∗log(x);
```

Cela peut paraître plus simple que de créer un fichier *f1.m* contenant la définition de la fonction. Mais, à l'usage, il est plus naturel d'utiliser :

```
» f1(3)
ans = 3.2958
```

plutôt que

```
» subs(f1DeX,x,3))
ans = 3.2958
```

De plus, lorsqu'on doit effectuer des calculs répétés un grand nombre de fois, l'utilisation des expressions symboliques génère un temps de traitement plus long. Les commandes *Matlab* **tic** et **toc** permettent de lancer et d'arrêter un "chronomètre". Les résultats obtenus dépendent de la machine utilisée. On obtient par exemple

```
» tic ;for i=1 :1 :1000,y=f1(i) ;end ;toc
elapsedtime =0.0147
» tic ;for i=1 :1 :1000,y=double(subs(f1DeX,x,i)) ;end ;toc
elapsedtime = 3.2738
» 3.2738/0.0147
ans = 222.7075
```

La deuxième itération a nécessité dans ce cas un temps d'exécution plus de 200 fois supérieur par rapport à la première !

2.1.3. *Créer un sous-programme avec paramètres*

Un sous-programme permet de mémoriser, d'adapter, de réutiliser un calcul. On l'appelle **fonction** en informatique (à ne pas confondre avec une fonction au sens mathématique, même si les deux notions se rejoignent parfois, comme au paragraphe précédent).

Matlab dispose de plusieurs centaines de fonctions prédéfinies, mais l'utilisateur peut aussi créer ses propres fonctions.

2.1.3.1. *Exemple 1*

On peut créer une fonction $fibonacci(n)$ qui calcule et retourne le tableau constitué des n premiers nombres de Fibonacci. Là aussi, l'ensemble des instructions doit être enregistré dans un fichier texte du répertoire courant, appelé $fibonacci.m$

```
% Fonction qui calcule et retourne les n
% premiers nombres de Fibonacci
function F = fibonacci(n)
F(1)=1 ; F(2)=1 ;
for i=3 :n
   F(i)=F(i-1)+F(i-2) ;
end
```

On peut alors appeler cette fonction en remplaçant le paramètre n par la valeur souhaitée :

```
» T = fibonacci(6)
T = 1 1 2 3 5 8
» total = sum(fibonacci(30))
total = 2178308
```

2.1.3.2. *Remarques*

L'en-tête

function F=fibonacci(n)

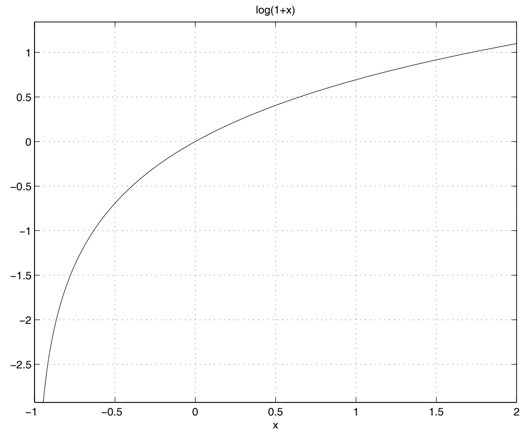
indique à la fois le nom de la fonction (*fibonacci*), le nom du ou des paramètres (ici n), et la valeur (ou la liste de valeurs) retournée (ici F). On doit respecter scrupuleusement cette syntaxe, en l'adaptant aux besoins.

Une fonction peut dépendre de plusieurs paramètres, ou d'aucun. Elle peut retourner une valeur, une liste de valeurs, ou même aucune valeur si son but est d'exécuter une action (construction d'un graphique, affichage de résultats). A titre d'exemple, l'exercice 2.5.1 p. 55 a pour but de construire une fonction dépendant de deux paramètres et retournant une liste de deux valeurs.

2.1.3.3. *Exemple 2*

On aura noté que, par défaut, les graphiques sous *Matlab* font apparaître un cadre gradué, mais pas les axes du repère.

```
» ezplot('log(1+x)',-1,2)
» grid on
```

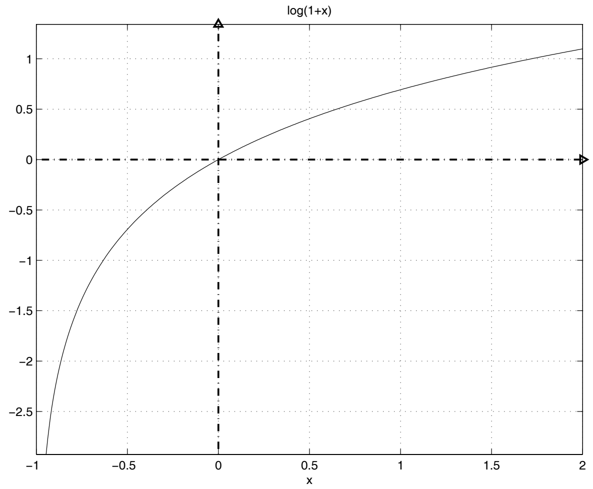


On peut créer une fonction *dessineRepere* qui permet de faire apparaître ces axes en traits mixtes et épais.

```
function dessineRepere
hold on
V=axis ;
% V contient les abscisses et ordonnées minimum et maximum courantes
Xmin=V(1) ;Xmax=V(2) ;Ymin=V(3) ;Ymax=V(4) ;
plot([Xmin Xmax],[0 0],'-.','LineWidth',1.5)
% LineWidth permet de choisir la largeur du trait (1 par défaut)
plot(Xmax,0,'>','LineWidth',1.5) %dessine la flèche horizontale
plot([0 0],[Ymin Ymax],'-.','LineWidth',1.5)
plot(0,Ymax,'^','LineWidth',1.5)
```

Son utilisation donne ici

```
» dessineRepere
```



2.2. Traitements conditionnels, expressions logiques

Les instructions conditionnelles (avec **if elseif else**) interviennent dans la définition de certaines fonctions mathématiques.

2.2.1. *Exemple : étude d'une fonction définie par morceaux*

On considère la fonction f définie sur [0, 1] par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{16} & \text{si} \quad 0 \leqslant x < \dfrac{1}{4} \\ x & \text{si} \quad \dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{4} \\ \text{-}x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{16} & \text{si} \quad \dfrac{3}{4} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

On trace la représentation graphique de f dans un repère orthonormé

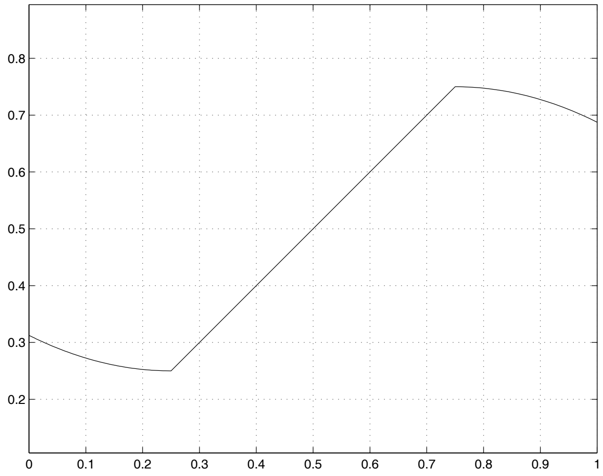
$$(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}).$$

Pour cela, on définit dans un fichier *fParMorceaux.m :*

```
function y = fParMorceaux(x)
if(x <1/4) y=x.^2-1/2*x+5/16;
elseif x<=3/4 y=x;
else y= -x.^2+3/2*x+3/16;
end
```

On peut ensuite appeler

```
» fplot('fParMorceaux',[0 1])
» axis equal
» grid on
```



On peut aussi effectuer des calculs numériques avec cette fonction :

```
» a=1/6 ; fParMorceaux(a)
ans = 0.2569.
```

Mais les méthodes de la *Symbolic Math Toolbox* ne gèrent pas les expressions dans lesquelles figurent des conditions.

```
» a=sym('1/6') ;fParMorceaux(a)
? ? ? Function '<' is not defined for values of class 'sym'.
```

Pour effectuer des calculs symboliques (calculs de limites, dérivées, primitives, etc...), il faudrait donc écrire les trois expressions définissant f et effectuer les calculs successivement sur chacune d'elles.

2.2.2. *Expressions logiques et quantificateurs*

Les expressions logiques utilisent le plus souvent les opérateurs de comparaison qu'on rappelle ici :

==	égal
~=	différent
>	strictement supérieur
>=	supérieur ou égal
<	strictement inférieur
<=	inférieur ou égal

Elles utilisent aussi les opérateurs logiques & (*et*), | (*ou*), ~ (*non*))

Exemple

On considère la fonction f définie en 2.2.1. On peut vérifier, en notant

$$X = \{0,\ 0.001, 0.002, ..., \ 0.999, 1\},$$

qu'on a, pour tout $x \in X$

$$\begin{cases} f(x) \in [0,\ 1] \\ f \circ f(x) = f(x). \end{cases}$$

On définit :

```
» X=[0 :0.001 :1] ;
» Y=fParMorceaux(X) ;
» Z=fParMorceaux(Y) ;
```

On peut alors tester globalement les propriétés des éléments de Y et Z, en utilisant les fonctions **all** et **any** :

```
» all(Y>=0 & Y<=1)
ans = 1    % tous les éléments de Y sont compris entre 0 et 1
» all(Y==Z)
ans = 1
% chaque élément de Y est égal à l'élément correspondant de Z
% Inversement :
» any(Y~=Z)
ans = 0
```

2.2.3. *Exemple de fonction récursive*

Une fonction récursive (fonction dont l'exécution peut appeler la fonction elle-même) est basée sur un schéma conditionnel. En mathématiques, une définition par récurrence conduit assez naturellement à la construction d'une fonction récursive.

Exemple

Partant de la définition par récurrence de la factorielle d'un entier :

$$\begin{cases} 0! = 1 & \\ \forall n \in \mathbb{N}^* & n! = n[(n-1)!], \end{cases}$$

on définit dans un fichier *factorielle.m :*

```
function res=factorielle(n)
if n==0, res=1 ;
else res=n*factorielle(n-1) ;
end
```

A l'utilisation, on obtient

```
» factorielle(10)
ans = 3628800
```

On a ici un exemple de fonction récursive : *factorielle*(10) appelle *factorielle*(9), qui lui-même appelle *factorielle*(8)...

Le principe de récurrence montre que

$$\textit{factorielle}(n)$$

calcule bien $n!$ pour tout $n \geqslant 0$:

– par construction, *factorielle*(0) retourne bien $res = 1$,

– si on suppose que *factorielle*$(n-1)$ retourne la valeur $(n-1)!$, alors *factorielle*(n) retourne bien la valeur

$$res = n \times factorielle(n-1) = n[(n-1)!] = n!$$

(voir aussi exercice 2.5.3 p. 56)

2.3. Les types de données utilisés par *Matlab*

Avec *Matlab*, on définit des expressions et on utilise des variables sans déclarer explicitement leur type (numérique, symbolique, tableau, chaîne de caractères). C'est la valeur affectée à une variable qui détermine le type de celle-ci. Le plus souvent, le type des expressions manipulées est adapté au calcul souhaité (calcul numérique approché, calcul symbolique, calcul sur des tableaux de valeurs) d'autant que la plupart des opérations ou fonctions s'appliquent de manière adaptée à chaque type (l'addition par exemple effectue aussi bien la somme de deux valeurs numériques que celle de deux tableaux de valeurs ou celle de deux expressions symboliques).

Mais il est parfois nécessaire de connaître le type précis des expressions traitées et de faire la distinction entre ces types. Considérons par exemple les trois affectations suivantes :

```
» n = 123 ;          % type numérique
» c = '123' ;        % type chaîne de caractères
» s = sym('123') ;   % type expression symbolique
```

– n est de type numérique,

– c est de type chaîne de caractères,

– s est de type expression symbolique.

Même si, à l'affichage, les valeurs de ces variables apparaissent identiques, les opérations qui s'effectueront sur chacune d'elles ne seront pas les mêmes !

La commande **whos** permet de visualiser le type de ces trois variables.

```
» whos
Name    Size    Bytes    Class
c       1x3       6      char array
n       1x1       8      double array
s       1x1     130      sym object
Grand total is 8 elements using 144 bytes
```

2.3.1. *Type numérique*

Avec des variables, expressions ou tableaux de ce type, *Matlab* effectue des calculs numériques approchés. C'est son mode de calcul par défaut.

– Les calculs se font en base deux, avec des mantisses de 52 chiffres (cette représentation interne est développée dans le tome 2, au chapitre 4, consacré à l'arithmétique de l'ordinateur).

– A l'affichage les valeurs numériques apparaissent en base 10,.

```
» x= 80/18, y = sqrt(x)
x = 4.4444
y = 2.1082
» X =1 :0.2 :2
X = 1.0000 1.2000 1.4000 1.6000 1.8000 2.0000
» Y = X·∗*log(X)
Y = 0 0.2188 0.4711 0.7520 1.0580 1.3863
```

Les options de la commande *format* permettent de choisir le mode d'affichage :

```
» a=pi^3
a = 31.0063
» format long ; a
a = 31.00627668029982
»  format short e ; a
a = 3.1006e+001
» format long e ; a
a = 3.100627668029982e+001
```

2.3.2. *Chaînes de caractères*

Ce sont en fait des tableaux de caractères. Chaque caractère est accessible par son indice.

```
» c ='2et2font4' ;
» c(5 :8)
ans = font
```

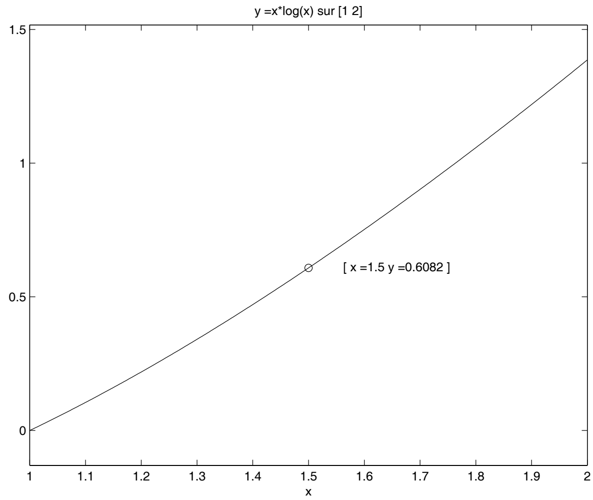
Elles permettent de manipuler du texte qu'on peut concaténer (voir **strcat**) ou placer dans une fenêtre graphique (voir *gtext, title*).

Ces chaînes peuvent aussi définir une expression mathématique. Elles sont alors traitées comme une expression symbolique qu'on peut représenter graphiquement (voir *ezplot*) ou évaluer numériquement (voir **eval**).

A l'inverse, un nombre réel peut être converti en chaîne de caractères (**num2str**).

A titre d'exemple, on pourra analyser chacune des instructions ci-dessous et en visualiser l'effet sur la figure.

```
» expr = 'x*log(x)' ;
» ezplot (expr,1,2)
» title(strcat('y = ',expr, ' sur [1 2]'))
» x = 1.5 ; y = eval(expr)
y = 0.6082 ;
» hold on ; plot(x,y, 'o')
» texte = strcat('[ x = ', num2str(x), 'y = ', num2str(y), ' ]')
»gtext(texte)
```



– Les chaînes de caractères permettent aussi de représenter et convertir les nombres entiers en base 2, 16, et plus généralement en base *b* (voir tome 2, chapitre 4, "arithmétique de l'ordinateur").

2.3.3. *Type symbolique*

Des variables, expressions et tableaux de ce type permettent de définir des variables mathématiques (voir *syms*) et d'effectuer des calculs symboliques. La commande *sym* permet de convertir une expression numérique ou une chaîne de caractères en type symbolique. A l'inverse, la commande *double* convertit une expression symbolique sans variable en type numérique. Voici un exemple de calcul symbolique sur un tableau de valeurs, puis de conversion de ce tableau en numérique :

```
» T = sym([0 :pi/12 :pi/2])
T = [ 0, pi/12, pi/6, pi/4, pi/3, 5*pi/12, pi/2]
» C = simple(cos(T))
C = [ 1, 1/4*6^(1/2)*(1+1/3*3^(1/2)), 1/2*3^(1/2),
  1/2*2^(1/2), 1/2, 1/4*6^(1/2)*(1-1/3*3^(1/2)), 0]
» Cnum = double(C)
Cnum = 1.0000 0.9659 0.8660 0.7071 0.5000 0.2588 0
```

2.4. Quelques commandes importantes de *Matlab*

2.4.1. *Sauvegardes*

On a vu que, pour sauvegarder une session de travail (commandes et réponses), dans un fichier texte nommé par exemple s*ession.txt*, il fallait utiliser dès le début de la session

```
» diary session.txt
```

Les sous-programmes (scripts, fonctions) enregistrés dans des fichiers d'extension *.m* (voir paragraphe 2.1) sont évidemment sauvegardés au fur et à mesure.

Pour sauvegarder un graphique dans un fichier au format *PostScript*, nommé par exemple *monDessin.ps*, on utilise la commande

```
» print -dps monDessin
```

L'extension *.ps* sera donnée automatiquement au nom du fichier.

Pour sauvegarder l'ensemble des variables de la session de travail en cours, dans un fichier nommé par exemple *mesVariables*, on utilise

```
» save mesVariables
```

L'extension *.mat* est automatiquement ajoutée.
Même si on quitte *Matlab*, on pourra lors d'une session ultérieure reprendre l'exercice là où on l'avait laissé à l'aide de la commande

```
» load mesVariables
```

2.4.2. *Gestion des variables*

En général, le résultat d'un calcul est affecté à une variable, ce qui permet de réutiliser ultérieurement sa valeur.

Si une expression à calculer n'est pas affectée à une variable, c'est par défaut la variable **ans** qui est affectée ou modifiée.

On peut effacer la valeur d'une variable x par la commande

» clear x

(utile par exemple pour réinitialiser un tableau), et on peut effacer l'ensemble des variables par

» clear

2.4.3. *Gestion de l'affichage*

Pour modifier le format d'affichage des valeurs numériques, on utilise la commande *format optionsDeFormat* où *optionsDeFormat* peut être égal à $short, long$, etc...

Pour réinitialiser la fenêtre d'affichage, on utilise la commande

» **clc**

Pour réinitialiser la fenêtre graphique, on utilise la commande

» clf

helpwin, on l'a vu, ouvre une fenêtre graphique d'aide, alors que *help* affiche l'aide dans la fenêtre courante.

Pour visualiser le contenu du fichier *monScript.m* contenant un script ou une fonction on utilise la commande

» **type** monScript.m

Lorsqu'on exécute un fichier $script$, on peut visualiser au fur et à mesure les commandes en même temps que leur résultat grâce à la commande préalable

» **echo** on

2.5. Exercices

2.5.1. *Division euclidienne*

Ecrire une fonction

$$[q, r] = divEucli(a, b)$$

qui calcule le quotient et le reste de la division de l'entier a par l'entier non nul b. On pourra, pour effectuer le calcul, utiliser la fonction **floor** qui donne la partie entière d'un nombre réel, et la fonction **mod** qui calcule le reste de la division euclidienne.

(solution p. 56)

2.5.2. *Suite pseudo-aléatoire*

Une suite "pseudo-aléatoire" de nombres entiers est générée de la manière suivante :

– on se donne trois entiers fixés a, c, m avec a et m non nuls ;
– on choisit une première valeur x_1 ;
– on définit par récurrence la suite des valeurs (x_k) par :

$$x_{k+1} \text{ est le reste de la division de } ax_k + c \text{ par } m.$$

Ecrire une fonction $X = suiteAlea(a, c, m, x_1, n)$ qui construit ainsi dans un tableau X une suite de n nombres entiers pseudo-aléatoires, compris entre 0 et $m - 1$.

Tester dans un cas simple, en vérifiant que, pour

$$a = 13, \quad c = 0, \quad m = 31, \quad x_1 = 1,$$

les 12 premiers nombres obtenus sont

1, 13, 14, 27, 10, 6, 16, 22, 7, 29, 5, 3.

Remarque : en choisissant m suffisamment grand et en divisant tous les termes de la suite obtenue par m, on obtient une suite de nombres réels pseudo-aléatoires dans l'intervalle [0, 1].

(solution p. 57)

2.5.3. *P.G.C.D de deux nombres*

On peut montrer par récurrence sur a que le plus grand commun diviseur (*PGCD*) de deux entiers naturels a et b tels que $a \geqslant b$ est défini par :

$$\begin{cases} PGCD(a,b) = a, & \text{si } b = 0 \text{ ou } b = a \\ PGCD(a,b) = PGCD(b,r), & \text{sinon .} \end{cases}$$

(r est le reste de la division euclidienne de a par b, la fonction *Matlab* $mod(a,b)$ calcule ce reste).

Ecrire une fonction récursive

$$d = PGCD(a,b)$$

utilisant cette définition.

(solution p. 57)

2.5.4. *Calculs sur une chaine de caractères*

1) On donne la chaîne de caractères $c =' 1 + sqrt(x)'$.
   a) Que représente $c(5)$?
   b) Comment obtenir la valeur exacte de c pour $x = 5$?
   c) Comment obtenir la valeur numérique approchée de c pour $x = 5$?

2) Convertir c en expression symbolique s et reprendre pour s les questions de (1).

3) Définir dans un fichier $f.m$ la fonction $Matlab$ telle que

$$f(x) = 1 + \sqrt{x}$$

et reprendre pour f les questions de (1).

(solution p. 58)

2.6. Solutions

Exercice 2.5.1

On crée dans un fichier *divEuclid.m* la fonction *divEuclid* qui calcule d'abord

$$q = E(a/b),$$

puis $r = \mathrm{mod}(a,b)$:

```
function [q,r] = divEuclid(a,b)
q= floor(a/b) ;
r = mod(a,b) ;
```

On teste cette fonction sur un exemple :

```
» [q,r] =divEuclid(22,5)
q = 4
r = 2
» % On a bien 22 = 5 x 4 + 2
```

Exercice 2.5.2

De même que précédemment, on crée la fonction *suiteAlea*, puis on la teste sur l'exemple proposé dans l'énoncé.

```
function X=suiteAlea(a,c,m,x1,n)
X(1)=x1 ;
for k = 1 :n-1,
  [q,X(k+1)]= divEuclid(a*X(k)+c,m) ;
end
```

```
» X = suiteAlea (13,0,31,1,12)
X = 1 13 14 27 10 6 16 22 7 29 5 3
```

Exercice 2.5.3

On reprend les deux cas donnés dans l'énoncé.

```
function d=PGCD(a,b)
if (b==0 |b==a)
   d=a ;
else
   r = mod(a,b) ;
   d = PGCD(b,r) ;
end
```

Exercice 2.5.4

1) On crée la chaîne de caractères c :

```
» c = '1+sqrt(x)' ;
» c(5)
ans = r   % c(5) est le cinquième caractère de la chaîne c
» x = 5 ; eval(c)
ans = 3.2361   % valeur numérique approchée
» subs(c,'x',sym('5'))   % subs s'applique aussi au type chaîne
ans = 5^(1/2)+1
```

2) A partir de c, on crée l'expression symbolique s :

```
» s = sym(c) ;
» s(5)
? ? ? Index exceeds matrix dimensions.
% s n'est pas un tableau, contrairement à c !
» subs(s,'x' ,5)   % valeur exacte
ans = 5^(1/2)+1
» double(ans)   % conversion en numérique
ans = 3.2361
```

3) On crée la fonction *Matlab* f à l'aide d'un fichier "$f.m$" :

```
function y = f(x)
y = 1+sqrt(x) ;
```

puis on utilise cette fonction f :

```
» f(5)   % image de 5 par la fonction f
ans = 3.2361   % valeur numérique approchée
» f(sym('5'))   % image par f d'une expression symbolique
ans = 5^(1/2)+1   % résultat de type symbolique
```

DEUXIÈME PARTIE

Algèbre linéaire

Chapitre 3

Systèmes linéaires : méthode de Gauss

Nous commençons par présenter l'aspect calculatoire de résolutions de systèmes linéaires quelconques. Tout naturellement apparaîtra un travail sur des tableaux rectangulaires.

3.1. Systèmes linéaires

3.1.1. *Définition*

On dit qu'on a un **système linéaire** de n équations $(n \geqslant 1)$ à p inconnues $(p \geqslant 1)$ lorsqu'on a les équations :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1p}x_p = b_1 & L_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2p}x_p = b_2 & L_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{ip}x_p = b_i & L_i \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nj}x_j + ... + a_{np}x_p = b_n & L_n \end{array} \right.$$

où les données sont :

1) **le second membre** du système constitué par les nombres réels ou complexes b_1, b_2, b_3,..., b_n,

2) **les coefficients** réels ou complexes a_{ij} pour i prenant toutes les valeurs entre 1 et n et j prenant toutes les valeurs entre 1 et p. (n, p constantes données du système).

L_i $(i = 1, ..., n)$ désigne la $i^{ième}$ **ligne** du système (S).

Les **inconnues** à déterminer sont $x_1, x_2, x_3, ..., x_p$.

Le système est dit carré lorsque $n = p$. C'est le cas où on a autant d'équations que d'inconnues. Mais on aura aussi à considérer des systèmes où n et p sont quelconques.

On dira que le système est **homogène** lorsque les données b_i sont nulles pour $i = 1, ..., n$. On peut remarquer qu'un système linéaire homogène admet au moins la solution nulle $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_p = 0$. Ce n'est pas nécessairement la seule comme le montre l'exemple suivant

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & L_1 \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 & L_2, \end{cases}$$

qui admet, en plus de la solution triviale,

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,$$

la solution

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1/2,\ x_3 = 2$$

(et beaucoup d'autres !)

3.1.2. *L'ensemble des solutions*

On notera $\mathbb{S}$ l'ensemble des solutions du système (S). Cet ensemble peut être **vide**, ou contenir une **unique** solution $x_1, x_2, x_3, ..., x_p$ ou contenir **plusieurs** solutions.

Si on suppose connue une solution particulière de (S) notée

$$x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0, ...,\ x_p^0,$$

et si on pose, pour $j = 1, ..., p$

$$y_j = x_j - x_j^0$$

alors

$$y_1,\ y_2,\ y_3, ...,\ y_p,$$

est solution du système homogène

$$(S_0)\quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1j}y_j + ... + a_{1p}y_p = 0 & L_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2j}y_j + ... + a_{2p}y_p = 0 & L_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + ... + a_{ij}y_j + ... + a_{ip}y_p = 0 & L_i \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nj}y_j + ... + a_{np}y_p = 0. & L_n \end{cases}$$

D'où le résultat :

> *La solution générale du système (S) s'obtient en ajoutant une solution particulière de (S) à la solution générale du système homogène (S_0).*

3.1.3. *Systèmes remarquables*

Il existe des systèmes, dits **échelonnés**, dont la résolution est simple. Ce sont les systèmes pour lesquels tous les coefficients "sous la diagonale" sont nuls, c'est-à-dire pour lesquels

$$i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

Ils peuvent être de trois formes :

1) les systèmes triangulaires supérieurs, à n équations et n inconnues, de la forme :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{ii}x_i + ... + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n. \end{array} \right.$$

Il est clair que si tous les a_{ii} sont non nuls, par remontées successives on obtient toutes les inconnues x_i. On aura dans ce cas, une unique solution du système.

2) Les systèmes échelonnés de forme trapézoïdale, où il y a plus d'inconnues que d'équations, cas où $n < p$. Ils se présentent sous la forme

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n + ... + a_{np}x_p = b_n \end{array} \right.$$

Dans ce cas, si tous les coefficients $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ sont non nuls, le système admet une infinité de solutions, obtenues en donnant des valeurs arbitraires aux $p - n$ inconnues $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_p$. On peut alors exprimer les n premières inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ en fonction de ces valeurs arbitraires.
En voici un exemple simple, pour lequel $n = 2$ et $p = 3$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{rrl} x & +y - z = 1 & \quad L_1 \\ & -y + 2z = 2 & \quad L_2. \end{array} \right.$$

La valeur de z peut être choisie arbitrairement, et les solutions sont de la forme

$$\left\{\begin{array}{ll} z = & t \\ y = & 2t-2 \\ x = & -(2t-2)+t+1 \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

3) Les systèmes échelonnés où on a $n > p$.

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{pp}x_p & = b_p \\ 0 & = b_{p+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & = b_n \end{array}\right.$$

Dans ce cas, il y a plus d'équations que d'inconnues. Pour ces systèmes il y a deux possibilités : ou bien au moins l'un des nombres $b_{p+1}, \cdots, b_n$ n'est pas nul et le système n'a aucune solution, ou bien tous les nombres $b_{p+1}, \cdots, b_n$ sont nuls, et on est ramené à un système triangulaire supérieur à p inconnues et p équations.

3.2. Opérations fondamentales sur les systèmes

Il existe trois actions simples (dues à Gauss) qui permettent de transformer un système (S) en un système équivalent plus simple à résoudre.

1) **1ère action :** Dans un système donné (S), on peut échanger deux lignes quelconques L_i et L_k. On écrira

$$L_i \longleftrightarrow L_k.$$

2) **2ème action :** On peut remplacer une ligne quelconque L_i par l'un de ses multiples non nuls. On notera

$$L_i \longleftarrow \alpha.L_i \quad \alpha \neq 0.$$

3) **3ème action :** On peut enfin, remplacer une ligne quelconque par la somme d'un multiple (non nul) de cette ligne et d'une combinaison finie des autres lignes. Cela se traduit par

$$L_i \longleftarrow \alpha.L_i + \sum_{k \neq i} \beta_k L_k , \quad \alpha \neq 0.$$

Lorsqu'on effectue une quelconque des trois actions ci-dessus, sur un système (S), on obtient alors une nouvelle **écriture équivalente de ce système**.

Nous verrons par la suite qu'après avoir effectué un nombre fini de ces actions élémentaires, on peut se ramener à un système échelonné, et on obtient **toutes** les solutions de (S), quels que soient le nombre d'inconnues et le nombre d'équations (ou lignes).

Exemple

A partir du système

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 3\ L_1 \\ x & + & y & - & z & = & 2\ L_2 \\ x & - & y & + & z & = & 1\ L_3, \end{array}\right.$$

on fait

$$L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 2\ L_1 \\ & & y & + & z & = & 3\ L_2 \\ x & - & y & + & z & = & 1\ L_3 \end{array}\right.$$

puis

$$L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$$

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 2\ L_1 \\ & & y & + & z & = & 6\ L_2 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 1\ L_3 \end{array}\right.$$

et enfin

$$L_2 \longleftarrow 2L_2$$

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 2\ L_1 \\ & & 2y & + & 2z & = & 6\ L_2 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 1\ L_3 \end{array}\right.$$

Dans cette dernière écriture du système (S), l'inconnue x ne figure pas dans les deux dernières équations et l'inconnue y est prête à être éliminée de la dernière.

3.3. Méthode de résolution de Gauss

Cette méthode consiste à effectuer un certain nombre d'actions élémentaires pour obtenir un système équivalent échelonné. Elle s'applique à un système quelconque (carré ou non).

3.3.1. *Présentation sur un exemple*

Soit à trouver toutes les solutions du système à $n = 4$ équations et $p = 5$ inconnues :

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
0x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 0x_5 & = & b_1 \quad L_1\\
2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & b_2 \quad L_2\\
3x_1 & + & 0x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & b_3 \quad L_3\\
4x_1 & + & x_2 & + & 11x_3 & + & 0x_4 & + & 6x_5 & = & b_4 \quad L_4.
\end{array}\right.$$

3.3.1.1. *Première étape*

Elle consiste à choisir une ligne dont le **coefficient** de x_1 est non nul et à la mettre en première ligne. Ce coefficient est appelé **pivot** de Gauss. Pour des raisons de commodité de calculs, on pourra privilégier une ligne ayant un pivot égal à 1 si elle existe.

Sur notre exemple, prenons comme première ligne la deuxième. Autrement dit, on fait :

$$L_1 \longleftrightarrow L_2$$

on a

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
\mathbf{2}x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & b_2 \quad L_1\\
0x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 0x_5 & = & b_1 \quad L_2\\
3x_1 & + & 0x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & b_3 \quad L_3\\
4x_1 & + & x_2 & + & 11x_3 & + & 0x_4 & + & 6x_5 & = & b_4 \quad L_4.
\end{array}\right.$$

3.3.1.2. *Deuxième étape*

On cherche ensuite à annuler toute la colonne en dessous du pivot choisi, en effectuant les actions élémentaires de Gauss utilisant la première ligne.

Ici on fera donc

$$L_3 \longleftarrow 2L_3 - 3L_1,$$

puis

$$L_4 \longleftarrow 2L_4 - 4L_1,$$

et le système est équivalent à

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcll}
\mathbf{2}x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & b_2 & L_1\\
0x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 0x_5 & = & b_1 & L_2\\
0x_1 & - & 3x_2 & - & 9x_3 & - & x_4 & - & 8x_5 & = & 2b_3 - 3b_2 & L_3\\
0x_1 & - & 2x_2 & - & 6x_3 & - & 4x_4 & - & 12x_5 & = & 2b_4 - 4b_2 & L_4.
\end{array}\right.$$

3.3.1.3. *Troisième étape*

La première ligne ne changera plus. On réitère les deux étapes précédentes pour le sous-système constitué des trois autres lignes :

$$(S') \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcll} \mathbf{1}x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 0x_5 & = & b_1 & & L_2 \\ -3x_2 & - & 9x_3 & - & x_4 & - & 8x_5 & = & 2b_3 - 3b_2 & & L_3 \\ -2x_2 & - & 6x_3 & - & 4x_4 & - & 12x_5 & = & 2b_4 - 4b_2 & & L_4. \end{array} \right.$$

par les actions successives

$$\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftarrow & L_3 + 3L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + 2L_2 \end{array}$$

et on continue jusqu'à la fin pour les sous-systèmes suivants. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcll} 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & b_2 & L_1 \\ 0x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 0x_5 & = & b_1 & L_2 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & - & \mathbf{4}x_4 & - & 8x_5 & = & 2b_3 - 3b_2 + 3b_1 & L_3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & - & 6x_4 & - & 12x_5 & = & 2b_4 - 4b_2 + 2b_1 & L_4. \end{array} \right.$$

et enfin, après l'action

$$L_4 \longleftarrow 2L_4 - 3L_3,$$

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & b_2 \\ 0x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 0x_5 & = & b_1 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & - & 4x_4 & - & 8x_5 & = & 2b_3 - 3b_2 + 3b_1 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & 4b_4 - 6b_3 + b_2 - 5b_1 \end{array} \right.$$

On distingue ainsi deux cas :

1) Si les données b_1, b_2, b_3 et b_4 ne vérifient pas la condition

$$4b_4 - 6b_3 + b_2 - 5b_1 = 0,$$

alors, on a obtenu un système échelonné de type (3) (cf. 3.1.3 l) qui n'admet aucune solution :

$$\mathbb{S} = \emptyset.$$

2) Si la condition

$$4b_4 - 6b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$$

est vérifiée, alors par remontées successives on peut résoudre ce système. Faisons le à titre d'exemple dans le cas

$$b_1 = 0,\ b_2 = 6,\ b_3 = 1,\ b_4 = 0.$$

Le système s'écrit alors

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & 6 \\ 0x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 0x_5 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & - & 4x_4 & - & 8x_5 & = & -16. \end{array}\right.$$

En choisissant comme paramètre l'inconnue auxiliaire x_5 dans la dernière ligne, il vient

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & 6 \\ 0x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 0x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & & & = & 4-2x_5 \end{array}\right.$$

et après un autre choix du paramètre x_3, dans la deuxième ligne, on obtient finalement

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lllcl} x_1 & & & = & -1-x_5-2x_3 \\ & x_2 & & = & 4-2x_5-3x_3 \\ & & x_4 & = & 4-2x_5. \end{array}\right.$$

Cela détermine toutes les solutions du système, qu'on écrit sous forme ensembliste

$$\mathbb{S} = \{(-1-x_5-2x_3, 4-2x_5-3x_3, x_3, 4-2x_5, x_5) : x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}\ .$$

3.3.2. *Systèmes de Cramer*

3.3.2.1. *Définition*

On suppose ici que $n = p$. On considère donc le système carré

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1 & L_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2 & L_2 \\ \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i & L_i \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nj}x_j + ... + a_{nn}x_n = b_n & L_n. \end{array}\right.$$

Le système admet une unique solution si, et seulement si, la méthode de Gauss fait apparaître n pivots successifs tous non nuls. Dans ce cas on dira que le système est de Cramer.

3.3.2.2. *Exemple*

Considérons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} 2x & -y & +z & = & 3 & L1 \\ x & +y & -2z & = & -3 & L2 \\ 2x & +y & -2z & = & -3 & L3. \end{array}\right.$$

Choisissons 2 comme premier pivot (dans la première ligne). Après les deux actions

$$\begin{array}{lcl} L2 & \longleftarrow & -2L2+L1 \\ L3 & \longleftarrow & -L3+L1, \end{array}$$

on obtient

$$\left\{\begin{array}{rrrcll} 2x & -y & +z & = & 3 & L1 \\ & -3y & +5z & = & 9 & L2 \\ & -2y & +3z & = & 5 & L3, \end{array}\right.$$

ensuite par

$$L3 \longleftarrow L3 - \frac{2}{3}L3,$$

il vient

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} 2x & -y & +z & = & 3 & L1 \\ & -3y & +5z & = & 9 & L2 \\ & & -\frac{1}{3}z & = & -1 & L3. \end{array}\right.$$

Le système est donc de Cramer, puisque les trois pivots successifs sont non nuls. La dernière ligne donne

$$z = 3.$$

En reportant dans la deuxième ligne, on obtient

$$y = 2$$

et enfin, en utilisant la première ligne, on trouve

$$x = 1.$$

3.4. Résolution avec *Matlab*

3.4.1. *Utilisation de solve*

Pour résoudre le système

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} 0x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 0x_5 & = & 0 & L_1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & 6 & L_2 \\ 3x_1 & + & 0x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 1 & L_3 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 11x_3 & + & 0x_4 & + & 6x_5 & = & 0 & L_4, \end{array}\right.$$

on applique la fonction *solve* aux quatre lignes, définies sous forme de chaînes de caractères :

```
» eq1 ='0*x1+x2+3*x3-x4+0*x5=0';
» eq2= '2*x1+x2+7*x3+x4+6*x5=6';
» eq3 = '3*x1+0*x2+6*x3+x4+5*x5=1';
» eq4 = '4*x1+x2+11*x3+0*x4+6*x5=0';
» S1 =solve(eq1,eq2,eq3,eq4)
S1 =
x1 : [1x1 sym]
x2 : [1x1 sym]
x3 : [1x1 sym]
x4 : [1x1 sym]
```

La réponse, peu lisible il est vrai, indique que S1 est donné sous forme appelée en informatique structure à 4 champs, notés S1.x1, S1.x2, S1.x3, S1.x4. On en explicite le contenu par

```
» [S1.x1 S1.x2 S1.x3 S1.x4]
ans =
[ -2*x3-x5-1, -3*x3-2*x5+4, x3, -2*x5+4]
```

3.4.2. *Utilisation de rref*

La fonction **rref** applique la méthode de Gauss au **tableau** constitué des coefficients et des seconds membres, entré ligne par ligne :

```
» T= [0 1 3 -1 0 0 ;2 1 7 1 6 6 ;3 0 6 1 5 1 ;4 1 11 0 6 0] ;
» rref(T)
ans =
1 0 2 0 1 -1
0 1 3 0 2 4
0 0 0 1 2 4
0 0 0 0 0 0
```

La lecture du tableau obtenu en résultat donne le système

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + 2x_3 \quad\quad + x_5 = -1 \\ \quad x_2 + 3x_3 \quad\quad + 2x_5 = 4 \\ \quad\quad\quad\quad x_4 + 2x_5 = 4 \\ \quad\quad\quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

Il faut alors en achever la résolution, comme cela a été fait précédemment.

Remarque : la commande

```
» rrefmovie(T)
```

employée à la place de *rref*, permet de visualiser l'état du tableau T à chaque étape de la résolution par la méthode du pivot de Gauss.

3.5. Exercices

3.5.1. *Systèmes linéaires classiques*

Résoudre les systèmes suivants :

1) en appliquant pas à pas la méthode du pivot de Gauss ;

2) en utilisant les fonctions *solve* et *rref* de *Matlab.*

3.5.1.1.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + 5z = 1 \\ x - 2y - 4z = -1 \\ -3x + y - 3z = 0, \end{array}\right.$$

3.5.1.2.

$$\left\{\begin{array}{l} x - y + z + t = -1 \\ x + y - z + 2t = 4 \\ 2x - y - 2z - 3t = 1, \end{array}\right.$$

3.5.1.3.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 6y + 4z + 4t = -2 \\ -2x - 3y + 5z - 5t = 2 \\ -3x - 8y - 3z + 2t = 1 \\ -x - 2y + z + 10t = 0. \end{array}\right.$$

(solutions p. 72)

3.5.2. *Un système linéaire avec paramètre*

1) Résoudre le système suivant, en appliquant pas à pas la méthode du pivot de Gauss (on discutera suivant la valeur du paramètre m).

$$\left\{\begin{array}{l} (1-m)x + 2y - z = 1 \\ -2x - (3+m)y + 3z = 1 \\ x + y - (2+m)z = 1. \end{array}\right.$$

2) Analyser les réponses données par l'utilisation des fonctions *solve* et *rref* de *Matlab* pour résoudre ce système.

(solution p. 75)

3.6. Solutions

Exercice 3.5.1.1

L'intérêt de la première méthode est d'appliquer, étape par étape, les actions de Gauss.

1) On déclare les variables symboliques et les trois lignes du système.

```
» syms x y z
» L1=[2*x-3*y+5*z, 1] ;
» L2=[x-2*y-4*z, -1] ;
» L3=[-3*x+y-3*z, 0] ;
» S=[L1 ;L2 ;L3] ;
```

On effectue l'action :

$$L1 \longleftrightarrow L2$$

(on utilise pour faire cet échange une ligne temporaire T).

```
» T=L2 ;L2=L1 ;L1=T ;
» S=[L1 ;L2 ;L3]
S =
[ x-2*y-4*z, -1]
[ 2*x-3*y+5*z, 1]
[ -3*x+y-3*z, 0]
```

On annule le coefficient de x dans les deuxième et troisième équations par

$$L2 \longleftarrow L2 - 2L1; L3 \longleftarrow L3 + 3L1.$$

```
» L2=L2-2*L1 ;L3=L3+3*L1 ;
» S=[L1 ;L2 ;L3]
S =
[ x-2*y-4*z, -1]
[ y+13*z, 3]
[ -5*y-15*z, -3]
```

On annule le coefficient de y dans la troisième équation par

$$L3 \longleftarrow L3 + 5L2.$$

```
» L3=L3+5*L2 ;
» S=[L1 ;L2 ;L3]
S =
[ x-2*y-4*z, -1]
[ y+13*z, 3]
[ 50*z, 12]
```

Le système est donc équivalent à

$$\begin{cases} x - 2y - 4z = -1 \\ \qquad y + 13z = 3 \\ \qquad\quad 50z = 12. \end{cases}$$

C'est un système de Cramer, dont on obtient la solution par :

```
» Z=12/50 ;Y=3-13*Z ; X=-1+2*Y+4*Z ;
» [X,Y,Z]
ans =-0.2800 -0.1200 0.2400
```

2) En utilisant la fonction *solve*, on obtient la solution sous forme symbolique :

```
» Sol=solve('2*x-3*y+5*z= 1',' x-2*y-4*z= -1',' -3*x+y-3*z= 0') ;
» [Sol.x,Sol.y,Sol.z]
ans = [ -7/25, -3/25, 6/25]
```

Pour utiliser *rref*, on construit ligne par ligne le tableau des coefficients et des seconds membres.

```
» Tab=[2 -3 5 1 ; 1 -2 -4 -1 ; -3 1 -3 0]
Tab =
2 -3 5 1
1 -2 -4 -1
-3 1 -3 0
» rref(Tab)
ans =
1.0000 0      0      -0.2800
0      1.0000 0      -0.1200
0      0      1.0000 0.2400
```

Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x & & & = & -0.28 \\ & y & & = & -0.12 \\ & & z & = & 0.24. \end{cases}$$

Exercice 3.5.1.2

1) Pour résoudre pas à pas, on suit la méthode ci-dessus.

2) On utilise la fonction *rref*, et on met le résultat sous forme symbolique :

```
» Tab=[1 -1 1 1 -1 ;1 1 -1 2 4 ;2 -1 -2 -3 1] ;
» rref(Tab)
ans =
1.0000 0 0 1.5000 1.5000
0 1.0000 0 2.3333 2.3333
0 0 1.0000 1.8333 -0.1667
 » sym(ans)
 ans =
 [ 1, 0, 0, 3/2, 3/2]
 [ 0, 1, 0, 7/3, 7/3]
 [ 0, 0, 1, 11/6, -1/6]
```

Le système est donc équivalent à

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & +3t/2 & = & 3/2 \\ & y & & +7t/3 & = & 7/3 \\ & & z & +11t/6 & = & -1/6 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathbb{S} = \{(3/2 - 3t/2, 7/3 - 7t/3, -1/6 - 11t/6, t)\,;t \in \mathbb{R}\}\ .$$

On vérifie le résultat avec *solve* :

```
» S=solve('x-y+z+t=-1','x+y-z+2*t=4','2*x-y-2*z-3*t=1');
» [S.x S.y S.z ]
ans =[ -3/2*t+3/2, -7/3*t+7/3, -11/6*t-1/6]
```

Exercice 3.5.1.3

L'utilisation de la fonction *rref*

```
» Tab=[2 6 4 2 -2 ;-2 -3 5 -5 2 ; -3 -8 -3 2 1 ; -1 -2 1 10 0]
Tab =
2 6 4 2 -2
-2 -3 5 -5 2
-3 -8 -3 2 1
-1 -2 1 10 0
» rref(Tab)
ans =
1 0 -7 0 0
0 1 3 0 0
0 0 0 1 0
0 0 0 0 1
```

montre que le système est équivalent au système échelonné

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & & -7z & & = & 0 \\ & y & +3z & & = & 0 \\ & & & t & = & 0 \\ & & & 0 & = & 1. \end{array}\right.$$

Le système n'a pas de solution, ce que montre aussi l'utilisation de *solve* :

```
» solve('2*x+6*y+4*z+4*t=-2','-2*x-3*y+5*z-5*t=2',
'-3*x-8*y-3*z+2*t=1','-x-2*y+z+10*t=0')
Warning : Explicit solution could not be found.
ans =
[ empty sym ]
```

Exercice 3.5.2

1) Pour la résolution pas à pas, on déclare les variables symboliques et les lignes du système :

```
» syms x y z m
» L1=[(1-m)*x+2*y-z,1];
» L2=[-2*x-(3+m)*y+3*z,1];
» L3=[x+y-(2+m)*z,1];
» S=[L1 ;L2 ;L3];
```

On effectue $L_1 \longleftrightarrow L_3$ pour avoir 1 comme pivot :

```
» T=L1 ;L1=L3 ;L3=T;
» S=[L1 ;L2 ;L3]
S =
[ x+y-(2+m)*z, 1]
[ -2*x-(3+m)*y+3*z, 1]
[ (-m+1)*x+2*y-z, 1]
```

On effectue les actions $L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1, L_3 \longleftarrow L_3 - (1-m)L_1$; on utilise *collect* pour regrouper les termes en x et en y (pour visualiser les pivots.)

```
» L2=L2+2*L1 ;L3=L3-(1-m)*L1;
» S=[L1 ;L2 ;L3];
» S=collect(S,y) ;S=collect(S,x)
S =
[ x+y-(2+m)*z, 1]
[ (-1-m)*y+3*z-2*(2+m)*z, 3]
[ (1+m)*y-z+(-m+1)*(2+m)*z, m]
```

a) Dans le cas $m = -1$, les pivots pour y sont nuls. On traite ce cas à part :

```
» S0=subs(S,m,-1)
S0 =
[ x+y-z, 1]
[ z, 3]
[ z, -1]
```

D'où le système

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & -z & = & 1 \\ & & z & = & 3 \\ & & z & = & -1, \end{array}\right.$$

qui n'admet aucune solution.

b) On suppose maintenant $m \neq -1$. On effectue les actions

$$L_2 \longleftarrow L_2/(-1-m),$$

$$L_3 \longleftarrow L_3 - (1+m)L_2.$$

```
» L2=L2/(-1-m) ;L3=L3-(1+m)*L2 ;
» S=[L1 ;L2 ;L3] ;
» S=simplify(S) ;
» S=collect(S,z) ;S=collect(S,y) ;S=collect(S,x)
S = [ (-2-m)*z+x+y, 1]
[ y+(1+2*m)/(1+m)*z, -3/(1+m)]
[ -z*m*(3+m), 3+m]
```

c) Dans le cas où m est différent de -1, mais aussi de 0 et de -3, le système

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & +(-2-m)z & = & 1 \\ & y & +\dfrac{1+2m}{1+m}z & = & \dfrac{-3}{1+m} \\ & & -m(3+m)z & = & 3+m \end{array}\right.$$

est de Cramer et on obtient sa solution par :

```
» Z=-(3+m)/(m*(3+m)) ;
» Y= -3/(1+m)-(1+2*m)/(1+m)*Z ;X=1- (-2-m)*Z-Y ;
» simplify([X,Y,Z])
ans =
[ -(3+m)/m/(1+m), -(-1+m)/m/(1+m), -1/m]
```

soit

$$x = \frac{-(3+m)}{m(1+m)}, \quad y = \frac{-(m-1)}{m(1+m)}, \quad z = \frac{-1}{m}.$$

d) Dans le cas $m = 0$, on obtient

```
» S1=subs(S,m,0)
S1 =
[ -2*z+x+y, 1]
[ y+z, -3]
[ 0, 3]
```

Le système équivaut alors à

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -2z & = & 1 \\ & y & +z & = & -3 \\ & & 0 & = & 3 \end{array}\right.$$

et n'admet pas de solution.

e) Enfin, dans le cas $m = -3$, on a :

```
» S2=subs(S,m,-3)
S2 =
[ z+x+y, 1]
[ y+5/2*z, 3/2]
[ 0, 0]
```

et le système peut s'écrire

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 1 \\ & y & +(5/2)\,z & = & 3/2 \\ & & 0 & = & 0. \end{array}\right.$$

La valeur de z peut être choisie arbitrairement et on obtient pour ensemble de solutions

$$\mathbb{S} = \left\{(-1/2 + 3z/2, 3/2 - 5z/2, z)\,;\, z \in \mathbb{R}\right\}.$$

2) Si on utilise *rref* pour résoudre le système donné au départ :

```
» Tab= [1-m 2 -1 1 ;-2 -(3+m) 3 1 ;1 1 -(2+m) 1]
Tab =
[ -m+1, 2, -1, 1]
[ -2, -3-m, 3, 1]
[ 1, 1, -2-m, 1]
» rref(Tab)
ans =
[ 1, 0, 0, -(3+m)/m/(1+m)]
[ 0, 1, 0, -(m-1)/m/(1+m)]
[ 0, 0, 1, -1/m]
```

on obtient la solution correcte lorsque le système est de Cramer, mais des simplifications et divisions se font sans tenir compte des cas particuliers $m = 0$, $m = -1$, $m = -3$.

3) Il en est de même lorsqu'on utilise *solve* :

```
» eq1= '(1-m)*x+2*y-z=1' ;
» eq2= '-2*x-(3+m)*y+3*z=1' ;
» eq3 ='x+y-(2+m)*z=1' ;
» Sol=solve(eq1,eq2,eq3,x,y,z)
Sol =
x : [1x1 sym]
y : [1x1 sym]
z : [1x1 sym]
» [Sol.x,Sol.y,Sol.z]
ans =
[ -(3+m)/m/(1+m), -(m-1)/m/(1+m), -1/m]
```

On retiendra que les commandes *rref* et *solve* ne tiennent pas compte des cas particuliers, dans la résolution de systèmes linéaires dépendant de paramètres.

Dans le cas de tels systèmes, il est donc conseillé d'utiliser pas à pas la méthode de Gauss. Les cas particuliers apparaîtront naturellement dans la mise en œuvre de cette méthode.

Chapitre 4

Matrices

4.1. Généralités

4.1.1. *Notations et vocabulaire*

Nous avons vu précédemment que le travail sur un système linéaire quelconque de n lignes et p colonnes se traduisait par un travail sur le tableau de valeurs constitué par les coefficients des inconnues. Ce tableau M est appelé **matrice** à n lignes et p colonnes, dite de type (n, p) , et est noté

$$M \quad = \quad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow i^{ième} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ j^{ième} \text{ colonne} \end{array} & \end{array}$$

La notation abrégée est

$$M = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}} \, .$$

Comme pour les systèmes, le premier indice désignera le numéro de la ligne et le deuxième indice celui de la colonne.

L'ensemble des matrices de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté

$$M_{n,p}(\mathbb{R}).$$

On peut aussi définir l'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{C})$ des matrices de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{C}$.

4.1.2. *Cas particuliers*

4.1.2.1. *Matrices lignes et matrices colonnes*

Une matrice de type $(1, p)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \end{pmatrix}$$

est appelée matrice ligne.

De même une matrice de type $(n, 1)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

est appelée matrice colonne.

4.1.2.2. *Matrices carrées*

Une matrice de type (n, n) est appelée matrice carrée d'ordre n.

Parmi les matrices carrées

$$M = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} ,$$

on peut distinguer :

1) les matrices carrées **diagonales**, vérifiant

$$a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j,$$

soit

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

2) les matrices carrées **triangulaires supérieures,** vérifiant

$$a_{ij} = 0 \text{ si } i > j,$$

soit

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

3) les matrices carrées **triangulaires inférieures**, telles que

$$a_{ij} = 0 \text{ si } i < j,$$

4) les matrices carrées **symétriques**, telles que, pour tous i, j,

$$a_{ij} = a_{ji},$$

5) la matrice carrée **identité**, vérifiant

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 \ \text{ si } i \neq j \\ a_{ii} = 1, \end{cases}$$

notée

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.1.3. *Définir des matrices avec Matlab*

4.1.3.1. *Entrée de matrices quelconques*

On entre une matrice ligne par ligne. Un simple espace (ou une virgule) sépare les termes d'une même ligne. Un point virgule sépare les lignes :

```
» A= [1.5 2 3 ;7 sqrt(2) -8 ;pi exp(1) 12]
A =
    1.5000   2.0000    3.0000
    7.0000   1.4142   -8.0000
    3.1416   2.7183   12.0000
```

On peut aussi définir trois matrices colonnes, et les juxtaposer :

```
» u=[1 ;-1 ;0] ; v=[2 ;2 ;-1] ; w=[-1 ;0 ;1] ;
» B=[u v w]
B =
     1     2    −1
    −1     2     0
     0    −1     1
```

Pour une matrice A donnée :

– $A\,(i,j)$ permet d'accéder au terme a_{ij} ;
– $A\,(i,j) = a$ permet de modifier le terme a_{ij} ;
– $A(i,:)$ permet d'accéder à la i^{ième} ligne ;
– $A(:,j)$ permet d'accéder à la j^{ième} colonne.

```
» A(3,2)
ans = 2.7183
» A(3,3)=0
A =
   1.5000 2.0000 3.0000
   7.0000 1.4142 -8.0000
   3.1416 2.7183 0
» A(3, :)
ans = 3.1416 2.7183 0
» A( :,2)
ans =
   2.0000
   1.4142
   2.7183
```

Si certains des coefficients sont de type symbolique, on obtient une **matrice symbolique** :

```
» e=sym('exp(1)')
e =exp(1)
» As=sym( [1.5 2 3 ;7 sqrt(2) -8 ;pi e 12])
As =
   [ 3/2, 2, 3]
   [ 7, sqrt(2), -8]
   [ pi, exp(1), 12]
» syms a
» B=[a 0 ;-a a]
B =
   [ a, 0]
   [ -a, a]
```

4.1.3.2. *Matrices particulières*

eye(n) est la matrice identité I_n.

zeros(m,n) est la matrice de type (m, n) dont tous les coefficients sont nuls (matrice nulle).

rand(m,n) est une matrice de type (m, n) dont les coefficients sont choisis aléatoirement, selon une loi uniforme, dans l'intervalle $[0,\ 1[$.

```
» Id=eye(3)
Id=
    1   0   0
    0   1   0
    0   0   1
» Z=zeros(2,2)
Z =
    0   0
    0   0
» R=rand(3,3)
R =
    0.9501   0.4860   0.4565
    0.2311   0.8913   0.0185
    0.6068   0.7621   0.8214
```

Il existe d'autres matrices particulières, définies par les fonctions *Matlab* **diag**, **ones, magic**, **pascal** (voir *helpwin/elmat*).

4.2. Opérations sur les matrices

Nous allons définir quelques opérations naturelles sur les matrices de même type conférant ainsi une structure remarquable à l'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

4.2.1. *Addition*

Soient deux matrices de même type

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}.$$

On appelle matrice somme de A et B, la matrice

$$S = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & ... & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}$$

De manière condensée, on a

$$S = (s_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$$

avec

$$\forall i = 1, ..., n,\ \forall j = 1, ..., p, \quad s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

On notera que l'opération (ou loi) $+$ ainsi définie est une application $\mathcal{A}$ de

$$M_{n,p}(\mathbb{R}) \times M_{n,p}(\mathbb{R})$$

dans

$$M_{n,p}(\mathbb{R}).$$

On dit que $\mathcal{A}$ est une **loi de composition interne.**

On peut vérifier facilement les propriétés remarquables suivantes de cette addition

1) Commutativité :

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \quad A + B = B + A.$$

2) Associativité :

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall C \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

3) Existence de l'élément neutre : Si on note

$$0_{np} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice dont tous les coefficients sont nuls, on a

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \quad A + 0_{np} = 0_{np}.$$

4) Existence de l'opposé d'une matrice : pour toute matrice A, notons A_1 la matrice définie par

$$A_1 = (-a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}},$$

alors

$$A + A_1 = 0_{np}.$$

La matrice A_1 est dite l'opposée de A et se note $-A$.

On dira que les quatre propriétés ainsi vérifiées confèrent une structure de **groupe abélien** (ou commutatif) pour l'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ muni de cette addition matricielle $+$.

4.2.2. *Multiplication par les scalaires*

On se donne un scalaire λ quelconque de $\mathbb{R}$. Soit

$$M = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,p}}$$

un élément de $M_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit la matrice λM par

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \ldots & \lambda a_{np} \end{pmatrix},$$

autrement dit tous les coefficients de la matrice M ont été multipliés par le scalaire λ.

L'opération multiplicative ainsi définie, est une application $\mathcal{M}$ de

$$\mathbb{R} \times M_{n,p}(\mathbb{R})$$

dans

$$M_{n,p}(\mathbb{R}).$$

On dira qu'elle est une **loi de composition externe.**

4.2.3. *Multiplication des matrices*

On définit le produit de deux matrices dans le cas où la première matrice est de type (n, p) et la deuxième est de type (p, q). La justification est basée sur la composition d'applications linéaires, qui sera vue ultérieurement.

Soient donc deux matrices A (à n lignes et p colonnes) et B (à p lignes et q colonnes) :

$$A = (a_{ik})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,p}}, \qquad B = (b_{kj})_{\substack{k=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,q}}.$$

Le produit

$$\begin{array}{ccccc} A & \times & B & = & C \\ (\ n\ ,\ p\ \ ) & & (\ \ p\ ,\ q\ ) & & (\ n\ ,\ q\ ) \\ \quad\ \uparrow \cdots & \cdots\cdots & \cdots \uparrow\ \ & & \end{array}$$

est par définition la matrice C de type (n, q) définie par

$$C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,q}}$$

où

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}. \end{aligned}$$

On retiendra que

> *Le coefficient c_{ij} situé en ligne i et en colonne j de C est obtenu par la somme des produits terme à terme des éléments de la ligne i de A et des éléments de la colonne j de B.*

On adopte la disposition suivante :

$$\begin{array}{cc}
 & \left(\begin{array}{c|c|c} \cline{2-2} b_{11} & b_{1j} & b_{1q} \\ \vdots & \vdots & \\ b_{k1} & b_{kj} & b_{kq} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{pj} & b_{pq} \\ \cline{2-2} \end{array}\right) \\
\begin{pmatrix} a_{11} \; \dots \; a_{1k} \; \dots \; a_{1p} \\ \\ \boxed{a_{i1} \; \dots \; a_{ik} \; \dots \; a_{ip}} \\ \\ a_{n1} \; \dots \; a_{nk} \; \dots \; a_{np} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \dots & \boxed{c_{ij}} & \dots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nq} \end{pmatrix}
\end{array}$$

4.2.3.1. *Exemple*

On veut effectuer le produit $A \times B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2\times 1+3\times 3 & 2\times 2+3\times(-1) \\ 0\times 1-2\times 3 & 0\times 2-2\times(-1) \\ -4\times 1+6\times 3 & -4\times 2+6\times(-1) \end{pmatrix} \end{array},$$

d'où

$$A\times B=\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -6 & 2 \\ 14 & -14 \end{pmatrix}.$$

On notera indifféremment ce produit :

$$A\times B,\ A\cdot B,\ AB.$$

4.2.3.2. *Multiplication interne des matrices carrées*

Il est clair que lorsque A et B appartiennent à l'ensemble des matrices carrées noté

$$M_n(\mathbb{R})=M_{n,n}(\mathbb{R}),$$

les deux produits $A\times B$ et $B\times A$ sont définis et appartiennent aussi à $M_n(\mathbb{R})$.

Mais on prendra garde à ce que le produit n'est pas commutatif, par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pourra vérifier par contre que la multiplication dans $M_n(\mathbb{R})$ est associative :

$$(A\times B)\times D=A\times(B\times D),$$

et distributive par rapport à l'addition

$$\begin{aligned} (A+B)\times D &= A\times D+B\times D, \\ D\times(A+B) &= D\times A+D\times B, \\ \lambda(A\times B) &= (\lambda A)\times B=A\times(\lambda B). \end{aligned}$$

On vérifie que, pour toute matrice carrée $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$M \times I_n = I_n \times M = M.$$

La matrice identité I_n est l'élément neutre pour la multiplication.

On peut aussi définir la **puissance** $p^{ième}$ d'une matrice carrée A :

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \times A, \ \cdots, \quad A^p = A^{p-1} \times A.$$

On en déduit que

$$A^n \times A^p = A^{n+p} = A^p \times A^n.$$

4.2.4. *Transposée d'une matrice*

On appelle transposée de la matrice

$$M = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,p}},$$

de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice notée

$${}^tM = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,n}}$$

de $M_{p,n}(\mathbb{R})$, définie par

$$\forall i = 1, ..., p, \ \forall j = 1, ..., n \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

Cela veut dire que ${}^tM$ est obtenue à partir de M en échangeant ses lignes avec ses colonnes. Par exemple, si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

alors

$${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

On peut alors vérifier les propriétés suivantes :

$$\left\| \begin{array}{l} {}^t(A+B) = ({}^tA) + ({}^tB) \\ {}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA) \\ {}^t({}^tA) = A \\ {}^t(A.B) = ({}^tB)\,.\,({}^tA) \ \textit{(lorsque l'un de ces produits est défini).} \end{array} \right.$$

4.2.5. *Calcul matriciel avec Matlab*

Les opérations élémentaires s'effectuent naturellement :

```
» A=[3 2 1 ; 6 5 4 ; 9 8 7]
A =
   3 2 1
   6 5 4
   9 8 7
» B =rand(3,3)
B =
   0.9501 0.4860 0.4565
   0.2311 0.8913 0.0185
   0.6068 0.7621 0.8214
```

– L'addition :

```
» S=A+B
S =
   3.9501 2.4860 1.4565
   6.2311 5.8913 4.0185
   9.6068 8.7621 7.8214
```

– La multiplication externe par les scalaires :

```
» P1=0.1*A
P1 =
0.3000 0.2000 0.1000
0.6000 0.5000 0.4000
0.9000 0.8000 0.7000
```

– La multiplication interne :

```
» P=A*B
P =
   3.9195 4.0026 2.2278
   9.2838 10.4208 6.1170
   14.6482 16.8389 10.0061
```

– La puissance :

```
» Q=A^5
Q =
   73872 60588 47304
   215784 176985 138186
   357696 293382 229068
```

– La transposition :

```
» T=A'
T =
   3 6 9
   2 5 8
   1 4 7
```

Matlab reconnaît les opérations mal définies, par exemple

```
» A=[1 2 ; 3 -1]
A =
      1 2
      3 -1
» B=[2 1 ; 0 1 ; 3 5]
B =
      2 1
      0 1
      3 5
» A*B
? ? ? Error using ==> *
Inner matrix dimensions must agree.
```

4.3. Inversion de matrices carrées

4.3.1. *Définition*

Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite inversible s'il existe une matrice carrée $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

La matrice B, lorsqu'elle existe est unique. On l'appelle matrice **inverse** de A et on la note

$$B = A^{-1}.$$

Concrètement, dans $M_n(\mathbb{R})$, il suffit de vérifier que

$$A \times B = I_n$$

pour conclure que $B = A^{-1}$.

Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

admet pour inverse

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

en effet :

```
» A=[1 0 ;2 1] ;
» B=[1 0 ; -2 1] ;
» A*B
ans =
   1 0
   0 1
» B*A
ans =
   1 0
   0 1
```

La matrice I_n est son propre inverse.

Avec *Matlab*, on peut utiliser

inv(A) ou A^(-1),

pour calculer l'inverse de A, numériquement ou symboliquement :

```
» A=[1 2 3 ; 4 5 6 ; 7 8 10]
» A1=inv(A)
A1 =
   -0.6667 -1.3333 1.0000
   -0.6667 3.6667 -2.0000
   1.0000 -2.0000 1.0000
» As=sym(A)
As =
   [ 1, 2, 3]
   [ 4, 5, 6]
   [ 7, 8, 10]
» As1=inv(As)
As1 =
   [ -2/3, -4/3, 1]
   [ -2/3, 11/3, -2]
   [ 1, -2, 1]
```

Mais la matrice inverse n'existe pas toujours :

```
» As(3,3)=9
As =
   [ 1, 2, 3]
   [ 4, 5, 6]
   [ 7, 8, 9]
» inv(As)
? ? ? Error using ==> sym/inv
Error, (in inverse) singular matrix
```

4.3.2. *Actions de Gauss sur les matrices carrées*

Nous allons traduire les trois actions fondamentales de Gauss vues dans le chapitre précédent sur les systèmes, en termes de multiplication matricielle.

Pour simplifier et sans restreindre la généralité, nous travaillerons sur une matrice de type $(3,3)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

1) Première action d'échange de lignes : Soit L_{ij} la matrice obtenue à partir de la matrice I_n par l'échange entre ses lignes i et j. Alors le produit $L_{ij} \times A$ est la matrice obtenue à partir de A par l'échange de ses lignes i et j. Ainsi par exemple

$$\begin{aligned} L_{12} \times A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(On pourrait aussi considérer les matrices C_{ij} obtenues par l'échange des colonnes i et j de I_n et faire $A \times C_{ij}$, échangeant ainsi les colonnes i et j de A.)

2) Deuxième action de multiplication d'une ligne par $\lambda \neq 0$: On note $L_i(\lambda)$ la matrice obtenue à partir de la matrice I_n par la multiplication par λ de sa ligne i. Alors $L_i(\lambda) \times A$ est la matrice obtenue à partir de A par la multiplication par λ de sa ligne

i. Ainsi

$$\begin{aligned} L_2(\lambda) \times A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \\ g & h & i \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

3) Troisième action de Gauss : Soit $L_{ij}(\lambda)$ la matrice obtenue à partir de I_n en ajoutant à sa $i^{ième}$ ligne le produit par λ de sa $j^{ième}$ ligne. Alors la multiplication $L_{ij}(\lambda) \times A$ produit le même effet. Ainsi

$$\begin{aligned} L_{12}(\lambda) \times A &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+\lambda d & b+\lambda e & c+\lambda f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

On pourra vérifier que

$$\begin{cases} (L_{ij})^{-1} = L_{ij} \\ (L_i(\lambda))^{-1} = L_i(1/\lambda) \qquad (\lambda \neq 0) \\ (L_{ij}(\lambda))^{-1} = L_{ij}(-\lambda). \end{cases}$$

4.3.3. *Calcul explicite de l'inverse d'une matrice*

Partant de la matrice A, si au bout de r actions de Gauss (décrites ci-dessus), dont on note les matrices

$$G_1, G_2, ..., G_r,$$

on obtient

$$G_1 \times G_2 \times ... \times G_r \times A = I_3,$$

alors A est inversible et

$$B = G_1 \times G_2 \times ... \times G_r = A^{-1}.$$

(On pourrait de même multiplier à droite par les matrices représentant les actions colonnes et retrouver cette matrice inverse).

Par exemple, pour obtenir l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on multiplie par $L_2(3)$ et le résultat par $L_{12}(2)$; il vient alors

$$L_{12}(2) \times L_2(3) \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} A^{-1} &= L_{12}(2) \times L_2(3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La stratégie de Gauss pour le calcul explicite de l'inverse A^{-1}, lorsque celle-ci existe, consiste en la construction d'une suite finie de matrices

$$B_1, B_1, ..., B_m$$

de la manière suivante :

1) *agir sur la matrice A pour obtenir une matrice A_1 dont la première ligne a un pivot égal à 1. (Si cette action de Gauss n'est pas possible, A^{-1} n'existe pas). Parallèlement, on agira de la même façon sur la matrice identité I_n pour obtenir une matrice notée B_1,*

2) *annuler la colonne juste en dessous du premier pivot 1 de A_1* pour obtenir A_2. *C'est toujours possible si la première action l'est. On agira de la même manière sur B_1 pour obtenir B_2,*

3) *recommencer le même travail sur le bloc matrice obtenu à partir de A_2 en retirant sa première ligne et sa première colonne. On obtient ainsi A_3. Faire de même sur B_2 pour obtenir B_3,*

4) *réitérer le principe jusqu'à la triangularisation inférieure complète de A avec des pivots égaux à 1 sur toute la diagonale. (Si on obtient un pivot égal à 0 sur la diagonale, la matrice n'est pas inversible).*

5) *Par remontées successives, annuler le triangle supérieur des matrices A_k ainsi obtenues jusqu'à l'obtention de la matrice identité*

$$A_m = I_n.$$

Les mêmes actions devront être effectuées sur les matrices B_k correspondantes pour avoir enfin la matrice inverse

$$B_m = A^{-1}.$$

Illustrons la méthode ci-dessus sur le calcul de l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On disposera les calculs de la manière suivante :

1) Première et deuxième étapes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On multiplie par $L_1(1/2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On multiplie par $L_{31}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Troisième et quatrième étapes (triangularisation inférieure) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On multiplie par $L_2(1/2)$ et $L_3(-2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On multiplie par $L_{32}(-1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad B_5 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 5 & -1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant affirmer que la matrice est inversible.

3) Triangularisation supérieure :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad B_6 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 5 & -1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

On multiplie par $L_3(2)$ et $L_{23}(-1/2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_7 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

On multiplie par $L_{12}(-1/2)$ et $L_{13}(1/2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

4.4. Déterminant d'une matrice carrée

Nous avons vu que pour calculer A^{-1} par la méthode de Gauss exposée précédemment, tous les pivots successifs devaient être non nuls. Y-a-t-il une caractéristique dans A qui **détermine** cette inversibilité ?

Nous allons voir que la réponse est oui.

Nous pouvons d'ores et déjà dire, grâce à la méthode du pivot de Gauss, que si toute la première colonne de A est nulle, l'inverse n'existe pas.

4.4.1. *Cas d'une matrice de type* $(2, 2)$

On donne une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

et on suppose qu'un élément de la première colonne est non nul d'après la remarque ci-dessus. On prendra $a_{11} \neq 0$, par exemple.

Alors le calcul par la méthode de Gauss de l'inverse de cette matrice s'effectue de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On choisit a_{11} comme pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On fait $L_2 \longleftarrow L_2 - a_{21}L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} \\ 0 & (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})/a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 \end{pmatrix}$$

En supposant que le nombre

$$D = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21},$$

est non nul, on voit que l'inverse de A est calculable. On normalise le deuxième pivot, il vient

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ -a_{21}/D & a_{11}/D \end{pmatrix},$$

enfin, on triangularise supérieurement pour avoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{D}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

On retiendra donc le résultat suivant :

> **Théorème**
> si $D \neq 0$, *la matrice A est inversible et*
> $$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Le nombre D s'appelle le déterminant de A et se note

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4.4.2. *Cas d'une matrice de type* $(3,3)$

On peut utiliser le même raisonnement (avec des calculs plus longs !) pour une matrice de type $(3,3)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

On trouve que, si le déterminant

$$\begin{aligned} D &= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{21}\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right) \\ &\quad + a_{31}\left(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\right) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

noté

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

est différent de zéro alors la méthode de Gauss s'applique pour le calcul de A^{-1} et donne l'inverse suivante

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

où

$$C = (c_{ij})$$

est obtenue par transposition de la matrice

$$M = (m_{ij}),$$

avec

$$m_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

Le nombre D_{ij} est le déterminant de la matrice de type $(2, 2)$ obtenue à partir de A en supprimant sa $i^{ième}$ ligne et sa $j^{ième}$ colonne. La matrice M est souvent appelée la **comatrice** de A ou la matrice des cofacteurs m_{ij}.

A titre d'exemple, cherchons par cette méthode, l'inverse de la matrice vue précédemment

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On calcule d'abord son déterminant

$$D = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -16 + 15 = -1$$

Le calcul de M fournit, en indiquant les signes $(-1)^{i+j}$,

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 5 & -10 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où la transposée

$$^tM = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

et donc

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\left(^tM\right) = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

4.4.3. *Cas d'une matrice quelconque*

Nous avons vu que pour une matrice $(3,3)$ on a

$$\begin{aligned} & \det(A) \\ = \; & a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{21}\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right) \\ & + a_{31}\left(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\right) \\ = \; & a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

En généralisant ce développement suivant la première colonne, on définit de proche en proche le déterminant d'une matrice carrée

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$$

quelconque par

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(M_{i1}),$$

où M_{i1} est la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant sa $i^{ième}$ ligne et sa première colonne.

Par exemple, pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad -0\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1\left(1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ &\quad -2\left(0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ &\quad +1\left(0\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right) \\ &= 1\left(1\times 2 - 1\times(-1) + 2\times 1\right) \\ &\quad -2\left(0 - 1\times 1 + 2\times(-1)\right) \\ &\quad +1\left(0 - 1\times 1 + 2\times 0\right) \\ &= 5 - 2\times(-3) + 1\times(-1) \\ &= 10. \end{aligned}$$

4.4.4. *Déterminant de matrices particulières*

De la définition précédente, on déduit que :

1) le déterminant de la matrice identité est

$$\det(I_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2) le déterminant d'une matrice diagonale

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est

$$\det(M) = a_{11}.\, a_{22}.\, a_{33}...a_{nn}.$$

4.4.5. *Propriété fondamentale*

On admet que les résultats des paragraphes 4.4.1 et 4.4.2 se généralisent :

Théorème
Une matrice carrée est inversible si et seulement si

$$\det(A) \neq 0.$$

Dans ce cas, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & c_{nn} \end{pmatrix},$$

où

$$C = (c_{ij})$$

est obtenue par transposition de la matrice

$$M = (m_{ij}),$$

avec

$$m_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

Le nombre D_{ij} est le déterminant de la matrice de type $(n-1, n-1)$ obtenue à partir de A en supprimant sa $i^{ième}$ ligne et sa $j^{ième}$ colonne. La matrice M est souvent appelée la **comatrice** de A ou la matrice des cofacteurs m_{ij}.

Remarque

En général, le calcul de l'inverse d'une matrice carrée par la méthode de Gauss est plus simple que le calcul précédent.

4.5. Propriétés des déterminants

4.5.1. *Développement suivant les colonnes ou les lignes*

4.5.1.1. *Développement suivant les colonnes*

On peut vérifier que, pour une matrice $(3,3)$, on a aussi

$$\begin{aligned}&\det(A) = \\ &a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)-a_{21}\left(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}\right)+a_{31}\left(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}\right)= \\ &=(-1).a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+(+1).a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1).a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix},\end{aligned}$$

qui est le développement du déterminant de A suivant sa deuxième colonne.

D'une manière générale, pour une matrice carrée quelconque.

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$$

si on note M_{ij} la matrice obtenue à partir de A en supprimant sa $i^{\,ième}$ ligne et sa $j^{ième}$ colonne, on démontre qu'on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(M_{ij}),$$

c'est le développement du déterminant de A suivant la $j^{\,ième}$ colonne.

Par exemple, le calcul du déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

suivant la troisième colonne, choisie parce qu'elle contient le maximum de zéros, donne

$$\det(A) = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

puis en développant les deux déterminants suivant leur deuxième colonne, on a

$$\det(A) = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 10.$$

4.5.1.2. *Développement suivant les lignes*

On peut vérifier explicitement sur des matrices de type $(2,2)$ et $(3,3)$ que

$$\det(A) = \det({}^t A).$$

Ce résultat reste vrai dans le cas d'une matrice carrée quelconque

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}}.$$

On obtient alors par transposition, le développement du déterminant de A suivant sa $i^{ième}$ ligne

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}).$$

4.5.2. *Quand un déterminant est-il nul ?*

Le déterminant d'une matrice carrée A est nul lorsque :

1) une ligne (ou une colonne) de A est nulle,

2) une ligne L_i (ou une colonne C_i) de A est combinaison des autres lignes (resp. des autres colonnes), c'est-à-dire

$$L_i = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \lambda_k L_k \quad \text{ou} \quad C_i = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \mu_k C_k.$$

Par exemple pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$\det(A) = 0$ car $L_2 = L_1 + 2L_3$.

4.5.3. *Actions de Gauss sur les déterminants*

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Désignons par T la nouvelle matrice obtenue à partir de A après chaque action de Gauss effectuée, alors

1) si l'action est $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_k$, avec $\alpha \neq 0$ et $k \neq i$,

$$\det(T) = \det(A),$$

(cette action ne change pas la valeur du déterminant)

2) si l'action est un échange de lignes $L_i \longleftrightarrow L_k$, $(i \neq k)$, on a

$$\det(T) = -\det(A),$$

3) enfin si l'action est $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$, on a

$$\det(T) = \alpha \det(A),$$

(on tiendra compte, si on effectue ces deux dernières actions, du changement de valeur du déterminant) ;

4) grâce à la transposition, les mêmes propriétés sont encore vraies si on effectue ces actions sur les colonnes.

A titre d'exemple, le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est égal à 2 (en le développant suivant la troisième colonne). Après l'action

$$C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 - 3C_3,$$

la matrice transformée est

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie bien que $\det(T) = 2$ (en le développant suivant la première colonne).

4.5.4. *Déterminant d'un produit de matrices*

On montre que pour deux matrices carrées de même type A et B, on a

$$\det(A.B) = \det(A). \det(B),$$

d'où aussi

$$\det(A.B) = \det(B.A)$$

On en déduit le corollaire suivant quant au calcul du déterminant de la matrice inverse A^{-1} (lorsqu'elle existe)

$$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$$

en utilisant la relation $A^{-1}.A = I_n$.

4.6. Calculs de déterminants

4.6.1. *Méthode de Gauss*

La stratégie de calcul d'un déterminant consiste donc d'abord à effectuer un certain nombre d'actions de Gauss dans une colonne (ou une ligne) pour ne conserver qu'un élément non nul de cette colonne (ou de cette ligne), puis réitérer pour les déterminants suivants d'ordre inférieur. En vue de minimiser les calculs, on veillera à choisir une colonne (resp. une ligne) contenant déjà un 1 *et le maximum de zéros lorsque c'est possible.*

4.6.1.1. *Exemple (calcul à la main)*

Soit à calculer

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}.$$

On commence par effectuer l'action

$$L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1$$

(qui ne change pas la valeur du déterminant), pour avoir un pivot égal à 1 :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}.$$

On effectue ensuite les actions

$$L_1 \longleftarrow L_1 - 3L_2, L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2, L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_2$$

pour obtenir :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

En développant suivant la première colonne, on aura donc

$$D = (-1) \times \begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

puis on effectue l'action $L_1 \longleftarrow L_1 - 4L_3$ sur ce dernier tableau

$$D = (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 5 & -13 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

D'où

$$D = (-1) \times 1 \times \begin{vmatrix} 5 & -13 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -54.$$

4.6.1.2. *Exemple (calcul avec Matlab)*

On introduit avec *Matlab* la matrice M associée à D :

```
» M=[3 ,-2,-5,4 ; -5, 2, 8, -5 ; -2, 4, 7, -3 ; 2, -3, -5, 8]
M =
   3   -2   -5    4
  -5    2    8   -5
  -2    4    7   -3
   2   -3   -5    8
```

L'action

$$L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1$$

se traduit par :

```
» M(2, :)=M(2, :)+2*M(1, :)
M =
   3 -2 -5 4
   1 -2 -2 3
   -2 4 7 -3
   2 -3 -5 8
```

et les actions

$$L_1 \longleftarrow L_1 - 3L_2, L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2, L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_2$$

donnent

```
» M(1, :)=M(1, :)-3*M(2, :) ;M(3, :)=M(3, :)+2*M(2, :) ;
» M(4, :)=M(4, :)-2*M(2, :)
M =
   0  4   1 -5
   1 -2 -2  3
   0  0   3  3
   0  1 -1  2
```

On retrouve

$$D = -\begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

On obtient la matrice correspondante en ne conservant que les lignes et colonnes adéquates de M.

```
» N=M([1 3 4],[2 3 4])
N =
4  1 -5
0  3  3
1 -1  2
```

puis on effectue l'action $L_1 \longleftarrow L_1 - 4L_3$.

```
» N(1, :)=N(1, :)-4*N(3, :)
N =
0  5 -13
0  3   3
1 -1   2
```

Ainsi

```
» D=(-1)*1*(5*3-3*(-13))
D = -54
```

4.6.2. *Utilisation de la commande det de Matlab*

La commande de *Matlab,* **det** calcule le déterminant d'une matrice carrée

– numérique :

```
» M=[3 ,-2,-5,4 ; -5, 2, 8, -5 ; -2, 4, 7, -3 ; 2, -3, -5, 8] ;
» det(M)
ans = -54
```

– symbolique

```
» syms x a
» M=[a 0 a ;1 x 0 ; a -1 a+x] ;
» d=det(M)
d = a*x^2-a
» factor(d)
ans =a*(x-1)*(x+1)
```

4.7. Retour aux systèmes et formules de Cramer.

4.7.1. *Ecriture matricielle des systèmes*

On raisonne pour $n = 3$. Soit le système

$$(S)\left\{\begin{array}{llllc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & = & b_3, \end{array}\right.$$

alors matriciellement ce système s'écrit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

ou bien

$$A.X = B,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

A est appelée la matrice du système.

4.7.2. *Résolution par les déterminants*

Lorsque $\det(A) \neq 0$, l'équation $A.X = B$ est équivalente à

$$A^{-1}A.X = A^{-1}B,$$

d'où l'unique solution du système, donnée matriciellement par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}. \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi écrire explicitement les solutions en utilisant les propriétés des déterminants. En effet, en substituant à la première colonne de A la colonne des seconds membres B, et en calculant le déterminant de la matrice ainsi obtenue, on a

$$\begin{matrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{matrix} = \begin{vmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + x_3a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + x_3a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ x_1a_{31} + x_2a_{32} + x_3a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

puis, par l'action de Gauss $C_1 \longleftarrow C_1 - x_2\, C_2 - x_3 C_3$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_1 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_1 a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = x_1 \det(A).$$

On procède de même avec les deux autres colonnes de A pour obtenir les **formules dites de Cramer** :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ x_2 &= \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \\ x_3 &= \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Réciproquement, lorsque le système

$$AX = B$$

est de Cramer (voir chapitre 4.9, paragraphe 3.3.2), les mêmes actions de Gauss permettant le calcul de l'unique solution conduisent à montrer que

$$\det(A) \neq 0.$$

On admettra que ces résultats se généralisent à un système de n équations à n inconnues :

Théorème
Un système carré est de Cramer si et seulement si sa matrice est de déterminant non nul.

(Voir exercice 4.8.6).

Remarque

Dans l'étude, avec *Matlab*, d'un système carré dépendant de paramètres, il est conseillé de calculer au préalable le déterminant de la matrice du système pour détecter les cas particuliers. On rappelle que les commandes *rref* et *solve* ne permettent pas toujours de le faire (voir exercice 4.8.7).

4.8. Exercices

4.8.1. *Construction d'une matrice diagonale*

Construire la matrice carrée nulle de type $(10, 10)$ puis la modifier pour obtenir la matrice diagonale :

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 9 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(solution p. 113)

4.8.2. *Calculs avec trois matrices*

1) Utiliser *rand* pour construire trois matrices carrées A, B, C de type 3×3.

2) Vérifier sur cet exemple la propriété d'associativité. Comparer $A.B$ et $B.A$.

3) Comparer $A.I_3$ et A.

4) En utilisant le calcul symbolique de *Matlab*, définir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ c1 & d1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a2 & b2 \\ c2 & d2 \end{pmatrix}$$

et reprendre les questions précédentes (pour vérifier que deux matrices symboliques sont égales, il suffit de calculer leur différence.)

(solution p. 114)

4.8.3. *Parts d'un marché*

Soient A et B deux produits concurrentiels. On suppose qu'aucun produit nouveau n'apparaît sur le marché. Les parts sur le marché à la date t pour les produits A et B sont représentées par la matrice colonne

$$P_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix},$$

avec $x_t + y_t = 1$ (puisqu'il n'y a pas d'autre produit que A et B sur le marché).

La répartition prévue à la date $t+1$ est P_{t+1}, telle que

$$P_{t+1} = \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}.$$

(M s'appelle matrice de transition). On notera que

$$x_{t+1} + y_{t+1} = (0.4x_t + 0.6y_t) + (0.6x_t + 0.8y_t) = x_t + y_t = 1.$$

1) Pour $P_0 = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}$, calculer P_1, P_2, P_3, P_{10}, P_{20}.

2) Refaire ces calculs avec d'autres valeurs de $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, vérifiant toujours $x_0 + y_0 = 1$. Qu'observe-t-on ?

3) Soit d un réel appartenant à l'intervalle $]-1/4,\ 3/4[$.
On note $x_0 = 1/4 + d$. Calculer en fonction de d, les valeurs de y_0, P_0, P_1, P_2, puis par récurrence P_n.

4) Quelle est la limite de $P_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ lorsque n tend vers $+\infty$? Quelle interprétation économique peut-on faire de ce résultat ?

(solution p. 116)

4.8.4. *Calculs avec deux matrices*

On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer J^2 et vérifier qu'ici, on a $AJ = JA$.

2) Donner J^{-1}.

3) Montrer que

$$\begin{cases} (A + 2I_4 + 3J)^2 = 4(A + 2I_4 + 3J) \\ A(A + 6J) = -5I_4. \end{cases}$$

4) En déduire A^{-1}.

(solution p. 118)

4.8.5. *Méthode de Sylvester*

On propose d'utiliser la méthode dite de Sylvester, exposée ici sur des matrices d'ordre 2, pour prouver l'égalité

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

et Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

1) En développant Δ suivant la première ligne, montrer qu'on a

$$\Delta = \det(A)\det(B).$$

2) Grâce aux actions de Gauss suivantes

$$\begin{aligned} L_1 &\longleftarrow L_1 + a_{11}L_3 + a_{12}L_4 \\ L_2 &\longleftarrow L_2 + a_{21}L_3 + a_{22}L_4 \end{aligned}$$

et en développant ensuite par rapport à la deuxième colonne, montrer qu'on a

$$\Delta = \det(A.B).$$

4.8.6. *Sur un système de Cramer*

On considère le système

$$\begin{cases} 2x & +3y & -z & +t & = 1 \\ x & -y & +3z & -2t & = 0 \\ 3x & -4y & +z & -3t & = 0 \\ x & +5y & -2z & +2t & = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que ce système est de Cramer.

2) Donner sa solution en utilisant la fonction *rref* de *Matlab*.

3) Vérifier qu'on obtient aussi cette solution directement par l'inversion matricielle.

4) En adaptant les formules de Cramer au cas d'un système de quatre équations à quatre inconnues, retrouver la solution de ce système.

(solution p. 121)

4.8.7. *Un système de Vandermonde*

On considère le système dit de **Vandermonde** suivant

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 1 \\ ax & +by & +cz & = & d \\ a^2x & +b^2y & +c^2z & = & d^2. \end{array}\right.$$

1) En calculant le déterminant de ce système, donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients a, b et c pour avoir une unique solution. En donner l'expression.

2) Montrer que dans le cas $a \neq b$ et $b = c$, il y a des solutions si et seulement si $d = a$ ou $d = c$ et trouver toutes les solutions dans ces deux cas.

3) Montrer que si $a = b = c$ il y a des solutions si et seulement si $d = a$ et donner ces solutions.

(solution p. 123)

4.9. Solutions

Exercice 4.8.1

$M = zeros(10, 10)$ permet de construire la matrice nulle de type $(10, 10)$. On modifie ensuite les termes de la diagonale.

```
» M=zeros(10,10);
» for i=1 :10,
   M(i,i)=11-i;
end
» M
M =
10 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 9 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 8 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 7 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 6 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 5 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 4 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 3 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 2 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
```

On pouvait aussi utiliser la fonction *diag*.

```
» clear
» V=[10 :-1 :1] ;
» M=diag(V) ;
```

Exercice 4.8.2

1) On définit les trois matrices A, B, C :

```
» A=rand(3,3)
A =
   0.9501 0.4860 0.4565
   0.2311 0.8913 0.0185
   0.6068 0.7621 0.8214
» B=rand(3,3)
B =
   0.4447 0.9218 0.4057
   0.6154 0.7382 0.9355
   0.7919 0.1763 0.9169
» C=rand(3,3)
C =
   0.4103 0.3529 0.1389
   0.8936 0.8132 0.2028
   0.0579 0.0099 0.1987
```

2) On compare $P_1 = (A.B).C$ et $P_2 = A.(B.C)$. On constate que les résultats sont égaux.

```
» P1=(A*B)*C
P1 =
   1.6924 1.4640 0.6672
   1.1092 0.9553 0.4575
   1.8012 1.5372 0.7901
» P2=A*(B*C)
P2 =
   1.6924 1.4640 0.6672
   1.1092 0.9553 0.4575
   1.8012 1.5372 0.7901
```

Aux erreurs d'arrondi machine près :

```
» P1-P2
ans =
1.0e-015 *
     0         0      -0.1110
   -0.2220   0      -0.0555
    0.2220   0        0
```

Pour $P_1 = A.B$ et $P_2 = B.A$, on a :

```
» P1=A*B
P1 =
   1.0831 1.3151 1.2586
   0.6660 0.8743 0.9445
   1.3894 1.2668 1.7123
» P2=B*A
P2 =
   0.8818 1.3469 0.5533
   1.3231 1.6700 1.0630
   1.3496 1.2407 1.1179
» P1-P2
ans =
   0.2013 -0.0319 0.7053
   -0.6571 -0.7957 -0.1185
   0.0398 0.0260 0.5944
```

3) On vérifie que $A.I_3 = A$

```
» I3=eye(3)
I3 =
   1 0 0
   0 1 0
   0 0 1
» P1=A*I3
P1 =
   0.9501 0.4860 0.4565
   0.2311 0.8913 0.0185
   0.6068 0.7621 0.8214
» P1-A
ans =
   0 0 0
   0 0 0
   0 0 0
```

4) On effectue les mêmes vérifications sur des matrices de type $(2, 2)$ en utilisant le calcul symbolique.

```
» syms a b c d a1 b1 c1 d1 a2 b2 c2 d2 real
» A=[a b ; c d]
A =
   [ a, b]
   [ c, d]
» B=[a1 b1 ;c1 d1] ;
» C=[a2 b2 ; c2 d2] ;
```

```
» D1=simplify(A*B-B*A)
D1 =
   [ b*c1-c*b1, a*b1+b*d1-a1*b-b1*d]
   [ c*a1+d*c1-c1*a-d1*c, c*b1-b*c1]
```

```
» D2=simplify((A*B)*C - A*(B*C))
D2 =
[ 0, 0]
[ 0, 0]
```

```
» I2=eye(2) ;
» P=A*I2
P =
   [ a, b]
   [ c, d]
```

Exercice 4.8.3

1) On entre les matrices M, P_0, et on calcule $P_1 = MP_0$, $P_2 = MP_1$:

```
» M= [0.4 0.2 ;0.6 0.8] ;
» P0=[0.7 ; 0.3 ] ;
» P1=M*P0
P1 =
   0.3400
   0.6600
» P2=M*P1
P2 =
   0.2680
   0.7320
```

Pour calculer P_{10}, P_{20}, on a la relation de récurrence $P_n = M^n P_0$

```
» P10=M^10*P0
P10 =
   0.2500
   0.7500
» P20=M^20*P0
P20 =
   0.2500
   0.7500
```

2) On peut effectuer les calculs avec d'autres valeurs pour

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

dans chaque cas P_{10}, P_{20} sont très proches de $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$.

3) On exprime $x_0, y_0, P_{0,}\ P_{1,}\ P_2$ en fonction de d.

```
» syms d
» x0=1/4+d;
» y0=1-x0;
» P0=[x0 ;y0];
» M=sym(M);
» P1=M*P0
P1 =
   [ 1/4+1/5*d]
   [ 3/4-1/5*d]
» P2=M*P1
P2 =
   [ 1/4+1/25*d]
   [ 3/4-1/25*d]
» P3=M*P2
P3 =
   [ 1/4+1/125*d]
   [ 3/4-1/125*d]
```

On peut achever de prouver par récurrence la relation

$$P_n = \begin{pmatrix} 1/4 + (1/5)^n d \\ 3/4 - (1/5)^n d \end{pmatrix},$$

vérifiée ci-dessus pour $n = 1, 2, 3$.
On suppose la relation vraie à un rang n, et on vérifie qu'elle est encore vraie au rang

$n+1.$

```
» syms n
» Pn=[1/4+1/5^n*d;3/4-1/5^n*d]
Pn =
[ 1/4+1/(5^n)*d]
[ 3/4-1/(5^n)*d]
» PnPlus1=M*Pn
PnPlus1 =
[ 1/4+1/5/(5^n)*d]
[ 3/4-1/5/(5^n)*d]
» simple(PnPlus1)
[ 1/4+(5^(-1-n)*d]
[ 3/4-(5^(-1-n)*d]
```

4) De la relation obtenue pour P_n, on déduit

$$\lim P_n = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}.$$

Ce résultat montre que, quelle que soit la répartition initiale (x_0, y_0) des parts de marché, la répartition tend vers $(25\%, 75\%)$.

Exercice 4.8.4

1) On introduit les matrices A et J; puis on calcule J^2 :

```
» A=[-1 1 1 -2 ; 1 -1 -2 1 ;1 -2 -1 1 ;    -2 1 1 -1] ;
» J=[0 0 0 1 ;0 0 1 0 ; 0 1 0 0 ; 1 0 0 0] ;
» J2=J^2
J2 =
   1 0 0 0
   0 1 0 0
   0 0 1 0
   0 0 0 1
```

On vérifie que $AJ = JA$:

```
» P1 =A*J
P1 =
   -2 1 1 -1
   1 -2 -1 1
   1 -1 -2 1
   -1 1 1 -2
» P2=J*A
P2 =
   -2 1 1 -1
   1 -2 -1 1
   1 -1 -2 1
   -1 1 1 -2
```

2) De la relation $J^2 = I_4$ obtenue ci-dessus, on déduit

$$J^{-1} = J,$$

On pouvait aussi l'obtenir par :

```
» J^(-1)
ans =
   0 0 0 1
   0 0 1 0
   0 1 0 0
   1 0 0 0
```

3) On vérifie la relation

$$(A + 2I_4 + 3J)^2 = 4(A + 2I_4 + 3J)$$

```
» I4=eye(4)
I4 =
    1 0 0 0
    0 1 0 0
    0 0 1 0
    0 0 0 1
» Exp1=(A+2*I4+3*J)^2
Exp1 =
    4 4 4 4
    4 4 4 4
    4 4 4 4
    4 4 4 4
» Exp2=4*(A+2*I4+3*J)
Exp2 =
    4 4 4 4
    4 4 4 4
    4 4 4 4
    4 4 4 4
```

puis

$$A(A+6J) = -5I_4.$$

```
» Exp3=A*(A+6*J)
Exp3 =
    -5 0 0 0
    0 -5 0 0
    0 0 -5 0
    0 0 0 -5
```

On en déduit que la matrice

$$-1/5(A+6J)$$

est l'inverse de A. Avec *Matlab :*

```
» Inv=-1/5*(A+6*J)
Inv =
   0.2000 -0.2000 -0.2000 -0.8000
  -0.2000  0.2000 -0.8000 -0.2000
  -0.2000 -0.8000  0.2000 -0.2000
  -0.8000 -0.2000 -0.2000  0.2000
» %Vérification
» A^(-1)
ans =
   0.2000 -0.2000 -0.2000 -0.8000
  -0.2000  0.2000 -0.8000 -0.2000
  -0.2000 -0.8000  0.2000 -0.2000
  -0.8000 -0.2000 -0.2000  0.2000
```

Exercice 4.8.6

1) On introduit la matrice A des coefficients du système, sous forme symbolique afin d'obtenir les résultats ultérieurs sous forme fractionnaire exacte. Puis on calcule $\det(A)$ pour vérifier que ce système carré est de Cramer.

```
» A=sym([2 3 -1 1 ;1 -1 3 -2 ; 3 -4 1 -3 ; 1 5 -2 2])
A =
[ 2, 3, -1, 1]
[ 1, -1, 3, -2]
[ 3, -4, 1, -3]
[ 1, 5, -2, 2]
» d=det(A)
d = -26
```

2) Pour utiliser *rref*, on crée la matrice formée par juxtaposition de A et de la matrice colonne B des seconds membres.

```
» B=[1 ;0 ;0 ;0] ;
» Syst=[A B]
Syst =
[ 2, 3, -1, 1, 1]
[ 1, -1, 3, -2, 0]
[ 3, -4, 1, -3, 0]
[ 1, 5, -2, 2, 0]
» rref(Syst)
ans =
[ 1, 0, 0, 0, 23/26]
[ 0, 1, 0, 0, -17/26]
[ 0, 0, 1, 0, 11/13]
[ 0, 0, 0, 1, 53/26]
```

Ainsi, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x & & & & = 23/26 \\ & y & & & = -17/26 \\ & & z & & = 11/13 \\ & & & t & = 53/26 \end{cases}$$

3) On obtient aussi la solution du système par $S = A^{-1}B$.

```
» S=inv(A)*B
S =
[ 23/26]
[ -17/26]
[ 11/13]
[ 53/26]
```

4) Enfin, les formules de Cramer donnent, par exemple

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)},$$

où A_x s'obtient en remplaçant dans A la première colonne (celle de l'inconnue x) par la colonne B des seconds membres :

```
» x=det([B A( :,2 :4)])/d
x = 23/26
```

Ici, A(:,2 :4) signifie la sous-matrice extraite de A en conservant les colonnes de 2 à 4. On calcule de même

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}, \quad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)}, \quad t = \frac{\det(A_t)}{\det(A)}.$$

```
» y=det([A( :,1) B A( :,3 :4)])/d
y = -17/26
» z=det([A( :,1 :2) B A( :,4)])/d
z = 11/13
» t=det([A( :,1 :3) B])/d
t = 53/26
```

Exercice 4.8.7

1) On déclare les données et on calcule le déterminant du système

```
» syms a b c d real
» M=[1 1 1 ; a b c ; a^2 b^2 c^2] ;
» B = [1 ; d ;d^2] ;
» D = factor(det(M))
D =-(-c+b)*(a-c)*(a-b)
```

La matrice est donc inversible si et seulement si les trois nombres a, b et c sont distincts. On résout dans ce cas le système

```
» S=simple(inv(M)*B)
S =
[ (c-d)*(b-d)/(a-c)/(a-b)]
[ -(c-d)*(a-d)/(-c+b)/(a-b)]
[ (b-d)*(a-d)/(-c+b)/(a-c)]
```

D'où

$$x = \frac{(c-d)(b-d)}{(a-c)(a-b)}, \quad y = \frac{-(c-d)(a-d)}{(b-c)(a-b)}, \quad z = \frac{(b-d)(a-d)}{(b-c)(a-c)}.$$

On résout maintenant les cas particuliers.

2) Cas $b = c$ et $a \neq b$. On détermine la matrice du système particulier

```
» M1= subs(M,b,c)
M1 =
[ 1, 1, 1]
[ a, c, c]
[ a^2, c^2, c^2]
» det(M1)
ans =0
» J=[M1 B]
J =
[ 1, 1, 1, 1]
[ a, c, c, d]
[ a^2, c^2, c^2, d^2]
```

L'utilisation de *rref* donne, en raison de simplifications abusives

```
» rref(J)
ans =
[ 1, 0, 0, 0]
[ 0, 1, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
```

On utilise donc la méthode de Gauss, pas à pas

```
» J(2, :)=J(2, :)-a*J(1, :) ;
» J(3, :)=J(3, :)-a^2*J(1, :)
J =
[ 1, 1, 1, 1]
[ 0, c-a, c-a, -a+d]
[ 0, c^2-a^2, c^2-a^2, d^2-a^2]
» J(3, :)=J(3, :)-(c+a)*J(2, :) ;
» J=simplify(J)
J =
[ 1, 1, 1, 1]
[ 0, c-a, c-a, -a+d]
[ 0, 0, 0, d^2-a*d+c*a-c*d]
```

Le système a des solutions si et seulement si

$$d^2 - ad + ac - cd = 0,$$

c'est-à-dire

$$d(d-a) - c(d-a) = (d-c)(d-a) = 0$$

ce qui équivaut à $d = a$ ou $d = c$. On traite ces deux cas :

- cas $d = a$

```
» K=subs(J, d,a)
K =
[ 1, 1, 1, 1]
[ 0, c-a, c-a, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
```

Comme $c \neq a$, on peut utiliser *rref*

```
» rref(K)
ans =
[ 1, 0, 0, 1]
[ 0, 1, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
```

ce qui se traduit par

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0. \end{array}\right.$$

D'où l'ensemble des solutions :

$$\mathbb{S}_1 = \{(1, -z, z) : z \in \mathbb{R}\}\ .$$

- cas $d = c$

```
» H=subs(J, d,c)
H =
[ 1, 1, 1, 1]
[ 0, c-a, c-a, c-a]
[ 0, 0, 0, 0]
» rref(H)
ans =
[ 1, 0, 0, 0]
[ 0, 1, 1, 1]
[ 0, 0, 0, 0]
```

D'où

$$\mathbb{S}_2 = \{(0, -z+1, z) : z \in \mathbb{R}\}\ .$$

3) Cas $a = b = c$. On calcule la matrice du système particulier

```
» M2 =subs(M,{a,b},{c,c})
M2 =
[ 1, 1, 1]
[ c, c, c]
[ c^2, c^2, c^2]
» J2=[M2 B]
J2 =
[ 1, 1, 1, 1]
[ c, c, c, d]
[ c^2, c^2, c^2, d^2]
```

Puis on effectue pas à pas deux actions de Gauss

```
» J2(2, :)=J2(2, :)-c*J2(1, :) ;
» J2(3, :)=J2(3, :)-c^2*J2(1, :) ;
» J2
J2=
[ 1, 1, 1, 1]
[ 0, 0, 0, d-c]
[ 0, 0, 0, d^2-c^2]
```

Il y a des solutions si et seulement si $d = c$ et

```
» subs(J2,d,c)
ans =
[ 1, 1, 1, 1]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
```

Ainsi l'ensemble des solutions est

$$\mathbb{S}_3 = \{(-y - z + 1, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} .$$

Chapitre 5

Espaces vectoriels

Nous avons vu que les manipulations essentielles de Gauss sur les systèmes linéaires, les matrices ou les déterminants étaient celles qui **combinaient** entre les lignes (ou les colonnes). Nous allons donc considérer des ensembles formés à partir de ces lignes (ou colonnes) sur lesquels nous définissons des opérations, permettant, entre autres, de retrouver ces "combinaisons".

5.1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

5.1.1. *Opérations dans* $\mathbb{R}^2$

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est par définition l'ensemble des couples de réels :

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} .$$

Un élément (a, b) de $\mathbb{R}^2$ sera noté

$$\overrightarrow{v} = (a, b).$$

Avec *Matlab*, il est représenté entre crochets :

```
» syms a b real
» v= [a, b]
v =[ a, b]
```

Par définition, deux éléments $\overrightarrow{v} = (a, b)$ et $\overrightarrow{w} = (a', b')$ de $\mathbb{R}^2$ sont égaux si, et seulement si

$$\begin{cases} a = a' \\ b = b'. \end{cases}$$

Le couple $(0, 0)$ sera noté $\overrightarrow{0}$ et appelé vecteur nul.

Comme on l'a fait sur les matrices au chapitre précédent, on va définir deux opérations naturelles sur les éléments de $\mathbb{R}^2$.

1) **L'addition.** Pour deux éléments $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2)$ de $\mathbb{R}^2$, on définit leur somme $\overrightarrow{s}$ par

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

On a ainsi défini une application :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \times & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\overrightarrow{v_1} & , & \overrightarrow{v_2}) & \longrightarrow & \overrightarrow{s}. \end{array}$$

2) **La multiplication par les réels**. Soit λ un nombre quelconque de $\mathbb{R}$, on définit un multiple d'un élément $\overrightarrow{v} = (a, b)$ par

$$\overrightarrow{m} = \lambda.\overrightarrow{v} = \lambda.(a, b) = (\lambda.a, \lambda.b).$$

Cela définit l'application :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \times & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda & , & \overrightarrow{v}) & \longrightarrow & \overrightarrow{m}. \end{array}$$

Avec *Matlab*, ces opérations sont notées $+$ et $*$:

```
» syms a1 a2 b1 b2 k real
» v1 = [a1, b1] ;
» v2 = [a2, b2] ;
» s= v1+v2
s =[ a1+a2, b1+b2]
» m = k*v1
m = [ k*a1, k*b1]
```

5.1.2. *Structure d'espace vectoriel*

La première loi d'addition (interne) satisfait aux propriétés suivantes : pour tous $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$,

$$\left\| \begin{array}{ll} (G1): & \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1} \textit{ (commutativité)}, \\ (G2): & \overrightarrow{v_1} + (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) = (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) + \overrightarrow{v_3} \textit{ (associativité)}, \\ (G3): & \overrightarrow{0} + \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v_1} \textit{ (existence de l'élément neutre } \overrightarrow{0}\textit{)}, \\ (G4): & \overrightarrow{w} = (-a, -b) \textit{ est le symétrique de } \overrightarrow{v} = (a, b) \\ & \quad \textit{i.e. } \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}. \end{array} \right.$$

On dit que $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif.

On vérifie aussi les quatre propriétés de compatibilité entre les deux lois :

$$\left\|\begin{array}{ll}(P1): & 1.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}, \\ (P2): & \lambda.(\mu.\overrightarrow{v}) = \lambda\mu.\overrightarrow{v}, \\ (P3): & \lambda.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda.\overrightarrow{v} + \lambda.\overrightarrow{w}, \\ (P4): & (\lambda + \mu).\overrightarrow{v} = \lambda.\overrightarrow{v} + \mu.\overrightarrow{v},\end{array}\right.$$

pour tous $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2$ et tous réels $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

A titre d'exemple, on peut vérifier avec *Matlab* la propriété (P3) :

```
» E1= k*(v1+v2)
E1 = [ k*(a1+a2), k*(b1+b2)]
» E2 = k*v1+k*v2
E2 = [ k*a1+k*a2, k*b1+k*b2]
» expand(E1)
ans =[ k*a1+k*a2, k*b1+k*b2]
```

On dira que l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois d'addition et de multiplication par les réels est un **espace vectoriel sur le corps de base** $\mathbb{R}$ (en abrégé $\mathbb{R}$-e.v). Un élément quelconque $\overrightarrow{v} = (a, b)$ sera appelé un **vecteur**, tandis qu'un élément de $\mathbb{R}$ sera appelé un **scalaire**.

5.1.3. *Conséquences*

Des quatre propriétés fondamentales ci-dessus, on déduit que

1) $0.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, pour tout $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^2$,

2) $\lambda.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \iff (\lambda = 0$ ou $\overrightarrow{v} = 0)$.

5.2. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

On généralise les notions précédentes à l'ensemble

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n\}.$$

Un élément de $\mathbb{R}^n$ est noté

$$\overrightarrow{v} = (a_1, a_2, ..., a_n),$$

et sera aussi appelé un vecteur.

De même ici, on définit naturellement l'addition et la multiplication par les scalaires, en posant pour

$$\overrightarrow{v} = (a_1, a_2, ..., a_n),\ \overrightarrow{w} = (b_1, b_2, ..., b_n),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

la somme :

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$

et le produit par un scalaire :

$$\lambda.\overrightarrow{v} = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n).$$

Il est facile de voir que $(\mathbb{R}^n, +)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il vérifie les propriétés citées au paragraphe précédent $(G1), (G2), (G3), (G4)$ d'une part et $(P1), (P2), (P3), (P4)$ d'autre part.

5.3. Cas général

5.3.1. *Structure d'espace vectoriel*

5.3.1.1. *Définitions*

Soit E un ensemble quelconque sur lequel on a défini deux lois : une, **interne** notée $+$

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u\ ,\ v) & \longrightarrow & u+v, \end{array}$$

et une autre dite **externe** notée à l'aide d'un point,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda\ , u) & \longrightarrow & \lambda.u; \end{array}$$

on dira que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (en abrégé un $\mathbb{R}$ -e.v) si :

– $(E, +)$ est un groupe commutatif :

$$\left\| \begin{array}{ll} (G1): & v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \textit{ (commutativité)}, \\ (G2): & v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3 \textit{ (associativité)}, \\ (G3): & 0_E + v_1 = v_1 + 0_E = v_1 \textit{ (existence de l'élément neutre } \overrightarrow{0}), \\ (G4): & \textit{il existe } w \textit{ de } E, \textit{ dit symétrique de } v, \textit{ vérifiant } v + w = w + v = 0_E \\ & (w \textit{ est noté } -v), \end{array} \right.$$

pour tous v, v_1, v_2, v_3 de E,

– et de plus :

$$\left\| \begin{array}{ll} (P1): & 1.u = u, \\ (P2): & \lambda.(\mu.u) = \lambda\mu.u, \\ (P3): & \lambda.(u+v) = \lambda.u + \lambda.v, \\ (P4): & (\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u, \end{array} \right.$$

pour tous éléments u et v de E et tous scalaires λ, μ de $\mathbb{R}$.

5.3.1.2. *Remarque*

Lorsque les scalaires sont dans $\mathbb{C}$, on dit qu'on a un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

5.3.2. *Exemples*

1) L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$ -e.v.

2) L'ensemble des matrices $M_{n,p}(\mathbb{R})$ que nous avons étudié, muni de l'addition matricielle et de la multiplication par les scalaires de $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ -e.v.

3) L'ensemble $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes nul ou de degré inférieur ou égal à n et à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ -e.v. Ici $P \in \mathbb{R}_n[x]$ si

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{R},$$

(où x est une variable réelle par exemple). Les deux lois sont l'addition naturelle des polynômes et la multiplication par les scalaires.

4) L'ensemble $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions définies sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est aussi un $\mathbb{R}$-e.v pour les deux lois naturelles suivantes

$$\begin{cases} f+g : x \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x), \\ \lambda f : x \longmapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{cases}$$

5.3.3. *Combinaisons linéaires*

C'est une notion fondamentale en algèbre linéaire.

1) Dans $\mathbb{R}^n$. On appelle **combinaison linéaire** de deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de la forme

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2},$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

2) Dans un espace vectoriel général E, une **combinaison linéaire** de p vecteurs

$$u_1, u_2, u_3, ..., u_p$$

est un vecteur u de la forme

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + ... + \lambda_p u_p,$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, pour $i = 1, 2, ..., p$.

Exemple.

Dans $\mathbb{R}^3$, on donne

$$\overrightarrow{v_1} = (-1, 2, 0), \ \overrightarrow{v_2} = (1, -3, 0),$$

on peut calculer

$$2.\overrightarrow{v_1} + 5.\overrightarrow{v_2}$$

puis

$$a.\overrightarrow{v_1} + b.\overrightarrow{v_2}.$$

```
» v1= [-1, 2, 0] ; v2 = [1, -3, 0] ;
» w= 2*v1+5*v2
w = 3 -11 0
» syms a b real
» w = a*v1+b*v2
w = [ -a+b, 2*a-3*b, 0]
```

Ainsi

$$2.\overrightarrow{v_1} + 5.\overrightarrow{v_2} = (3, -11, 0)\,,$$

et

$$a.\overrightarrow{v_1} + b.\overrightarrow{v_2} = (-a + b, 2a + 3b, 0)\,.$$

5.3.4. *Notion de sous-espace vectoriel*

5.3.4.1. *Définition*

Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v et F un sous-ensemble de E. On dira que F est un **sous-espace vectoriel** de E (en abrégé $\mathbb{R}$-s-e.v.) si F, muni des deux lois de E, est lui-même un espace vectoriel.

On a la caractérisation importante suivante :

> *Un sous ensemble non vide F de E est un sous-espace vectoriel ssi :*
> *pour tous $u, v \in F$, $a, b \in \mathbb{R}$, on a $au + bv \in F$.*

Cela traduit le fait que F est **stable** vis-à-vis des lois $+$ et $\cdot$

On remarquera que tout sous-espace vectoriel F contient l'élément neutre 0 pour l'addition (ou le vecteur nul). En effet puisque F est non vide, il existe au moins un élément $u_0 \in F$ et donc, par stabilité, on déduit que

$$1.u_0 + (-1)u_0 = 0 \in F.$$

5.3.4.2. *Exemple*

Dans $E = \mathbb{R}^3$ le sous-ensemble

$$F = \{\overrightarrow{v} = (x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}\ ,$$

est un $\mathbb{R}$-s-e.v. En effet, pour $x = 0$, $y = 0$, on obtient $\overrightarrow{v} = (0,0,0)$ qui appartient à F : et lorsqu'on forme une combinaison linéaire $\overrightarrow{s} = a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}$ d'éléments de F, on a :

$$\overrightarrow{s} = a(x_1, y_1, 0) + b(x_2, y_2, 0) = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2, 0).$$

On obtient encore un élément de la forme $\overrightarrow{s} = (X, Y, 0)$, élément de F.

5.3.5. *Sous-espaces vectoriels engendrés*

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ par exemple, considérons deux vecteurs quelconques $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. Soit

$$F = \{\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\},$$

autrement dit, F est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

Alors on peut montrer que :

1) F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$,

2) F est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

F est appelé **le sous-espace vectoriel engendré** par les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ et est noté

$$F = Vect\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}, \quad (\text{ou } Span\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}).$$

5.3.5.1. *Remarques*

Pour montrer que $Vect\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ est inclus dans un sous-espace vectoriel G, il suffit de vérifier que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ appartiennent à G.

La notion précédente est évidemment généralisable dans un espace vectoriel quelconque et avec un nombre fini de vecteurs donnés dans cet espace.

5.3.5.2. *Exemple*

On reprend les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ de l'exemple 5.3.3 et le sous-espace vectoriel F du paragraphe 5.3.4.2. Vérifions que

$$F = Vect\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}.$$

$\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ appartiennent évidemment à F, donc

$$Vect\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} \subset F.$$

Montrons l'autre inclusion : étant donné un élément quelconque (x_0, y_0) de F, on cherche s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

```
» syms a b x0 y0 real
» v1=[-1, 2, 0] ; v2 =[1, -3, 0] ;
» a*v1+b*v2
ans = [ -a+b, 2*a-3*b, 0]
» S= solve('-a+b=x0', '2*a-3*b=y0',a,b);
» S.a
ans = -3*x0-y0
» S.b
ans = -2*x0-y0
```

On en déduit que tout élément $(x_0, y_0, 0)$ de F peut s'écrire sous la forme

$$a.\overrightarrow{v_1} + b.\overrightarrow{v_2},$$

avec

$$\begin{cases} a = -3x_0 - y_0 \\ b = -2x_0 - y_0. \end{cases}$$

5.3.5.3. *Propriétés de Vect*

Considérons à titre d'exemple trois vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ dans un espace vectoriel quelconque E. Alors les trois actions de Gauss suivantes conservent le sous-espace engendré $Vect$:

1) on peut échanger deux vecteurs quelconques . On a, par exemple,

$$Vect\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\right\} = Vect\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2}\right\}, \qquad (\overrightarrow{v_2} \longleftrightarrow \overrightarrow{v_3}),$$

2) on peut multiplier un vecteur par un réel non nul λ. Par exemple :

$$Vect\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\right\} = Vect\left\{\lambda\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\right\}, \qquad (\overrightarrow{v_1} \longleftarrow \lambda.\overrightarrow{v_1}),$$

3) on peut ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres. Par exemple :

$$\begin{aligned} Vect\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\right\} &= Vect\left\{\lambda\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} + \lambda\overrightarrow{v_1} + \mu\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}\right\} \\ &= Vect\left\{\overrightarrow{v_1} + \lambda\overrightarrow{v_2} + \mu\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\right\} \end{aligned}$$

etc.

5.4. Bases d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

5.4.1. *Famille génératrice*

Soit F une partie de E et

$$v_1, v_2, v_3, ..., v_p$$

p vecteurs quelconques de F. On dira que la famille

$$\{v_1, v_2, v_3, ..., v_p\},$$

est **génératrice de** F ssi tout vecteur u de F est combinaison linéaire des v_i, pour $i = 1, 2, ...p$. En d'autres termes :

$$\forall u \in F \ \ \exists \lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_p \in \mathbb{R} : u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ...\lambda_p v_p.$$

Par exemple la famille constituée par les vecteurs

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0),\ \overrightarrow{e_2} = (0,1),$$

est génératrice de l'espace $\mathbb{R}^2$ puisque tout vecteur $\overrightarrow{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire

$$\overrightarrow{u} = (x, y) = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}.$$

5.4.2. *Famille libre*

5.4.2.1. *Définitions*

Une famille de vecteurs

$$\{v_1, v_2, v_3, ..., v_p\},$$

de E est dite **libre** si aucun de ces vecteurs n'est une combinaison linéaire des autres.

Cela signifie que la seule combinaison linéaire nulle de ces vecteurs est la combinaison triviale

$$0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_p = 0_E.$$

C'est équivalent à dire que si

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p v_p = 0_E,$$

alors

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ...\lambda_p = 0.$$

Par exemple la famille constituée par les deux vecteurs

$$\overrightarrow{v_1} = (1,2),\ \overrightarrow{v_2} = (2,3),$$

est libre car

$$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Lorsque une famille de vecteurs est libre, on dit aussi que ces vecteurs sont **linéairement indépendants.**

Si une famille n'est pas libre, on dira qu'elle est **liée** ou que les vecteurs la constituant sont **linéairement dépendants.**

Voici une famille liée dans $\mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{v_1} = (1, 5/2),\ \overrightarrow{v_2} = (2, 5),$$

puisque

$$2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}.$$

En pratique, déterminer si une famille de $\mathbb{R}^n$ est libre ou liée conduit à chercher si un système admet la solution unique $(0, 0, \cdots, 0)$ ou admet une infinité de solutions.

5.4.2.2. *Exemple*

Déterminer si la famille de vecteurs

$$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\} = \{(1,2,0), (2,-1,3), (5,0,6)\},$$

est libre ou liée.

On définit

```
» v1 =[1,2,0] ; v2=[2,-1,3] ;v3=[5,0,6] ;
```

Formons une combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$:

```
» syms t1 t2 t3 real
» c= t1*v1+t2*v2+t3*v3
c = [ t1+2*t2+5*t3, 2*t1-t2, 3*t2+6*t3] ;
```

La famille $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est libre si, et seulement si, le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} t_1 & + & 2t_2 & + & 5t_3 & = & 0 \\ 2t_1 & - & t_2 & & & = & 0 \\ & & 3t_2 & + & 6t_3 & = & 0. \end{array}\right.$$

admet une solution unique. On forme la matrice permettant d'appliquer la méthode de Gauss à ce système :

```
» M= [1  2  5 0 ;2 -1  0 0 ;0  3  6 0]
M =
      1  2  5 0
      2 -1  0 0
      0  3  6 0
```

L'application de cette méthode donne :

```
» rref(M)
ans =
      1 0 1 0
      0 1 2 0
      0 0 0 0
```

D'où le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} t_1 & & & + & t_3 & = & 0 \\ & & t_2 & + & 2t_3 & = & 0, \end{array}\right.$$

dont l'ensemble des solutions est

$$\mathbb{S} = \{(-t_3, -2t_3, t_3),\ t_3 \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi la famille $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est liée.

5.4.3. *Base et dimension d'un espace vectoriel*

5.4.3.1. *Définition*

Dans un espace vectoriel quelconque, on appelle **base** une famille génératrice et libre.

5.4.3.2. *Exemples*

On peut facilement vérifier que dans $\mathbb{R}^3$ la famille constituée par les vecteurs

$$\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0),\ \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0),\ \overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1),$$

est une base. On l'appelle la **base canonique.**

Dans l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées, la famille constituée par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est une base.

5.4.3.3. *Propriétés fondamentales*

Si dans un espace vectoriel E, il existe une partie **génératrice finie,** on dira que E est de **dimension finie**. Dans le cas contraire on dira qu'il est de dimension infinie. On a les résultats suivants :

Théorème
Dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$:
(i) *il existe au moins une base finie,*
(ii) *toutes les bases sont finies et ont le même nombre d'éléments n.*

Ce nombre n est appelé la dimension de E et se note $\dim_{\mathbb{R}}(E) = n$.

Théorème
Dans un espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbb{R}$:
(i) *toute famille libre de n éléments est une base,*
(ii) *toute famille génératrice de n éléments est une base.*

Par exemple, on a

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n \\ \dim_{\mathbb{R}}(M_2(\mathbb{R})) = 4. \end{cases}$$

5.4.4. *Caractérisation d'une base*

Dans un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$, une famille de n vecteurs

$$\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\},$$

est une base, si :

Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ il existe n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ déterminés de manière unique, tels que

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + ... + \lambda_n e_n.$$

Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont appelés les **composantes** (ou **coordonnées)** de v relativement à la base

$$\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\},$$

et sont déterminés d'une manière unique. Lorsque la base est fixée, on notera

$$v \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

5.4.5. *Matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs*

5.4.5.1. *Définition*

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, dans lequel on s'est fixé une base

$$\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}.$$

On se donne p vecteurs $v_1, v_2, v_3, ..., v_p$, avec leurs coordonnées respectives :

$$v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, v_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, v_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix},$$

obtenue en juxtaposant les colonnes des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_p$ est appelée matrice de cette famille de vecteurs relativement à la base $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$.

Théorème.
Dans le cas $p = n$, les vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ forment une base si et seulement si $\det(M) \neq 0$.

En effet ces vecteurs sont linéairement indépendants si on a l'équivalence

$$(x_1 v_1 + x_2 v_2 + ..., + x_n v_n = 0_E) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 = ... = x_n = 0)$$

autrement dit si le système

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + ..., + x_n a_{1n} = 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + ..., + x_n a_{2n} = 0 \\ \vdots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + ..., + x_n a_{nn} = 0 \end{cases}$$

est de Cramer, c'est-à-dire $\det(M) \neq 0$.

5.4.5.2. *Remarque*

Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, si on utilise la base canonique

$$\overrightarrow{e_1} = (1, 0, \cdots, 0),\ \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots,\ \overrightarrow{e_n} = (0, \cdots, 0, 1),$$

alors tout vecteur

$$\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2\ \overrightarrow{e_2} + ... + x_n \overrightarrow{e_n}$$

a pour matrice de coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Matlab ne faisant pas la distinction entre l'élément $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et la matrice ligne $(x_1\ x_2...x_n)$, on peut remarquer qu'on obtient la matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{v}$ par transposition de $\overrightarrow{v}$. Vérifions le dans $\mathbb{R}^3$

```
» e1=[1,0,0];
» e2=[0,1,0];
» e3=[0,0,1];
» syms x1 x2 x3 real
» v=[x1,x2,x3]
v =
   [ x1, x2, x3]
```

On vérifie l'égalité $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\ \overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$

```
» x1*e1+x2*e2+x3*e3
ans =
   [ x1, x2, x3]
```

On obtient la matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{v}$ par transposition de la matrice ligne $\overrightarrow{v}$:

```
» coordV=v'
coordV =
   [ x1]
   [ x2]
   [ x3]
```

5.4.6. *Rang d'une famille de vecteurs*

Soit une famille (ou un système) de vecteurs

$$\mathcal{F} = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_p\}$$

d'un $\mathbb{R}$-e.v E.

On appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$, le nombre maximum, noté r, de vecteurs linéairement indépendants pris dans $\mathcal{F}$.

On a nécéssairement

$$\begin{cases} r \leqslant p \\ r = \dim Vect\,\{v_1, v_2, v_3, ..., v_p\}\,. \end{cases}$$

Lorsque le système est pris dans un espace vectoriel de dimension n on a aussi

$$r \leqslant n.$$

5.4.6.1. *Exemple.*

Pour déterminer le rang r du système de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{F} = \{(1,-1,1),(-1,1,1),(2,1,0)\},$$

on utilise les actions de Gauss. On a

$$\begin{aligned}
& Vect\,\{(1,-1,1),(-1,1,1),(2,1,0)\} \\
= \; & Vect\,\{(1,-1,1),(1,-1,1)+(-1,1,1),(2,1,0)-2(1,-1,1)\} \\
= \; & Vect\,\{(1,-1,1),(0,0,2),(0,3,-2)\} \\
= \; & Vect\,\{(1,-1,1),(0,3,-2),(0,0,2)\} \\
= \; & Vect\,\{(1,-1,1),(0,3,-2),(0,0,1)\} \\
= \; & Vect\,\{(1,-1,1),(0,3,-2)+2(0,0,1),(0,0,1)\} \\
= \; & Vect\,\{(1,-1,1),(0,3,0),(0,0,1)\} \\
= \; & Vect\,\{(1,-1,1),(0,1,0),(0,0,1)\} \\
= \; & Vect\,\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \\
= \; & \mathbb{R}^3,
\end{aligned}$$

ainsi

$$\dim Vect\,\{(1,-1,1),(-1,1,1),(2,1,0)\} = r = 3.$$

5.4.6.2. *Caractérisation*

Si de plus, l'espace vectoriel est rapporté à une base $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$, alors on montre que le rang du système $\mathcal{F}$ est l'ordre de la plus grande matrice carrée de déterminant non nul extraite de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix},$$

de la famille $\mathcal{F}$ (voir exercice 5.5.8 p. 145).

5.5. Exercices

5.5.1. *Un plan vectoriel de* $\mathbb{R}^3$

On donne le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\right\}.$$

1) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel.

2) Montrer que $F = Vect\{(2,1,0),(-1,0,1)\}$.

3) En utilisant des actions de Gauss vérifier que

$$F = Vect\{(1,0,-1),(0,1,2)\}.$$

(solution p 145)

5.5.2. *Un système de 4 vecteurs de* $\mathbb{R}^4$

On donne les vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$\overrightarrow{u_1} = (c,a,b,c),\ \overrightarrow{u_2} = (a,c,c,b),\ \overrightarrow{u_3} = (b,c,c,a),\ \overrightarrow{u_4} = (c,b,a,c).$$

1) Quelle relation doivent vérifier c, a, b pour que ces vecteurs forment une famille libre ?

2) Lorsque ces vecteurs forment une famille liée, donner dans chaque cas une combinaison linéaire vérifiée.

(solution p 147)

5.5.3. *Un s-e.v de* $\mathbb{R}^4$

On donne le sous-ensemble V de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \in V \Longleftrightarrow (x_1 = x_2 - 3x_3,\ x_3 = 2x_4)\,,$$

montrer que

$$V = Vect\{(1,1,0,0),\ (-6,0,2,1)\}\,,$$

et donner ensuite une base et la dimension de V.

(solution p 148)

5.5.4. *Un s-e.v de* $M_4(\mathbb{R})$

Soit F le sous-ensemble des matrices carrées de $M_4(\mathbb{R})$ définies par

$$m(d,a,b,c) = \begin{pmatrix} d & -a & -b & -c \\ a & d & -c & b \\ b & c & d & -a \\ c & -b & a & d \end{pmatrix},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1) Vérifier que

$$F = Vect\{I, J, K, L\},$$

avec

$$\begin{cases} I = m(1,0,0,0), & J = m(0,1,0,0), \\ K = m(0,0,1,0), & L = m(0,0,0,1). \end{cases}$$

En déduire une base et la dimension de F.

2) Montrer que la multiplication des matrices est stable dans F. Est-elle commutative dans F ?

3) Calculer le produit

$$m(d,a,b,c).\, m(d,-a,-b,-c).$$

4) En déduire la matrice inverse éventuelle de $m(d,a,b,c)$. Discuter.

(solution p. 149)

5.5.5. *Matrices magiques de type (3,3)*

Quels chiffres tous différents entre 1 et 9 doit-on mettre dans chaque case du tableau de type $(3,3)$ pour que la somme de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales soit toujours égale à 15 ?

Une solution est la matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

On propose l'étude suivante pour trouver l'ensemble des solutions.

1) On dit qu'une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ est magique si les huit sommes de lignes, de colonnes et des deux diagonales sont égales à un nombre donné s. Ecrire cette propriété sous forme d'un système.

2) Vérifier que ce système est résoluble par la méthode de Gauss pour tout $s \in \mathbb{R}$.

3) Donner l'ensemble solution de ce système. Faire des vérifications.

4) Montrer que cet ensemble est un s-e.v. de dimension 3.

5) Etude du cas $s = 15$, avec coefficients entiers. Donner toutes les possibilités pour un tableau $(3, 3)$ à coefficients entiers tous distincts entre 1 et 9 pour avoir la propriété d'une matrice magique avec $s = 15$.

(solution p 152)

5.5.6. *Sur l'espace vectoriel* $\mathbb{R}_2[x]$

On considère $E = \mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes nul ou de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels. Ici x désigne une variable réelle. Ainsi tout élément de E est de la forme

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$.

1) Montrer que si, en trois points x_0, x_1, x_2 distincts, on connaît les valeurs f_0, f_1, f_2 de $p(x)$ alors celui-ci est entièrement déterminé.

2) Vérifier que la famille de polynômes constituée par

$$p_0(x) = 1, \;\; p_1(x) = x, \;\; p_2(x) = x^2,$$

est une base de E.

3) Même question avec la famille

$$\begin{cases} q_0(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \\ q_1(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \\ q_2(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{cases}$$

4) Montrer que les composantes d'un polynôme quelconque $p(x)$ sur cette base sont respectivement

$$p(x_0), \; p(x_1), \; p(x_2).$$

5) On choisit

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Ecrire le polynôme $r(x) = 1 - 2x + 3x^2$ sur la base $\{q_0, q_1, q_2\}$,

6) Sans déterminer explicitement $p(x)$, calculer $p(3)$ sachant que

$$p(0) = 1, \; p(1) = 2, \; p(2) = 4.$$

(solution p 157)

5.5.7. *Calcul de rang dans* $\mathbb{R}^3$

Calculer le rang r du système

$$\mathcal{F} = \{(1,-1,1),(-1,1,1),(2,-2,0)\}.$$

(solution p. 160)

5.5.8. *Calcul de rang dans* $\mathbb{R}^4$

Trouver à l'aide de *Matlab* le rang du système

$$\{(1,0,-1,2),(0,2,-1,5),(1,-4,1,-8)\}.$$

(solution p. 160)

5.6. Solutions

Exercice 5.5.1

1) On vérifie que F est un s-e.v :

- $(0,0,0) \in F$
- On forme une combinaison linéaire d'éléments de F, notée s :

```
» syms x1 y1 z1 x2 y2 z2 a b real
» s= a*[x1,y1,z1]+ b*[x2,y2,z2]
s = [ a*x1+b*x2, a*y1+b*y2, a*z1+b*z2]
```

on définit Eq, l'équation caractérisant les éléments de F et on montre que s vérifie l'équation Eq :

```
» syms x y z real
» Eq =x-2*y+z ;
» Eqs=subs(Eq,{x,y,z},{s(1),s(2),s(3)})
Eqs = a*x1+b*x2-2*a*y1-2*b*y2+a*z1+b*z2
» collect(Eqs,a)
ans = (x1-2*y1+z1)*a+b*x2-2*b*y2+b*z2
» collect(ans,b)
ans = (x2-2*y2+z2)*b+(x1-2*y1+z1)*a
```

collect a permis de faire apparaître les deux expressions

$$x_1 - 2y_1 + z_1 \text{ et } x_2 - 2y_2 + z_2,$$

qui sont nulles puisque par hypothèse (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) appartiennent à F. Ainsi s vérifie l'équation caractérisant F.

2) On vérifie que $\overrightarrow{w_1} = (2,1,0)$ et $\overrightarrow{w_2} = (-1,0,1)$ appartiennent à F :

```
» subs(Eq,{x,y,z},{2,1,0})
ans = 0
» subs(Eq,{x,y,z},{-1,0,1})
ans = 0
```

Ainsi

$$Vect\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\} \subset F.$$

Montrons que $F \subset Vect\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\}$, c'est-à-dire que tout élément de F est combinaison linéaire de $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$

```
» % On calcule aw1+bw2 :
» w1 =[2,1, 0] ; w2 =[-1,0,1] ;
» syms a b real
» C =a*w1+b*w2
C = [ 2*a-b, a, b]
```

$(x, y, z) \in F$ est combinaison linéaire de de $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues a et b, admet une solution :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2a & - & b & = & x \\ a & & & = & y \\ & & b & = & z. \end{array}\right.$$

Par la méthode de Gauss, en faisant

$$L_2 \longleftarrow L_2 - 1/2L_1,$$

on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcrcc} 2a & - & b & = & x \\ & & b/2 & = & y - 1/2x \\ & & b & = & z. \end{array}\right.$$

Ainsi, le système admet la solution

$$\left\{\begin{array}{l} a = y \\ b = z, \end{array}\right.$$

si et seulement si $2(y - x/2) = z$, soit $x - 2y + z = 0$, relation qui est vérifiée par tout élément de F.

3) Ici la commande *rref* appliquée à la matrice des vecteurs $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}$ répond à la question !

```
» M=[w1 ; w2] ;
» rref(M)
ans = 1  0  -1
      0  1   2
```

donc

$$F = Vect\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\} = Vect\{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}.$$

Exercice 5.5.2

1) On déclare les vecteurs donnés et on forme une combinaison linéaire quelconque :

```
» syms a b c real
» u1 =[c,a,b,c];
» u2=[a,c,c,b];
» u3=[b,c,c,a];
» u4=[c,b,a,c];
» syms t1 t2 t3 t4 real
» combLin = t1*u1+t2*u2+t3*u3+t4*u4
combLin = [ t1*c+t2*a+t3*b+t4*c, t1*a+t2*c+t3*c+t4*b,
            t1*b+t2*c+t3*c+t4*a, t1*c+t2*b+t3*a+t4*c ]
```

On doit donc étudier le système

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} ct_1 & + & at_2 & + & bt_3 & + & ct_4 & = & 0 \\ at_1 & + & ct_2 & + & ct_3 & + & bt_4 & = & 0 \\ bt_1 & + & ct_2 & + & ct_3 & + & at_4 & = & 0 \\ ct_1 & + & bt_2 & + & at_3 & + & ct_4 & = & 0, \end{array}\right.$$

qui s'écrit matriciellement $M.T = 0$, ce qu'on peut vérifier en définissant M et T :

```
» M=[u1' u2' u3' u4'];
» T =[t1 ;t2 ;t3 ;t4];
» S = M*T
S =
[ t1*c+t2*a+t3*b+t4*c]
[ t1*a+t2*c+t3*c+t4*b]
[ t1*b+t2*c+t3*c+t4*a]
[ t1*c+t2*b+t3*a+t4*c]
```

Lorsque le déterminant de la matrice M est non nul, le système admet une solution unique, et la famille de vecteurs donnée est libre. Dans le cas contraire, le système n'est plus de Cramer, admet d'autres solutions que la solution triviale $(0, 0, 0)$ et la famille est liée.

```
» d =det(M)
d =-4*c^2*a^2+8*c^2*b*a-4*b^2*c^2+a^4-2*b^2*a^2+b^4
» factor(d)
ans = (a-b)^2*(b+a+2*c)*(b+a-2*c)
```

Ainsi la famille est libre si et seulement si

$$(a - b)^2(b + a + 2c)(b + a - 2c) \neq 0.$$

2) La famille de vecteurs est liée dans chacun des trois cas suivants :

$$b = a,$$
$$b = -a - 2c,$$
$$b = -a + 2c.$$

Dans chaque cas, il suffit de trouver une solution non trivialement nulle au système.

a) Cas $b = a$: on résout le système correspondant à ce cas :

```
» S1 = subs(S,b,a)
S1 = [ t1*c+t2*a+t3*a+t4*c]
     [ t1*a+t2*c+t3*c+t4*a]
     [ t1*a+t2*c+t3*c+t4*a]
     [ t1*c+t2*a+t3*a+t4*c]
» res=solve(S1(1),S1(2),S1(3),S1(4),t1,t2,t3,t4);
»[res.t1 res.t2 res.t3 res.t4]
ans = [ -t4, -t3, t3, t4]
```

D'où

$$-t_4\overrightarrow{u1} - t_3\overrightarrow{u2} + t_3\overrightarrow{u3} + t_4\overrightarrow{u4} = \overrightarrow{0}.$$

b) Cas $b = -a - 2c$:

```
» S2 = subs(S,b,-a-2*c)
S2 =[ t1*c+t2*a+t3*(-a-2*c)+t4*c]
     [ t1*a+t2*c+t3*c+t4*(-a-2*c)]
     [t1*(-a-2*c)+t2*c+t3*c+t4*a]
     [ t1*c+t2*(-a-2*c)+t3*a+t4*c]
» res=solve(S2(1),S2(2),S2(3),S2(4),t1,t2,t3,t4);
»[res.t1 res.t2 res.t3 res.t4]
ans = [ t4, t4, t4, t4]
```

D'où

$$t_4\overrightarrow{u1} + t_4\overrightarrow{u2} + t_4\overrightarrow{u3} + t_4\overrightarrow{u4} = \overrightarrow{0}.$$

c) Cas $b = -a + 2c$: en procédant de la même façon, on obtient

$$t_4\overrightarrow{u1} - t_4\overrightarrow{u2} - t_4\overrightarrow{u3} + t_4\overrightarrow{u4} = \overrightarrow{0}.$$

Exercice 5.5.3

On définit un vecteur quelconque de V, c'est-à-dire un vecteur

$$\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

vérifiant

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 3x_3 \\ x_3 = 2x_4, \end{cases}$$

```
» syms x1 x2 x3 x4 real
» v = [x1,x2,x3,x4];
» v= subs(v,{x1,x3},{x2-3*x3,2*x4})
v = [ (x2-3*(2*x4)), x2, (2*x4), x4]
```

Pour montrer que

$$V = Vect\left\{(1,1,0,0),\ (-6,0,2,1)\right\},$$

on vérifie que $\overrightarrow{v} \in V$ si et seulement si il existe a et b réels tels que

$$\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}$$

avec

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = (1,1,0,0) \\ \overrightarrow{u_2} = (-6,0,2,1). \end{cases}$$

ce qui conduit à la résolution d'un système de quatre équations, d'inconnues a et b :

```
» u1 = [1 , 1, 0, 0] ; u2 =[-6,0,2,1];
» syms a b real
» diff=a*u1+b*u2-v
diff = [ a-6*b-x2+6*x4, a-x2, 2*b-2*x4, b-x4]
» [a b]=solve(diff(1),diff(2),diff(3),diff(4),a,b)
a = x2
b = x4
```

Ainsi $V = Vect\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right\}$ et $\dim(V) = 2$ car il est facile de voir que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont linéairement indépendants.

Exercice 5.5.4

1) On introduit les matrices

$$\begin{aligned} M &= m(d,a,b,c), \quad I = m(1,0,0,0), \quad J = m(0,1,0,0), \\ K &= m(0,0,1,0), \quad L = m(0,0,0,1). \end{aligned}$$

```
» syms a b c d real
» M=[d -a -b -c ; a d -c b ; b c d -a ; c -b a d] ;
» I=subs(M, {d,a,b,c},{1,0,0,0})
 I =[ 1, 0, 0, 0]
      [ 0, 1, 0, 0]
      [ 0, 0, 1, 0]
      [ 0, 0, 0, 1]
» J = subs(M, {d,a,b,c},{0,1,0,0})
J=[ 0, -1, 0, 0]
   [ 1, 0, 0, 0]
   [ 0, 0, 0, -1]
   [ 0, 0, 1, 0]
» K=subs(M, {d,a,b,c},{0,0,1,0});
» L=subs(M, {d,a,b,c},{0,0,0,1});
```

On vérifie que $M \in F$ si et seulement si il existe t_1, t_2, t_3, t_4 réels tels que

$$M = t_1 I + t_2 J + t_3 K + t_4 L$$

```
» syms t1 t2 t3 t4 real
» diff=t1*I+t2*J+t3*K+t4*L-M;
» [t1 t2 t3 t4]=solve(diff(1,1),diff(2,1),diff(3,1),diff(4,1), ...
                     diff(1,2),diff(2,2),diff(3,2),diff(4,2), ...
                     diff(1,3),diff(2,3),diff(3,3),diff(4,3), ...
                     diff(1,4),diff(2,4),diff(3,4),diff(4,4),t1,t2,t3,t4)
t1 = d
t2 =a
t3 =b
t4 =c
```

Ainsi $F = Vect\{I, J, K, L\}$ et $\{I, J, K, L\}$ est une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est libre :

```
» syms t1 t2 t3 t4 real
» comb=t1*I+t2*J+t3*K+t4*L
comb =
         [ t1, -t2, -t3, -t4]
         [ t2, t1, -t4, t3]
         [ t3, t4, t1, -t2]
         [ t4, -t3, t2, t1]
```

De $comb = 0$, on déduit que nécessairement

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0.$$

Donc $\{I, J, K, L\}$ constitue une base et

$$\dim(F) = 4.$$

2) Montrons la stabilité de la multiplication : on effectue le produit de deux éléments quelconques M_1 et M_2 de F :

```
» syms a1 b1 c1 d1 a2 b2 c2 d2 real
» M1 = subs(M,{d,a,b,c},{d1, a1, b1, c1}) ;
» M2 = subs(M,{d,a,b,c},{d2, a2, b2, c2}) ;
» N = M1*M2 ;
» N( :,1) % on n'affiche que la première colonne
ans =[ d1*d2-a1*a2-b1*b2-c1*c2]
       [ a1*d2+d1*a2-c1*b2+b1*c2]
       [ -a1*c2+d1*b2+c1*a2+b1*d2]
       [ -b1*a2+c1*d2+d1*c2+a1*b2]
```

Pour montrer que le produit N est lui-même élément de F, il suffit alors de construire un élément $N_1 = m(D, A, B, C)$ de F tel que $N = N_1$ en tenant compte de la première colonne de N ci-dessus.

```
» N1=subs(M,{d,a,b,c},{d1*d2-a1*a2-b1*b2-c1*c2,a1*d2+d1*a2-c1*b2+b1*c2,...
-a1*c2+d1*b2+c1*a2+b1*d2,-b1*a2+c1*d2+d1*c2+a1*b2});
» N-N1
» ans =[ 0, 0, 0, 0]
        [ 0, 0, 0, 0]
        [ 0, 0, 0, 0]
        [ 0, 0, 0, 0]
```

D'où la stabilité de la multiplication. La loi n'est pas commutative car

```
» C = simplify(M1*M2 - M2*M1)
C =
[ 0, -2*b1*c2+2*c1*b2, 2*a1*c2-2*c1*a2, 2*b1*a2-2*a1*b2]
[ -2*c1*b2+2*b1*c2, 0, 2*b1*a2-2*a1*b2, -2*a1*c2+2*c1*a2]
[ -2*a1*c2+2*c1*a2, -2*b1*a2+2*a1*b2, 0, -2*b1*c2+2*c1*b2]
[ -2*b1*a2+2*a1*b2, 2*a1*c2-2*c1*a2, -2*c1*b2+2*b1*c2, 0]
```

3) On construit $M_3 = m(d, -a, -b, -c)$ et on calcule le produit demandé MM_3 :

```
» M3 = subs(M,{d,a,b,c},{d,-a,-b,-c})
M3 =
[ d, a, b, c]
[ -a, d, c, -b]
[ -b, -c, d, a]
[ -c, b, -a, d]
» M*M3
ans=[ d^2+a^2+b^2+c^2, 0, 0, 0]
    [ 0, d^2+a^2+b^2+c^2, 0, 0]
    [ 0, 0, d^2+a^2+b^2+c^2, 0]
    [ 0, 0, 0, d^2+a^2+b^2+c^2]
```

4) Ainsi

$$MM_3 = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)I_4.$$

Donc, si $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$, la matrice $M = m(d, a, b, c)$ a pour inverse

$$\frac{1}{d^2 + a^2 + b^2 + c^2} m(d, -a, -b, -c).$$

Exercice 5.5.5

1) Une matrice $(3, 3)$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

est magique si elle vérifie le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{11} & +a_{12} & +a_{13} & & & & & & & = s \\ & & & a_{21} & +a_{22} & +a_{23} & & & & = s \\ & & & & & & a_{31} & +a_{32} & +a_{33} & = s \\ a_{11} & & & +a_{21} & & & +a_{31} & & & = s \\ & a_{12} & & & +a_{22} & & & +a_{32} & & = s \\ & & a_{13} & & & +a_{23} & & & +a_{33} & = s \\ a_{11} & & & & +a_{22} & & & & +a_{33} & = s \\ & & a_{13} & & +a_{22} & & +a_{31} & & & = s. \end{array} \right.$$

On déclare les inconnues et on écrit la matrice des coefficients et seconds membres, permettant d'appliquer *rref* :

```
» syms a11 a12 a13 a21 a22 a23 a31 a32 a33 s real
» M=[a11 a12 a13 ;a21 a22 a23 ; a31 a32 a33] ;
» % les inconnues sont respectivement :
» %  a11 a12 a13 a21 a22 a23 a31 a32 a33
» MatSyst = [ 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, s ; ...
              0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, s ; ...
              0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, s ; ...
              1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, s ; ...
              0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, s ; ...
              0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, s ; ...
              1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, s ; ...
              0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, s] ;
```

2) Résolution du système. On a

```
» MatSystRed= rref(MatSyst)
»MatSystRed =
[ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2/3*s]
[ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 2/3*s]
[ 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1/3*s]
[ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, -1, -2, -2/3*s]
[ 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1/3*s]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 4/3*s]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, s]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
```

D'où le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{cccccccccl}
a_{11} & & & & & & & & +a_{33} & = 2s/3 \\
 & a_{12} & & & & & & +a_{32} & & = 2s/3 \\
 & & a_{13} & & & & & -a_{32} & -a_{33} & = -s/3 \\
 & & & a_{21} & & & & -a_{32} & -2a_{33} & = -2s/3 \\
 & & & & a_{22} & & & & & = s/3 \\
 & & & & & a_{23} & & +a_{32} & +2a_{33} & = 4s/3 \\
 & & & & & & a_{31} & +a_{32} & +a_{33} & = s \\
 & & & & & & & & 0 & = 0.
\end{array}\right.$$

La dernière ligne montre clairement que le système est résoluble pour tout s réel.

3) Ce système réduit montre que les sept inconnues

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}$$

se calculent en fonction des inconnues auxiliaires a_{32}, a_{33} et du second membre s. On forme les matrices magiques solutions :

```
» Magic =subs(M,{a11,a12,a13 },
{2/3*s-a33,2/3*s-a32,-1/3*s+a33+a32}) ...
» Magic =
[ 2/3*s-a33, 2/3*s-a32, -1/3*s+a33+a32]
[ a21,          a22,          a23 ]
[ a31,          a32,          a33]
» Magic =subs(Magic,{a21,a22,a23 }, ...
{-2/3*s+2*a33+a32,1/3*s,4/3*s-2*a33-a32})
Magic =
[ 2/3*s-a33,            2/3*s-a32, -1/3*s+a33+a32]
[ -2/3*s+2*a33+a32, 1/3*s,       4/3*s-2*a33-a32]
[ a31,                       a32,             a33]
» Magic = subs(Magic, a31,s-a33-a32)
Magic =
[ 2/3*s-a33,            2/3*s-a32, -1/3*s+a33+a32]
[ -2/3*s+2*a33+a32, 1/3*s,       4/3*s-2*a33-a32]
[ s-a33-a32,                a32,       a33]
```

Les matrices magiques solutions sont donc de la forme

$$Magic = \begin{pmatrix} 2s/3 - a_{33} & 2s/3 - a_{32} & 2s/3 + a_{33} + a_{32} \\ -2s/3 + 2a_{33} + a_{32} & s/3 & 4s/3 - 2a_{33} - a_{32} \\ s - a_{33} - a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

On peut, par exemple, vérifier que les trois colonnes ont pour somme s :

```
»for i =1 :3,
   sum(Magic(i, :))
end
ans=s
ans=s
ans=s
```

Même vérification pour les lignes et les diagonales :

```
»for j =1 :3,
   sum(Magic( :,j))
end
ans=s
ans=s
ans=s
» Magic(1,1)+Magic(2,2)+Magic(3,3)
ans=s
» Magic(1,3)+Magic(2,2)+Magic(3,1)
ans =s
```

4) Pour trouver une base et la dimension de l'espace E des matrices magiques, on définit les trois matrices magiques M_1, M_2, M_3 obtenues en remplaçant dans $Magic$ les paramètres (a_{32}, a_{33}, s) successivement par $(1, 0, 0)$, (0,1,0) et $(0, 0, 1)$. Puis on vérifie que toute matrice magique est de la forme

$$a_{32}M_1 + a_{33}M_2 + sM_3.$$

```
» M1 =subs(Magic,{a32,a33,s},{sym(1),sym(0),sym(0)})
M1 =[ 0, -1, 1]
      [ 1, 0, -1]
      [ -1, 1, 0]
» M2 =subs(Magic,{a32,a33,s},{sym(0),sym(1),sym(0)})
M2 =[ -1, 0, 1]
      [ 2, 0, -2]
      [ -1, 0, 1]
» M3 =subs(Magic,{a32,a33,s},{sym(0),sym(0),sym(1)})
M3 =[ 2/3, 2/3, -1/3]
      [ -2/3, 1/3, 4/3]
      [ 1, 0, 0]
» % Vérification
» CombLin =a32*M1+a33*M2+s*M3;
» CombLin-Magic
ans=[ 0, 0, 0]
     [ 0, 0, 0]
     [ 0, 0, 0]
```

On a ainsi $E = Vect(\{M_1, M_2, M_3\})$. On peut montrer que $\{M_1, M_2, M_3\}$ forme une famille libre, donc $\dim(E) = 3$.

5) Etude du cas $s = 15$. Pour former tous les tableaux magiques à coefficients entiers et distincts entre 1 et 9, on définit la fonction *tousDistincts* permettant de sélectionner les tableaux magiques à éléments distincts :

```
function res=tousDistincts(M)
res=1 ;
for i=1 :3,
  for j=1 :3,
      for k=1 :3,
           for l=1 :3,
                if (i˜ =k | j˜ =l)& M(i,j)==M(k,l)
                    res=0 ;
                    return
                end
            end
        end
    end
end
```

Ensuite, en donnant à a_{32}, a_{33} toutes les valeurs possibles entre 1 et 9, cette fonction sélectionne toutes les matrices magiques à coefficients positifs et distincts :

```
» for i = 1 :9,
    for j = 1 :9,
      if i~=j
       Magicij = double(subs(Magic,{a32,a33,s},{i,j,15})) ;
       if all(all(Magicij>0 & Magicij<10))& tousDistincts(Magicij)
            Magicij
      end
    end
  end
 end
Magicij =  4 9 2
           3 5 7
           8 1 6
Magicij =  2 9 4
           7 5 3
           6 1 8
Magicij =  6 7 2
           1 5 9
           8 3 4
» % etc..., (Il y a huit possibilités).
```

Exercice 5.5.6

1) Pour $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, on a à résoudre le système

$$\begin{cases} p(x_0) = f_0 \\ p(x_1) = f_1 \\ p(x_2) = f_2, \end{cases}$$

d'inconnues a_0, a_1, a_2. On exprime les premiers membres de ce système :

```
» syms x a0 a1 a2 real
» p = a0+a1*x+a2*x^2 ;
» syms x0 x1 x2 f0 f1 f2 real
» px0=subs(p,x,x0)
px0 = a0+a1*x0+a2*x0^2
»px1=subs(p,x,x1)
px1 = a0+a1*x1+a2*x1^2
» px2=subs(p,x,x2)
px2 = a0+a1*x2+a2*x2^2
```

Il a donc pour matrice :

```
» Ms =[1 x0 x0^2;1 x1 x1^2 ;1 x2 x2^2]
Ms =
[ 1, x0, x0^2]
[ 1, x1, x1^2]
[ 1, x2, x2^2]
» d= factor(det(Ms))
d = -(-x2+x1)*(x0-x2)*(x0-x1)
```

Le déterminant de la matrice du système est non nul puisque les coefficients

$$x_0, x_1, x_2$$

sont distincts, ce qui montre l'unicité de la solution, donc des coefficients

$$a_0, a_1, a_2.$$

2) Tout élément de l'espace vectoriel E s'écrit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x).$$

La famille $\{p_0, p_1, p_2\}$ est donc génératrice. Pour montrer qu'elle est libre, on doit vérifier que si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$p(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) = 0$$

alors

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0.$$

Il suffit d'écrire qu'en particulier, on a :

$$\begin{cases} p(0) = 0 \\ p(1) = 0 \\ p(2) = 0, \end{cases}$$

et de résoudre le système correspondant dont la matrice est :

```
» Syst = [subs(p,x,0) ;subs(p,x,1) ;subs(p,x,2)]
Syst =
      [ a0]
      [ a0+a1+a2]
      [ a0+2*a1+4*a2]
```

D'où

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0.$$

Donc les polynômes $1, x, x^2$ sont linéairement indépendants. Ainsi, la famille

$$\{p_0, p_1, p_2\}$$

est une base de E.

3) On définit les polynômes $\{q_0, q_1, q_2\}$, on forme une combinaison linéaire de ces éléments

$$combLin = c_0q_0 + c_1q_1 + c_2q_2,$$

et, selon le même raisonnement que ci-dessus, si

$$c_0q_0 + c_1q_1 + c_2q_2 = 0,$$

nécessairement ce polynôme s'annule pour les valeurs particulières

$$x_0, x_1, x_2.$$

```
» q0 = ((x-x1)*(x-x2))/((x0-x1)*(x0-x2));
» q1 = ((x-x0)*(x-x2))/((x1-x0)*(x1-x2));
» q2 = ((x-x0)*(x-x1))/((x2-x0)*(x2-x1));
» syms c0 c1 c2 real
» combLin = c0*q0+c1*q1+c2*q2;
» subs(combLin,x,x0)
ans =c0
» subs(combLin,x,x1)
ans =c1
» subs(combLin,x,x2)
ans =c2
```

ce qui montre que

$$(c_0 q_0 + c_1 q_1 + c_2 q_2 = 0) \Longrightarrow (c_0 = 0, c_1 = 0 \text{ et } c_2 = 0).$$

La famille $\{q_0, q_1, q_2\}$ est donc libre. L'espace étant de dimension 3, cette famille de trois éléments est une base (voir paragraphe 5.4.3.3.).

4) Il suffit de vérifier que

$$p = p(x_0)q_0 + p(x_1)q_1 + p(x_2)q_2,$$

en calculant la différence

```
» px0*q0+px1*q1+px2*q2-p;
» simplify(ans)
ans = 0
```

5) Les coefficients de $r(x) = 1 - 2x + 3x^2$ dans la base $\{q_0, q_1, q_2\}$ sont $r(x_0), r(x_1), r(x_2)$:

```
» r = 1-2*x+3*x^2;
» r0 = subs(r,x,0)
r0 =1
» r1 = subs(r,x,1)
r1 =2
» r2 = subs(r,x,2)
r2 =9
```

D'où $r = q_0 + 2q_1 + 9q_2$.

6) Cette fois-ci, $p = p(0)q_0 + p(1)q_1 + p(2)q_2 = 1q_0 + 2q_1 + 4q_2$

```
» Q0=subs(q0,{x0,x1,x2},{0,1,2});
» Q1=subs(q1,{x0,x1,x2},{0,1,2});
» Q2=subs(q2,{x0,x1,x2},{0,1,2});
» P=1*Q0+2*Q1+4*Q2;
» Pde3=subs(P,x,3)
Pde3 = 7
```

D'où $p(3) = 7$. On peut effectuer la vérification :

```
» expand(P)
ans = 1/2*x^2+1/2*x+1
» subs(P,x,0)
ans =1
» subs(P,x,1)
ans =2
» subs(P,x,2)
ans =4
» subs(P,x,3)
ans =7
```

Exercice 5.5.7

On a

$$\begin{aligned}
& Vect\,\{(1,-1,1),(-1,1,1),(2,-2,0)\} \\
= \; & Vect\,\{(1,-1,1),(-1,1,1)+(1,-1,1),(2,-2,0)-2(1,-1,1)\} \\
= \; & Vect\,\{(1,-1,1),(0,0,2),(0,0,-2)\} \\
= \; & Vect\,\{(1,-1,1),(0,0,1),(0,0,1)\} \\
= \; & Vect\,\{(1,-1,1),(0,0,1)\} \\
= \; & Vect\,\{(1,-1,0),(0,0,1)\}
\end{aligned}$$

Les vecteurs $(1,-1,0)$ et $(0,0,1)$ sont linéairement indépendants, donc $r=2$.

Exercice 5.5.8

On introduit les vecteurs $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3},\overrightarrow{u_4}$ de $\mathbb{R}^4$ et, par transposition, la matrice M de leurs coordonnées :

```
» u1=[1 ,0, -1, 2] ;u2=[0, 2, -1, 5] ;u3=[1,-4,1, -8] ;
» M =[u1' u2' u3']
M =
   1   0   1
   0   2  -4
  -1  -1   1
   2   5  -8
```

Pour rechercher l'ordre du plus grand déterminant non nul extrait de la matrice M, on calcule les quatre déterminants d'ordre 3 obtenus en supprimant l'une des lignes de la matrice M.

```
» M1 =[M(1, :) ; M(2, :) ; M(3, :)]   % lignes 1 à 3
M1 =
1  0  1
0  2  -4
-1 -1  1
» det(M1)
ans=0
» M2 =[M(1, :) ; M(2, :) ; M(4, :)] ;
» det(M2)
ans =0
» M3 =[M(1, :) ; M(3, :) ; M(4, :)] ;
» det(M3)
ans =0
» M4 =[M(2, :) ; M(3, :) ; M(4, :)] ;
» det(M4)
ans =0
```

On cherche alors un déterminant d'ordre 2 non nul :

```
» M5 =M(1 :2,1 :2)
M5 =
1 0
0 2
» det(M5)
ans =2.
```

Le rang du système est donc 2.

On pouvait directement utiliser la commande ***rank(M)*** ou utiliser les actions de Gauss par *rref(M) :*

```
» rank(M)
ans =2
» rref(M)
ans =
   1 0  1
   0 1 -2
   0 0 0
   0 0 0
```

Enfin, **colspace***(sym(M))* construit à partir de la matrice symbolique *sym(M)* une base du sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de cette matrice : il s'agit donc d'une base de $Vect\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}\right\}$

```
» colspace(sym(M))
ans =
[ 0,      1]
[ 1,      0]
[ -1/2, -1]
[ 5/2,    2]
```

Ainsi

$$Vect\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}\right\} = Vect\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right\},$$

avec

$$\overrightarrow{v_1} = (1, 0, -1, 2),\ \overrightarrow{v_2} = (0, 1, -1/2, 5/2).$$

Chapitre 6

Applications linéaires

6.1. Définitions et exemples

6.1.1. *Exemples introductifs*

6.1.1.1. *Applications linéaires de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$

On connaît les applications

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax, \end{array}$$

appelées fonctions linéaires.

De telles applications vérifient, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_1 + x_2) = a.(x_1 + x_2) \\ f(x_1) + f(x_2) = a.x_1 + a.x_2 \end{array} \right.$$

d'où

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Et aussi, pour tout $k \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(k.x) = a.(k.x) \\ k.f(x) = k.(a.x) \end{array} \right.$$

donc

$$f(k.x) = k.f(x).$$

6.1.1.2. *Intégrale d'une fonction*

On parle de linéarité de l'intégrale*,* ce qui signifie que l'intégrale de la somme de deux fonctions continues sur un intervalle $[a,\ b]$

$$\int_a^b (f+g)(t)dt$$

est égale à la somme des intégrales de ces fonctions

$$\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

et que l'intégrale du produit par le réel k d'une fonction f continue sur $[a,\ b]$

$$\int_a^b (k.f)(t)dt$$

est égale au produit par le réel k de cette intégrale

$$k\int_a^b f(t)dt.$$

6.1.1.3. *Dérivée d'une fonction*

De la même façon, les fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifient les propriétés :

$$\begin{cases} (f+g)' = f' + g' \\ (k.f)' = k.f' \end{cases}$$

6.1.1.4. *Propriétés communes*

Sur ces différents exemples, on a les deux propriétés remarquables :

i) l'image d'une somme est la somme des images,
ii) l'image d'un multiple est le multiple de l'image.

D'où les définitions générales suivantes.

6.1.2. *Définitions*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une application

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto f(u), \end{aligned}$$

est **linéaire** lorsqu'elle vérifie les deux propriétés :

$$\begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v), \\ f(\lambda u) = \lambda f(u), \end{cases}$$

pour tous vecteurs u, v de E et tout scalaire λ de $\mathbb{R}$

On peut en déduire que f est une application linéaire de E dans F si et seulement si

$$\begin{cases} \forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v). \end{cases}$$

Notations

L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $L(E, F)$.

Lorsque $E = F$, cet ensemble est noté $L(E)$.

Si $F = \mathbb{R}$, une application de $L(E, \mathbb{R})$ est appelée une **forme** linéaire.

6.1.3. *Exemples*

6.1.3.1. *Identité et homothéties*

Soit E un espace vectoriel quelconque. Alors :

1) L'application dite **identité**

$$\begin{aligned} id : E &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto u, \end{aligned}$$

est linéaire car

$$\begin{cases} id\,(u+v) = u + v \\ id\,(u) + id\,(v) = u + v \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} id\,(k.u) = k.u \\ k.id\,(u) = k.u. \end{cases}$$

2) Il en est de même des **homothéties** de rapport $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h_k : E &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto k.u. \end{aligned}$$

6.1.3.2. *Application de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}^2$

Considérons le cas où $E = F = \mathbb{R}^2$ (muni de sa base canonique), et f est l'application définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x + y, -x + 5y). \end{aligned}$$

On peut vérifier avec *Matlab* que cette application est linéaire : pour cela, on définit

$$X = (x, y) \text{ et } X_1 = (x_1, y_1),$$

puis on calcule la somme des images $f(X) + f(X_1)$.

```
» syms x y x1 y1 real
» X=[x,y];X1=[x1,y1];
» FdeX=[2*x+y,-x+5*y];
» FdeX1=subs(FdeX,X,X1)
FdeX1 =
[ 2*x1+y1, -x1+5*y1]
» sommeDesImages=simplify(FdeX+FdeX1)
sommeDesImages =
[ 2*x+y+2*x1+y1, -x+5*y-x1+5*y1]
```

On compare alors avec l'image de la somme $f(X + X_1)$.

```
» S=X+X1;
» imageDeLaSomme=subs(FdeX, X,S)
imageDeLaSomme =
[ 2*x+y+2*x1+y1, -x+5*y-x1+5*y1]
» simplify(imageDeLaSomme-sommeDesImages)
ans =[ 0, 0]
```

On compare de même $f(k.X)$ et $k.f(X)$:

```
» syms k real
» FdekX=subs(FdeX,X,k*X)
FdekX = [ 2*k*x+k*y, -k*x+5*k*y]
» kFDeX =k*FdeX
kFDeX =[ k*(2*x+y), k*(-x+5*y)]
» simplify(FdekX- kFDeX)
ans =[ 0, 0]
```

6.1.3.3. *Polynôme dérivé*

Soit l'application D, qui à tout polynôme p défini par :

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

associe le polynôme dérivé p' défini par :

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x.$$

En utilisant la base $\{1, x, x^2\}$ de $P_2[x]$, on peut représenter D par l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a_0, a_1, a_2) & \longmapsto & (a_1, 2a_2, 0)\,. \end{array}$$

Si q est un autre polynôme tel que

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2,$$

on a

$$\begin{array}{rl} & f\left((a_0, a_1, a_2) + (b_0, b_1, b_2)\right) \\ = & f\left(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2\right) \\ = & \left(a_1 + b_1, 2a_2 + 2b_2, 0\right) \\ = & f\left(a_0, a_1, a_2\right) + f\left(b_0, b_1, b_2\right). \end{array}$$

Cela traduit le fait que

$$(p+q)' = p' + q'.$$

De même, on vérifie que pour k réel quelconque,

$$\begin{array}{rl} & f\left(k.\left(a_0, a_1, a_2\right)\right) \\ = & f\left(ka_0, ka_1, ka_2\right) \\ = & \left(ka_1, 2ka_2, 0\right) \\ = & k.f\left(a_0, a_1, a_2\right), \end{array}$$

qui signifie

$$(k.p)' = k.p'.$$

6.1.3.4. *Contre-exemple*

L'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \left(x^2, y\right) \end{array}$$

n'est pas linéaire car, par exemple,

$$\begin{cases} f(2,1) + f(1,1) = (4,1) + (1,1) = (5,2) \\ f\left((2,1) + (1,1)\right) = f(3,2) = (9,2)\,. \end{cases}$$

6.2. Propriétés fondamentales

6.2.1. *Premières conséquences*

1) Pour toute application linéaire $f \in L(E,F)$, on a

$$f(0_E) = 0_F.$$

Cela découle du fait que pour tout $u \in E$

$$f(0_E) = f(u-u) = f(u) - f(u) = 0_F.$$

2) Si E, F et G sont trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et si

$$f : E \longrightarrow F, \quad g : F \longrightarrow G$$

sont linéaires, alors la composée

$$g \circ f : E \longrightarrow G$$

est linéaire.

3) Si E_1 est un sous-espace vectoriel de E, $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.

4) Si F_1 est un sous-espace vectoriel de F, l'image réciproque $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E. On rappelle que

$$f^{-1}(F_1) = \{u \in E : f(u) \in F_1\}.$$

Exemple

En reprenant l'exemple 6.1.3.3, on peut définir l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a_0, a_1, a_2) &\longmapsto (a_1, 2a_2, 0), \end{aligned}$$

on calcule $f^{-1}(F_1)$ où $F_1 = \{(c,0,0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

On cherche $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$f(a_0, a_1, a_2) = (a_1, 2a_2, 0) = (c, 0, 0).$$

$f^{-1}(F_1)$ est donc

$$f^{-1}(F_1) = \{(a_0, c, 0) : a_0,\ c \in \mathbb{R}\}.$$

On peut interpréter ce résultat : les polynômes dont la dérivée est une constante

$$c = c + 0x + 0x^2,$$

sont les polynômes de la forme

$$p(x) = a_0 + cx.$$

6.2.2. *Noyau et image d'une application linéaire*

6.2.2.1. *Définitions*

Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire.

(1) *On appelle noyau de f, noté* $\ker(f)$ *(du mot anglais kernel), le sous-ensemble particulier de E :*

$$\ker(f) = \{u \in E : f(u) = 0\}.$$

(2) *On appelle image de f, noté* $\mathrm{Im}(f)$, *le sous-ensemble particulier de F :*

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(u) \in F, u \in E\}.$$

Grâce aux propriétés citées précédemment, ces deux ensembles constituent deux sous-espaces vectoriels de E et F respectivement.

6.2.2.2. *Applications linéaires injectives et surjectives*

On rappelle qu'une application f est **injective** si et seulement si, pour deux vecteurs quelconques distincts u et v de E, les images correspondantes $f(u)$ et $f(v)$ sont distinctes. Cela équivaut à dire que l'équation

$$f(u) = f(v),$$

implique

$$u = v.$$

Lorsque f est linéaire, en posant $u - v = w$, on en déduit que :

f est injective si et seulement si

$$\ker(f) = \{0\}.$$

Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est **surjective** si et seulement si, tout vecteur de F est l'image d'au moins un vecteur de E. Cela est équivalent à

$$\mathrm{Im}(f) = F.$$

6.2.2.3. *Exemple 1*

Considérons l'application linéaire f définie précédemment :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x + y, -x + 5y). \end{aligned}$$

Pour étudier l'injectivité de cette application, on va déterminer son noyau $\ker(f)$. On a

$$f(x, y) = (0, 0)$$

si et seulement si

$$(2x + y, -x + 5y) = (0, 0)$$

ou bien

$$\begin{cases} 2x + y &= 0 \\ -x + 5y &= 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est 11 donc il admet l'unique solution $(x, y) = (0, 0)$. Ainsi $\ker(f) = \{0\}$, f est injective.

Etudions la surjectivité. Soit (α, β) un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$. Cherchons s'il existe au moins un vecteur (x, y) tel que

$$f(x, y) = (\alpha, \beta).$$

Cette dernière équation équivaut au système

$$\begin{cases} 2x + y &= \alpha \\ -x + 5y &= \beta \end{cases}$$

qui admet une unique solution puisque son déterminant est non nul. Ainsi

$$\mathrm{Im}(f) = F,$$

f est donc surjective.

6.2.2.4. *Exemple 2*

Par contre, sur l'exemple du paragraphe 6.2.1 , on a

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 : (a_1, 2a_2, 0) = (0, 0, 0)\right\} \\ &= \{(a_0, 0, 0) : a_0 \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \left\{f(a_0, a_1, a_2) : (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \{(a_1, 2a_2, 0) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ces calculs montrent que f n'est ni injective, ni surjective.

6.3. Applications linéaires en dimension finie

6.3.1. *Détermination par l'image d'une base*

On suppose que E et F sont de dimension finie. On note

$$\dim(E) = m, \quad \dim(F) = n.$$

On se donne une base de E

$$\{u_1, u_2, ..., u_m\}.$$

Nous savons que tout vecteur u de E s'écrit d'une manière unique

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m.$$

Si f est une application linéaire de E vers F, on a

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m) \\ &= f(\lambda_1 u_1) + f(\lambda_2 u_2) + \cdots + f(\lambda_m u_m) \\ &= \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \cdots + \lambda_m f(u_m), \end{aligned}$$

et donc dès qu'on connait l'image par f des vecteurs de la base

$$\{u_1, u_2, ..., u_m\},$$

on connait $f(u)$ pour tout u de E.

Exemple

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. On donne

$$\begin{cases} f(1,0) = 2, \\ f(0,1) = -3. \end{cases}$$

Alors pour tout vecteur $\overrightarrow{u} = (x, y)$, on a

$$f(\overrightarrow{u}) = f(x,y) = f(x(1,0) + y(0,1)) = 2x - 3y.$$

Propriétés du noyau et de l'image

Les calculs du paragraphe 6.3.1 montrent que tout vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\{f(u_1), f(u_2), ..., f(u_m)\}$ et réciproquement toute combinaison linéaire de ces vecteurs est élément de $\mathrm{Im}(f)$. Ainsi

$$\|\mathrm{Im}(f) = Vect(\{f(u_1), f(u_2), ..., f(u_m)\}).$$

On admet la propriété suivante, qui permet de connaître la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ connaissant celle de $\ker(f)$, ou vice-versa :

$$\|\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E).$$

6.3.2. *Matrice d'une application linéaire*

6.3.2.1. *Calcul dans un cas particulier*

Considérons le cas d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On utilise les bases canoniques de ces deux espaces, notées respectivement

$$\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}, \quad \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}.$$

On note aussi

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{u_1}) = a_1\overrightarrow{v_1} + b_1\overrightarrow{v_2} + c_1\overrightarrow{v_3}, \\ f(\overrightarrow{u_2}) = a_2\overrightarrow{v_1} + b_2\overrightarrow{v_2} + c_2\overrightarrow{v_3}. \end{cases}$$

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{u_1} + y\overrightarrow{u_2}$ de $\mathbb{R}^2$, on obtient par linéarité

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u}) &= f(x\overrightarrow{u_1} + y\overrightarrow{u_2}) \\ &= xf(\overrightarrow{u_1}) + yf(\overrightarrow{u_2}) \\ &= (a_1x + a_2y)\overrightarrow{v_1} + (b_1x + b_2y)\overrightarrow{v_2} + (c_1x + c_2y)\overrightarrow{v_3}. \end{aligned}$$

Si on note les composantes de $\overrightarrow{u'} = f(\overrightarrow{u})$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + a_2y \\ b_1x + b_2y \\ c_1x + c_2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice de type $(3, 2)$

$$M_f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix},$$

dont **les colonnes** sont les composantes de $f(\overrightarrow{u_1})$ et $f(\overrightarrow{u_2})$ sur la base donnée de $\mathbb{R}^3$, est appelée **la matrice de** f relativement aux deux bases canoniques.

L'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{u'} = f(\overrightarrow{u})$$

se traduit par l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_f . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ces calculs, cette définition et cette dernière égalité se généralisent.

6.3.2.2. *Cas général*

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie. Notons

$$\dim(E) = m, \ \dim(F) = n.$$

et désignons par

$$\{u_1, u_2, ..., u_m\}, \qquad \{v_1, v_2, ..., v_n\},$$

deux bases quelconques de E et F respectivement. Alors la matrice M_f de f par rapport à ces deux bases est la matrice de type (n, m) dont la $j^{ième}$ colonne est formée par les coordonnées de $f(u_j)$ sur la base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. On schématise cela par

$$\begin{array}{ccc} & f(u_j) & \\ M_f = & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \end{array}$$

Si on note

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

les composantes d'un vecteur u de E, et

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

celles de $u' = f(u)$, on a la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

6.3.2.3. *Exemple*

Pour déterminer la matrice, relativement aux bases canoniques, de l'application linéaire donnée au paragraphe 6.2.1, et définie par

$$f(a_0, a_1, a_2) = (a_1, 2a_2, 0),$$

on calcule

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0) & = & (0,0,0), \\ f(0,1,0) & = & (1,0,0), \\ f(0,0,1) & = & (0,2,0), \end{array}$$

d'où

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.3.2.4. *Matrice d'une composée*

Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont deux applications linéaires, où E, F, G sont trois e.v sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et de bases données, alors

$$M_{g \circ f} = M_g . M_f .$$

6.4. Applications linéaires et matrices diagonales

6.4.1. *Le problème posé*

6.4.1.1. *Calculs avec une matrice diagonale*

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même. On suppose que E est de dimension finie n, et que la matrice de f relativement à une base

$$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

On a donc pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$

$$f(e_i) = d_i . e_i .$$

On a dans ce cas des calculs simples pour obtenir, entre autres :

– l'image d'un vecteur quelconque :

$$f(x_1 e_1 + +x_2 e_2 + ... + x_n e_n) = x_1 d_1 e_1 + x_2 d_2 \overrightarrow{e_2} + ... + x_n d_n e_n,$$

– les composées successives :

$$f \circ f(e_i) = f(d_i.e_i) = d_i.f(e_i) = d_i^2.e_i,$$

donc $f \circ f$ a pour matrice

$$D^2 = \begin{pmatrix} (d_1)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (d_2)^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (d_n)^2 \end{pmatrix},$$

et plus généralement

$$f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$$

a pour matrice

$$D^n = \begin{pmatrix} (d_1)^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (d_2)^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (d_n)^n \end{pmatrix}.$$

6.4.1.2. *Notion de diagonalisation*

Soit maintenant f une application linéaire quelconque d'un espace vectoriel E de dimension finie n dans lui-même. Compte tenu des calculs précédents, il est intéressant de chercher une base

$$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

de E telle que

$$\begin{cases} f(v_1) = d_1.v_1 \\ f(v_2) = d_2.v_2 \\ \cdots \\ f(v_n) = d_n.\overrightarrow{v_n}. \end{cases}$$

Lorsqu'on obtient une telle base, on dit qu'on a diagonalisé l'application linéaire f. Dans les paragraphes suivants, on traite ce problème sur un exemple, et on présente les fonctions de *Matlab* qui permettent de le résoudre.

6.4.2. *Exemple de diagonalisation*

On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} f\,:\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (3x-y+z, 2y, x-y+3z)\,. \end{aligned}$$

On calcule

$$\left\{\begin{array}{l} f(1,0,0) = (3,0,1) \\ f(0,1,0) = (-1,2,-1) \\ f(0,0,1) = (1,0,3), \end{array}\right.$$

et on en déduit la matrice M_f de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

```
» Mf=[3 -1 1 ;0 2 0 ; 1 -1 3]
Mf =
   3 -1 1
   0  2 0
   1 -1 3
```

On cherche alors les vecteurs $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ non nuls tels que

$$f(\overrightarrow{v}) = k.\overrightarrow{v}\,.$$

Matriciellemnt, on résout

$$M_f.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

ou encore

$$(M_f - k.I_3)\,.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

C'est l'écriture matricielle d'un système homogène, qui admet des solutions autres que la solution nulle, si, et seulement si

$$\det\,(M_f - k.I_3) = 0.$$

On calcule ce déterminant avec *Matlab* :

```
» syms k real
» MatDiff=Mf-k*eye(3)
MatDiff =
   [ 3-k, -1, 1]
   [ 0, 2-k, 0]
   [ 1, -1, 3-k]
» d=det(MatDiff)
d = 16-20*k+8*k^2-k^3
```

on obtient un polynôme appelé polynôme caractéristique de f. Puis on résout l'équation donnant les valeurs de k pour lesquelles ce polynôme est nul.

```
» S=solve(d)
S =
   [ 4]
   [ 2]
   [ 2]
```

La racine simple 4 et la racine double 2 obtenues s'appellent les valeurs propres de f.

Pour la première solution obtenue $d_1 = 4$, on cherche les vecteurs $\overrightarrow{v}$ tels que

$$f(\overrightarrow{v}) = d_1.\overrightarrow{v}.$$

```
» syms x y z real
» d1=4 ;
» V=[x ;y ;z] ;
» diff=Mf*V-d1*V
diff =
   [ -x-y+z]
   [ -2*y]
   [ x-y-z]
» S1=solve(' -x-y+z=0', ' -2*y=0', 'x-y-z=0') ;
» [S1.x ;S1.y ;S1.z]
ans =
   [ z]
   [ 0]
   [ z]
```

L'ensemble des solutions est $\{\overrightarrow{v} = z(1,0,1), z \in \mathbb{R}\}$.

On effectue les mêmes calculs avec $d_2 = 2$.

```
» d2=2 ;
» diff2=Mf*V-d2*V
diff2 =
   [ x-y+z]
   [ 0]
   [ x-y+z]
» S2=solve(' x-y+z=0','0=0',' x-y+z=0') ;
» [S2.x ;S2.y ;S2.z]
ans =
   [ y-z]
   [ y]
   [ z]
```

On obtient l'ensemble $\{\overrightarrow{v} = y(1,1,0) + z(-1,0,1),\ y, z \in \mathbb{R}\}$.

On a ainsi obtenu trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = (1,0,1) \\ \overrightarrow{v_2} = (1,1,0) \\ \overrightarrow{v_3} = (-1,0,1), \end{cases}$$

tels que

$$\begin{cases} f\left(\overrightarrow{v_1}\right) = 4.\overrightarrow{v_1} \\ f\left(\overrightarrow{v_2}\right) = 2.\overrightarrow{v_2} \\ f\left(\overrightarrow{v_3}\right) = 2.\overrightarrow{v_3}. \end{cases}$$

On peut le vérifier

```
» v1=[1 ;0 ;1] ;
» Mf*v1
ans =
   4
   0
   4
» v2=[1 ;1 ;0] ;v3=[-1 ;0 ;1] ;
» Mf*v2
ans =
   2
   2
   0
» Mf*v3
ans =
   -2
   0
   2
```

On vérifie aussi que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$, en calculant le déterminant de la matrice V formée par les coordonnées de ces trois vecteurs.

```
» V=[v1 v2 v3]
V =
   1 1 -1
   0 1 0
   1 0 1
» det(V)
ans =
2
```

Relativement à la base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, f a pour matrice

```
» D=diag([4 2 2])
D =
   4 0 0
   0 2 0
   0 0 2
```

6.4.3. *Utilisation de la matrice diagonale* D

En reprenant les notations précédentes, $M_f.V$ représente la matrice des coordonnées de $f(\overrightarrow{v_1})$, $f(\overrightarrow{v_2})$ et $f(\overrightarrow{v_3})$. Mais cette matrice s'obtient aussi en multipliant V par la matrice diagonale D.

Ainsi

$$M_f.V = V.D,$$

ce qu'on peut vérifier dans notre exemple

```
» Mf*V
ans =
   4 2 -2
   0 2  0
   4 0  2
» V*D
ans =
   4 2 -2
   0 2  0
   4 0  2
```

Il en résulte que

$$M_f = V.D.V^{-1},$$

puis, par récurrence

$$(M_f)^n = V.D^n.V^{-1}.$$

Vérifions ce dernier résultat dans le cas $n = 10$:

```
» D10=D^10
D10 =
   1048576 0       0
   0       1024    0
   0       0       1024
» V*D10*V^(-1)
ans =
   524800 -523776 523776
   0       1024 0
   523776 -523776 524800
» Mf^10
ans =
   524800 -523776 523776
   0       1024    0
   523776 -523776 524800
```

On compare les temps d'exécution entre un calcul direct de $(M_f)^n$ par multiplications successives, et celui utilisant la matrice diagonale D. Le calcul symbolique, plus lent, fait mieux apparaître la différence entre les deux méthodes.

```
» Mf=sym(Mf) ;
» V=sym(V) ;
» D=sym(D) ;
```

On calcule D^n, pour $n = 500$: on procède par multiplications successives, en ne calculant que les trois éléments diagonaux.

```
» n=500 ;
» tic
» Dn=D ;
» for i=2 :n
   for j=1 :3
      Dn(j,j)=Dn(j,j)*D(j,j) ;
   end
end
» res1=V*Dn*V^(-1) ;
» toc
elapsed-time= 6.1500
```

Puis on calcule $(M_f)^n$:

```
» tic
» Mfn=Mf;
» for i=2 :n
   Mfn=Mfn*Mf;
end
» toc
elapsed-time=13.9500
```

Le temps de calcul est plus que le double.

6.4.4. *Les fonctions prédéfinies de Matlab*

La fonction **eig** permet d'obtenir directement la matrice diagonale D et la matrice V de la famille de vecteurs $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$

```
» [V,D]=eig(sym(Mf))
V =
   [ -1, 1, 1]
   [  0, 1, 0]
   [  1, 0, 1]
D =
   [ 2, 0, 0]
   [ 0, 2, 0]
   [ 0, 0, 4]
```

(les valeurs propres 2 et 4 ont été ici interverties, mais les vecteurs colonnes de V sont donnés dans l'ordre des valeurs propres de D).

6.4.4.1. *Remarque*

Le problème de la diagonalisation d'une application linéaire f n'admet pas toujours de solution.

```
» M=[0 -1 1 ;1 2 -1 ; -2 -1 3]
M =
    0 -1  1
    1  2 -1
   -2 -1  3
» [V D]=eig(sym(M))
V =
   [ 1, -1]
   [ 0,  1]
   [ 1, -1]
D =
   [ 1, 0, 0]
   [ 0, 2, 0]
   [ 0, 0, 2]
```

Ici, on n'a pas pu trouver de base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ pour laquelle

$$f(\overrightarrow{v_i}) = d_i.\overrightarrow{v_i},$$

mais seulement deux vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1,0,1)$, et $\overrightarrow{v_2} = (-1,1,-1)$ tels que

$$\begin{cases} f\left(\overrightarrow{v_1}\right) = \overrightarrow{v_1} \\ f\left(\overrightarrow{v_2}\right) = 2.\overrightarrow{v_2}. \end{cases}$$

On ne doit pas tenir compte dans ce cas de la matrice D donnée (malheureusement) par *Matlab*.

6.5. Exercices

6.5.1. *Noyau et image d'une application linéaire*

On considère l'application f :

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+z, x+2y-z, x+z) \end{array}$$

1) Vérifier la linéarité de f et donner sa matrice relativement à la base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

2) Déterminer $f \circ f$.

3) Utiliser la fonction **null** pour trouver une base du noyau de f. Vérifier que les vecteurs du sous-espace ainsi obtenu ont bien pour image le vecteur nul.

4) Utiliser la fonction **colspace** pour déterminer une base $\mathcal{B}$ de

$$\mathrm{Im}(f) = Vect\left\{f(\overrightarrow{i}),\ f(\overrightarrow{j}),\ f(\overrightarrow{k})\right\}.$$

Vérifier là aussi que tout vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

(solution p 183)

6.5.2. *Une application linéaire avec paramètre*

Soit

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x,y,z)-(x+y+z).u_0 \end{array}$$

où

$$u_0 = (x_0, y_0, z_0),$$

est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que g est linéaire.

2) Donner sa matrice relativement à la base canonique.

3) Calculer la composée $g \circ g$ en supposant dans cette question

$$x_0 + y_0 + z_0 = 1.$$

4) Déterminer le noyau et l'image de g et donner leur dimension respective.

(solution p. 186)

6.6. Solutions

Exercice 6.5.1

1) On vérifie la linéarité de f, en comparant, pour deux vecteurs quelconques U et V de $\mathbb{R}^3$:
$f(U) + f(V)$ et $f(U + V)$. On a

```
» syms x y z x1 y1 z1 real
» U=[x,y,z];V=[x1,y1,z1];
» FdeU=[x+z,x+2*y-z,x+z];
» FdeV=subs(FdeU,U,V)
FdeV = [ x1+z1, x1+2*y1-z1, x1+z1]
» sommeDesImages=simplify(FdeU+FdeV)
sommeDesImages = [ x+z+x1+z1, x+2*y-z+x1+2*y1-z1, x+z+x1+z1]
```

et

```
» S=U+V ;
» imageDeLaSomme=subs(FdeU,U,S)
imageDeLaSomme = [ x+z+x1+z1, x+2*y-z+x1+2*y1-z1, x+z+x1+z1]
» simplify(imageDeLaSomme-sommeDesImages)
ans = [ 0, 0, 0]
```

On vérifie de même la propriété

$$f(k.\overrightarrow{v}) = k.f(\overrightarrow{v}).$$

Pour obtenir la matrice de f, on définit les vecteurs I, J, K de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on construit, grâce à la transposition, la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $f(I)$, $f(J)$, $f(K)$

```
» I=sym([1,0,0]) ; J=sym([0,1,0]) ; K=sym([0,0,1]) ;
» FdeI=subs(FdeU,U,I)
FdeI = [ 1, 1, 1]
» FdeJ=subs(FdeU,U,J)
FdeJ = [ 0, 2, 0]
» FdeK=subs(FdeU,U,K)
FdeK = [ 1, -1, 1]
```

```
» MatriceDeF=[FdeI' FdeJ' FdeK']
MatriceDeF =
   [ 1, 0, 1]
   [ 1, 2, -1]
   [ 1, 0, 1]
```

2) On utilise la propriété

$$M_{f \circ f} = M_f.M_f,$$

puis on utilise cette matrice pour calculer la matrice des coordonnées de $(f \circ f)(U)$.

```
» MatriceDeFrondF=MatriceDeF^2
MatriceDeFrondF =
   [ 2, 0, 2]
   [ 2, 4, -2]
   [ 2, 0, 2]
» FrondFdeU=MatriceDeFrondF*U'
FrondFdeU =
   [ 2*x+2*z]
   [ 2*x+4*y-2*z]
   [ 2*x+2*z]
```

3) On applique la fonction *null* à la matrice de f qui donne une base du noyau de f :

```
» baseKerF=null(MatriceDeF)
baseKerF =
   [ -1]
   [ 1]
   [ 1]
```

D'où

$$\ker(f) = Vect\{(-1,1,1)\}$$

A titre de vérification, on calcule l'image par f d'un vecteur quelconque de $Vect\{(-1,1,1)\}$.

```
» syms k real
» W=k*[-1,1,1];
» fDeW=subs(FdeU,U,W)
fDeW =
[ 0, 0, 0]
```

4) Pour $\mathrm{Im}(f)$, on applique la fonction *colspace* à la matrice de f :

```
» baseImF=colspace(MatriceDeF)
baseImF =
   [ 1, 0]
   [ 0, 1]
   [ 1, 0]
```

D'où

$$\mathrm{Im}(f) = Vect\{(1,0,1),(0,1,0)\}.$$

Pour vérifier que tout vecteur $f(U)$ est combinaison linéaire des deux vecteurs obtenus, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} f(U) &= (x+z, x+2y-z, x+z) \\ &= (x+z).(1,0,1)+(x+2y-z).(0,1,0), \end{aligned}$$

Exercice 6.5.2

On déclare l'application, en définissant les vecteurs U, U_0 de $\mathbb{R}^3$ par leurs matrices colonnes :

```
» syms x y z x0 y0 z0
» U0=[x0 ;y0 ;z0 ];
» U=[x ;y ; z];
» gDeU=U-(x+y+z)*U0
gDeU=
   [x-(x+y+z)*x0]
   [y-(x+y+z)*y0]
   [z-(x+y+z)*z0]
```

1) On vérifie la linéarité :

```
» % On calcule g(U1) et g(U+U1)
» syms x1 y1 z1 ; U1=[x1 ;y1 ;z1] ;
» gDeU1=subs(gDeU,U,U1)
gDeU1=
[x1-(x1+y1+z1)*x0]
[y1-(x1+y1+z1)*y0]
[z1-(x1+y1+z1)*z0]
» gDeUPlusU1=subs(gDeU,U,U+U1)
gDeUPlusU1=
[x+x1-(x+x1+y+y1+z+z1)*x0]
[y+y1-(x+x1+y+y1+z+z1)*y0]
[z+z1-(x+x1+y+y1+z+z1)*z0]
» % on vérifie que g(U+U1)=g(U)+g(U1)
»simplify(gDeUPlusU1 -gDeU-gDeU1)
ans =
   [0]
   [0]
   [0]
```

On ferait de même pour vérifier que

$$g(k.U) = k.g(U).$$

2) On calcule la matrice de l'application g, colonne par colonne :

```
» M( :,1)=subs(gDeU,U,[1 ;0 ;0]) ;
» M( :,2)=subs(gDeU,U,[0 ;1 ;0]) ;
» M( :,3)=subs(gDeU,U,[0 ;0 ;1]) ;
M =
   [1-x0, -x0, -x0]
   [-y0, 1-y0, -y0]
   [-z0, -z0, 1-z0]
```

D'où

$$M = \begin{pmatrix} 1-x_0 & -x_0 & -x_0 \\ -y_0 & 1-y_0 & -y_0 \\ -z_0 & -z_0 & 1-z_0 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $g(U)$ a pour matrice de coordonnées $M.U$

```
» simplify(M*U-gDeU)
ans=
   [0]
   [0]
   [0]
```

3) Avant de calculer la matrice M^2 de $g \circ g$, on tient compte de la relation

$$x_0 + y_0 + z_0 = 1,$$

```
»M=subs(M,z0, 1-x0-y0)
M=
[1-x0, -x0, -x0]
[-y0,  1-y0, -y0]
[-1+x0+y0, -1+x0+y0, x0+y0]
»M2=simplify(M*M)
M2=
[1-x0, -x0, -x0]
[y0,  1-y0, -y0]
[-1+x0+y0, -1+x0+y0, x0+y0]
```

Puisque $M^2 = M$, on a donc

$$g \circ g = g.$$

Une récurrence montre qu'alors

$$g^n = g.$$

4) On utilise *null* pour déterminer une base de $\ker(g)$ (voir solution de l'exercice 6.5.1, p. 183).

```
» BaseKerg=null(M)
BaseKerg=
   [          1]
   [     y0/x0]
   [-(-1+x0+y0)/x0]
```

Le noyau est donc le sous-espace vectoriel engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_0/x_0 \\ (1-x_0-y_0)/x_0 \end{pmatrix}.$$

On peut retrouver ce résultat en résolvant le système obtenu à partir de l'équation $g(U) = O_{\mathbb{R}^3}$.

```
» g=subs(gDeU,z0,1-x0-y0);
» S=solve(g(1),g(2),g(3),x,y,z);
»[S.x ; S.y ;S.z]
ans=
   [ y*x0/y0]
   [ y]
   [ -y*(-1+x0+y0)/y0]
```

Les solutions obtenues sont de la forme

$$(yx_0/y_0). \begin{pmatrix} 1 \\ y_0/x_0 \\ (1-x_0-y_0)/x_0 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver une base de l'image de g, on utilise la fonction *colspace(M) :*

```
» colspace(M)
ans =
   [  1,  0]
   [  0,  1]
   [ -1, -1]
```

Ainsi

$$\mathrm{Im}(g) = Vect\left\{(1,0,-1),(0,1,-1)\right\}.$$

Troisième partie

Géométrie

Chapitre 7

Calcul vectoriel et géométrie

Le but du premier paragraphe est de rappeler brièvement comment ont été définis au lycée vecteurs géométriques et opérations sur ces vecteurs. Il permet de faire le lien avec la structure d'espace vectoriel et les notions qui lui sont attachées (combinaisons linéaires, bases, dimensions).

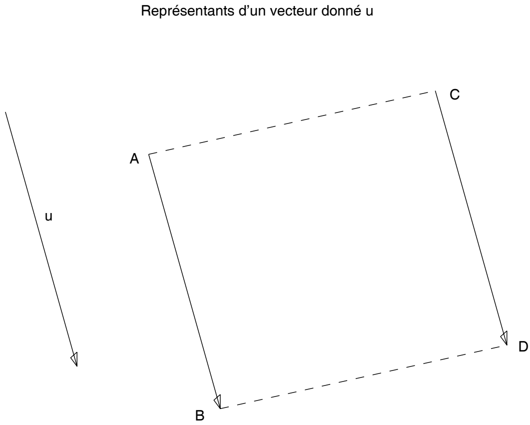
Dans les paragraphes suivants, on utilise le calcul sur les coordonnées pour représenter des figures du plan ou de l'espace, et étudier leurs propriétés.

Enfin, on consacre un paragraphe aux changements de base et de repère. Les formules obtenues ont un intérêt pratique, notamment en infographie, lorsque des calculs sont plus simples à faire dans un autre repère que celui donné à l'origine (projection sur un plan oblique, rotation autour d'un axe oblique, etc...).

7.1. Rappels : vecteurs géométriques du plan ou de l'espace

7.1.1. *Vecteur associé à un couple de points*

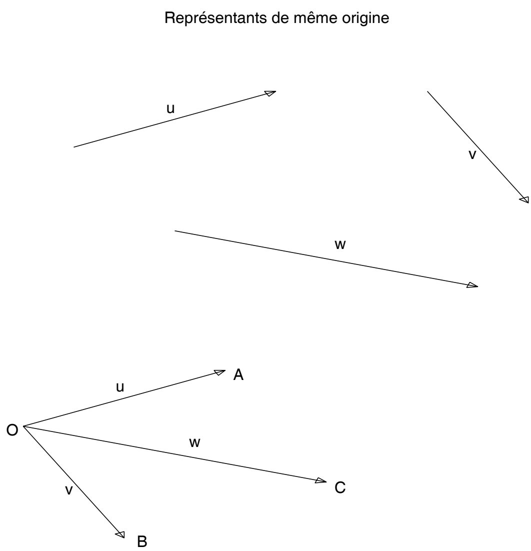
A tout couple de points (A, B) du plan ou de l'espace, on peut associer un vecteur géométrique $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Géométriquement, pour que (A, B) et (C, D) représentent le même vecteur $\overrightarrow{u}$, il faut et il suffit que $ABDC$ soit un parallélogramme. Il existe donc une infinité de couples de points (A, B), (C, D), ..., représentant un même vecteur $\overrightarrow{u}$.



Par contre, si on fixe un point O dans le plan ou dans l'espace, alors, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point M tel que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}.$$

Lorsqu'on veut étudier ou représenter les vecteurs géométriques, on convient généralement de se fixer un point O et de considérer pour chaque vecteur son unique représentant d'origine O.



7.1.2. *Opérations sur les vecteurs géométriques*

7.1.2.1. *Addition*

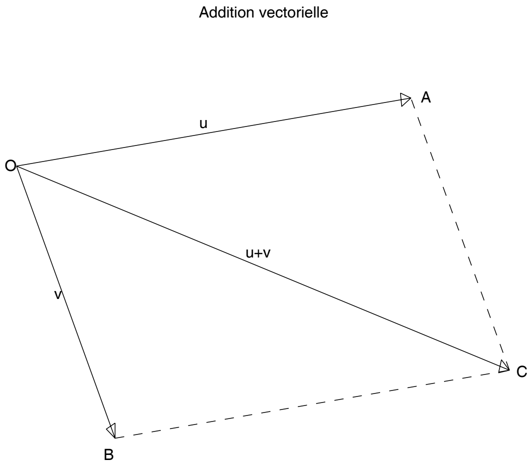
Soient deux vecteurs

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}.$$

Le vecteur somme de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OC},$$

tel que $OACB$ soit un parallélogramme.



On peut vérifier qu'on a :

1) la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} ;$$

2) la commutativité, l'associativité ;

3) l'existence d'un élément neutre, le vecteur nul

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = ...$$

qui vérifie donc pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$:

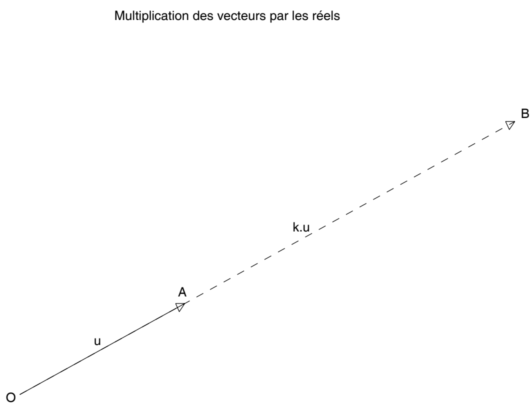
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} ;$$

4) pour tout vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, l'existence d'un symétrique $\overrightarrow{BA}$ noté $-\overrightarrow{u}$, tel que

$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}.$$

7.1.2.2. *Multiplication d'un vecteur par un réel*

A tout couple $(k, \overrightarrow{u})$ formé d'un réel et d'un vecteur, on associe le vecteur $k.\overrightarrow{u}$.



Cette multiplication vérifie : quels que soient les réels k, k', et quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, on a

$$\begin{array}{l} k.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k.\overrightarrow{u} + k.\overrightarrow{v}, \\ (k + k').\overrightarrow{u} = k.\overrightarrow{u} + k'.\overrightarrow{u}, \\ k.(k'.\overrightarrow{u}) = (kk').\overrightarrow{u}, \\ 1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}. \end{array}$$

7.1.3. *Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires*

D'après ce qui précède, l'ensemble $\mathcal{V}_2$ des vecteurs du plan (ou l'ensemble $\mathcal{V}_3$ des vecteurs de l'espace), muni de l'addition et de la multiplication par les réels est un espace vectoriel. On peut lui appliquer les règles de calcul vues au chapitre correspondant. En particulier :

– On appelle vecteurs **colinéaires** deux vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ formant une famille liée. Cela signifie que l'un des vecteurs est combinaison linéaire de l'autre, par exemple

$$\overrightarrow{v} = k.\overrightarrow{u}.$$

Géométriquement, les points O, A, B sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires.

– On appelle vecteurs **coplanaires** trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ de l'espace formant une famille liée. Cela signifie que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des deux autres, par exemple

$$\overrightarrow{w} = k.\overrightarrow{u} + k'.\overrightarrow{v}.$$

Géométriquement les points O, A, B et C appartiennent à un même plan si et seulement si, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont coplanaires.

7.2. Calculs avec les coordonnées cartésiennes dans le plan

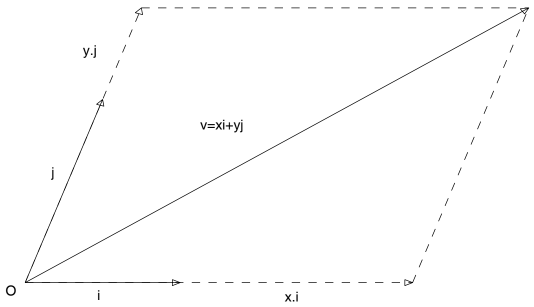
7.2.1. *Bases et coordonnées d'un vecteur*

7.2.1.1. *Bases*

L'ensemble des vecteurs du plan, noté $\mathcal{V}_2$, est un espace vectoriel de dimension 2. Tout couple $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ de vecteurs non colinéaires en constitue une base. Tout vecteur $\overrightarrow{v}$ du plan se décompose alors de manière unique sous forme

$$\overrightarrow{v} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j}.$$

Décomposition d'un vecteur du plan selon la base (i,j)



On note

$$\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

7.2.1.2. *Calculs avec les coordonnées des vecteurs*

Fixons une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soient les vecteurs

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

alors leur somme est

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix},$$

et le produit de $\overrightarrow{u}$ par un réel k est

$$k.\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}.$$

7.2.2. *Repères et coordonnées d'un point*

7.2.2.1. *Repères*

Tout triplet $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, où O est un point du plan et $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une base, constitue un repère du plan. Pour tout point M du plan, l'unique couple (x, y) tel que

$$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j},$$

s'appelle couple de coordonnées du point M dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On emploie là aussi la notation

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

7.2.2.2. *Calculs avec les coordonnées d'un point*

Le plan étant muni d'un repère, soient les points

$$A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} x_B \\ yB \end{pmatrix},$$

alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donné par

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix},$$

et le milieu I du segment $[AB]$ est

$$I \begin{pmatrix} (x_A + x_B)/2 \\ (y_A + y_B)/2 \end{pmatrix}.$$

7.2.3. *Exemples d'utilisation*

Les propriétés précédentes de calcul sur les coordonnées de vecteurs et de points permettent d'effectuer avec *Matlab*, les calculs matriciels analogues.

Exemple

On donne dans le plan muni d'un repère les points

$$A\begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix},\ C\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix},\ D\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1) Vérifions que $ABCD$ est un parallélogramme :

par abus de notation, on définit chaque point par sa matrice colonne et on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

```
» A=[6 ;13]
A =
     6
    13
» B=[11 ;5] ;C=[7 ;-6] ;D=[2 ;2] ;
» AB=B-A
AB =
     5
    −8
» DC=C-D
DC=
     5
    −8
```

On a ainsi vérifié que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

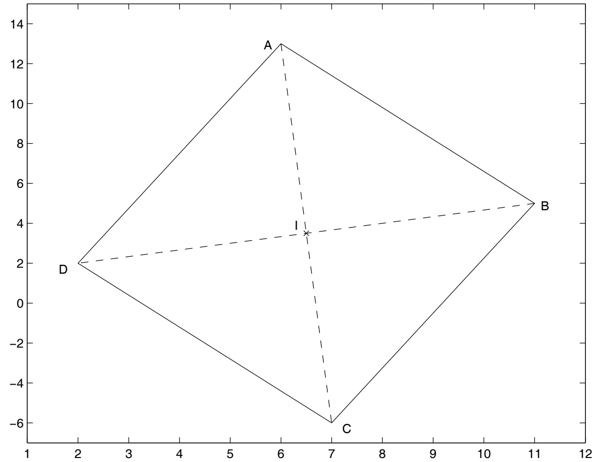
2) On calcule ensuite les coordonnées de son centre, qui est le milieu de $[AC]$ (et de $[BD]$).

```
» I=1/2*(A+C)
I=
  6.5000
  3.5000
» % Vérification :
» 1/2*(B+D)
ans =
  6.5000
  3.5000
```

3) Dessinons le parallélogramme, ses diagonales et son centre, en utilisant la commande *plot*(X, Y, s), où X, Y représentent les coordonnées d'un point, de deux points

(pour tracer un segment) ou de n points (pour tracer une ligne polygonale) :

```
» %Dessin du point I, marqué d'une croix :
» plot(I(1),I(2),'x')
» hold on
» % Dessin des diagonales, en pointillé
» plot([A(1) C(1)],[A(2) C(2)],'k–')
» plot([B(1) D(1)],[B(2) D(2)],'k–')
» % Dessin de la ligne polygonale ABCD :
» P=[A B C D A] ;
» plot(P(1, :),P(2, :),'k')
» % Pour fixer le cadre
» axis([1 12 -7 15])
» % Pour placer à l'aide de la souris le nom des points :
» gtext('A') ;gtext('B') ;gtext('C') ;
» gtext('D') ;gtext('I') ;
```



7.2.4. *Equations d'une droite du plan*

Etant donné un point A et un vecteur non nul $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, la droite D passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (non nul) est définie vectoriellement par

$$D = \left\{ M : \overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{u},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dans un repère donné, A et $\overrightarrow{u}$ peuvent être définis par leurs coordonnées :

$$A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, \overrightarrow{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

En exprimant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

appartienne à la droite D, on peut obtenir :

– une équation cartésienne de D,

un point M appartient à D si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, soit :

$$det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a \\ y - y_A & b \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$(x - x_A)\, b - (y - y_A)\, a = 0,$$

qui s'écrit sous la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

– un système d'équations paramétriques de D,

un point M appartient à D si, et seulement si il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{u},$$

ce qui équivaut à

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = t. \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

ou encore à

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb. \end{cases}$$

Un tel système d'équations paramétriques permet de générer point par point la droite.

Exemple

On considère la droite (AB), avec

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 30 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite (AB) est

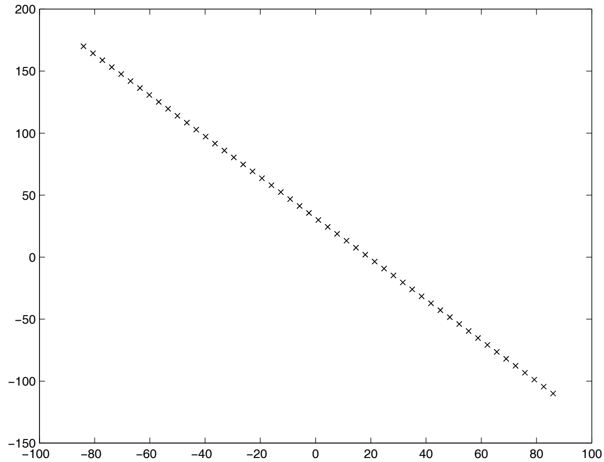
$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 18 - 1 \\ 2 - 30 \end{pmatrix}.$$

Un système d'équations paramétriques de la droite (AB) est donc

$$\begin{cases} x = 1 + 17t \\ y = 30 - 28t. \end{cases}$$

On obtient un dessin point par point de cette droite en faisant varier t de -5 à 5, avec un pas de 0.2 :

```
» T=-5 :0.2 :5 ;
» X=1+17*T ;
» Y=30-28*T ;
» hold on
» plot(X,Y,'x')
```



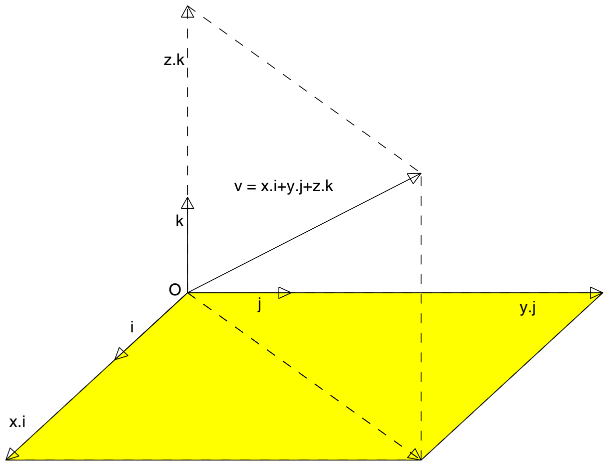
7.3. Coordonnées cartésiennes dans l'espace

7.3.1. *Bases et repères de l'espace*

7.3.1.1. *Bases*

L'ensemble $\mathcal{V}_3$ des vecteurs de l'espace est un espace vectoriel de dimension 3. Donc une base de cet espace est constituée d'un triplet $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de vecteurs non coplanaires. Tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de l'espace s'écrit de manière unique sous forme

$$\overrightarrow{v} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}.$$



On note

$$\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

7.3.1.2. *Repères*

Tout quadruplet $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, où O est un point de l'espace et $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base, constitue un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, l'unique triplet (x, y, z) tel que

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k},$$

s'appelle triplet de coordonnées du point M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On emploie là aussi la notation

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

7.3.2. *Calculs avec les coordonnées*

Beaucoup de calculs sont analogues à ceux du plan.

– Soient les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix},$$

alors leur somme est

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix},$$

et le produit de $\overrightarrow{u}$ par un réel t est

$$t.\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}.$$

– Soient les points

$$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix},$$

alors

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix},$$

et le milieu I du segment $[AB]$ est

$$I\begin{pmatrix} (x_A+x_B)/2 \\ (y_A+y_B)/2 \\ (z_A+z_B)/2 \end{pmatrix}.$$

7.3.3. *Exemples d'utilisation*

7.3.3.1. *Exemple*

Dessinons le tétraèdre $(ABCD)$, avec

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},\ D\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

On définit les points A, B, C, D et la suite $[ABCDBCAD]$ qui permet de parcourir toutes les arêtes. Pour les dessiner, on utilise la commande **plot3** (analogue à la commande *plot* de dessin dans le plan).

```
» A=[3 ;0 ;0] ; B=[0 ;2 ;0] ;C=[0 ;0 ;5] ;D =[6 ;4 ;12] ;
» T=[A B C D B C A D] ;
» plot3(T(1, :),T(2, :),T(3, :),'k') ;hold on
```

On note I, J, K et L les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$, $[DB]$ et $[DC]$ et on vérifie que $IJKL$ est un parallélogramme.

```
» I=1/2*(A+B) ; J=1/2*(A+C) ;K=1/2*(D+B) ;L=1/2*(D+C) ;
» v1=J-I
 v1 =          0
         -1.0000
          2.5000
» v2=L-K
 v2 =          0
         -1.0000
          2.5000
» v1-v2
 ans =  0
        0
        0
```

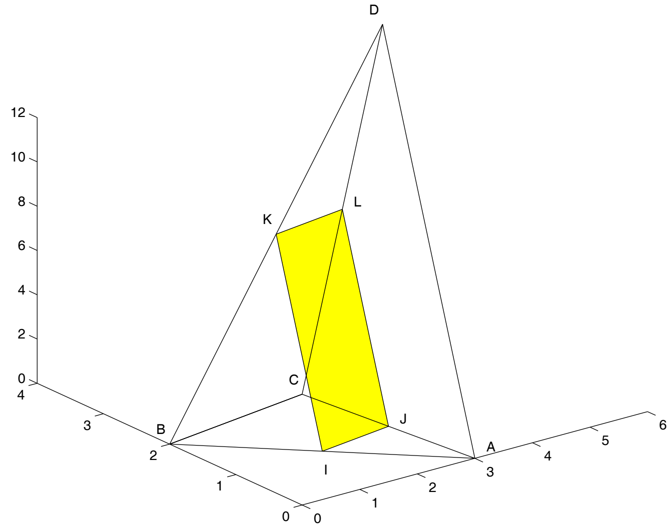
Pour visualiser la figure $IJKL$, on utilise la commande **fill3** qui colorie l'intérieur de ce quadrilatère.

```
» F = [I J L K] ; fill3(F(1, :),F(2, :),F(3, :),'y')
```

Pour marquer le nom des points, on utilise la commande **text,** mais il faut indiquer en paramètres la position où doit être placé ce nom.

```
» h=0.2 ; text(B(1),B(2)+h,B(3)+2*h,'B')
```

Ici, on a choisi un écart de $h = 0,2$, et on a placé la lettre 'B' en ajoutant h et $2h$ aux deuxième et troisième coordonnées de B. Il faut procéder par essais visuels. On effectue ensuite le même traitement pour les autres points.



7.3.4. *Equations de droites et de plans dans l'espace*

7.3.4.1. *Système d'équations paramétriques d'une droite*

On considère une droite D définie par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$:

$$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix},\ \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On obtient un système d'équations paramétriques de D en écrivant qu'un point

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

appartient à D si, et seulement si, il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{u},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc. \end{cases}$$

7.3.4.2. *Système d'équations paramétriques d'un plan*

De la même façon, étant donné un point A et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on définit le plan P passant par A et de vecteurs directeurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ par :

$$P = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \left\{M : \overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{u} + s.\overrightarrow{v},\ t, s \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si on note :

$$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix},\ \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix},$$

on obtient un système d'équations paramétriques de P en écrivant qu'un point

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

appartient à P si, et seulement si

$$\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{u} + s.\overrightarrow{v},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + s.\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{cases} x = x_A + ta + sa' \\ y = y_A + tb + sb' \\ z = z_A + tc + sc'. \end{cases}$$

Un tel système d'équations paramétriques permet de représenter graphiquement avec *Matlab* des plans de l'espace.

7.3.4.3. *Exemple*

On donne le plan passant par

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix},\ C\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Il a donc pour vecteurs directeurs

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et on obtient le système paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + 2t + 5s \\ y = -1 - t - 4s \\ z = 3 + 2t + 2s. \end{cases}$$

Pour le dessiner, on fait varier t et s dans des intervalles donnés

$$[0,\ 2] \text{ et } [0,\ 3]$$

et la fonction **meshgrid(t,s)** va créer un quadrillage de valeurs

$$(t, s) \in [0,\ 2] \times [0,\ 3]\,.$$

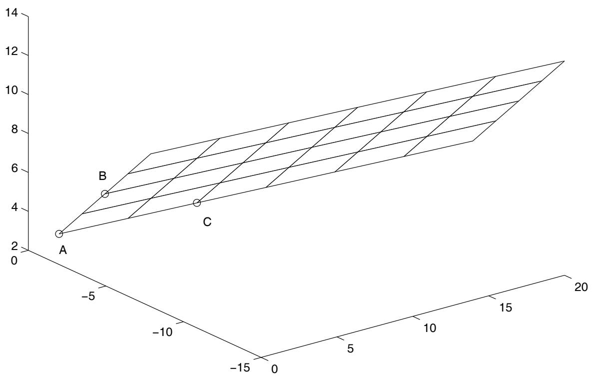
```
» t=0 :0.5 :2 ;s=0 :0.5 :3 ;
» [T,S]=meshgrid(t,s) ;
```

A partir de ce quadrillage de valeurs, on calcule les valeurs correspondantes de x, y et z, et on utilise la fonction **mesh** pour dessiner le quadrillage de points obtenus.

```
» X=1+2*T+5*S;
» Y=-1-T-4*S;
» Z=3+2*T+2*S;
» mesh(X,Y,Z)
» hold on;
```

Pour vérification, on représente les trois points A, B, C :

```
» plot3(1,-1,3,'ko')
» plot3(3,-2,5,'ko')
» plot3(6,-5,5,'ko')
```



7.3.4.4. *Equation cartésienne d'un plan*

Soit $P = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un plan de l'espace, avec

$$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

On obtient une équation cartésienne de P en écrivant qu'un point M appartient à P si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont coplanaires, soit

$$\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x-x_A & a & a' \\ y-y_A & b & b' \\ z-z_A & c & c' \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, on obtient une équation de la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

7.3.4.5. *D'une équation cartésienne à un système d'équations paramétriques*

Illustrons ce passage sur un exemple. On se donne l'équation

$$2x + 7y - 15z - 10 = 0.$$

En appliquant la méthode de Gauss, on peut choisir arbitrairement deux des inconnues, ici par exemple y et z, et exprimer x en fonction de ces inconnues. On a alors le système :

$$\left\{\begin{array}{lcrr} x-5 & = & -\frac{7}{2}y & +\frac{15}{2}z \\ y & = & y & \\ z & = & & z, \end{array}\right.$$

qui s'interprète vectoriellement par la relation

$$\overrightarrow{AM} = y.\overrightarrow{u} + z.\overrightarrow{v},$$

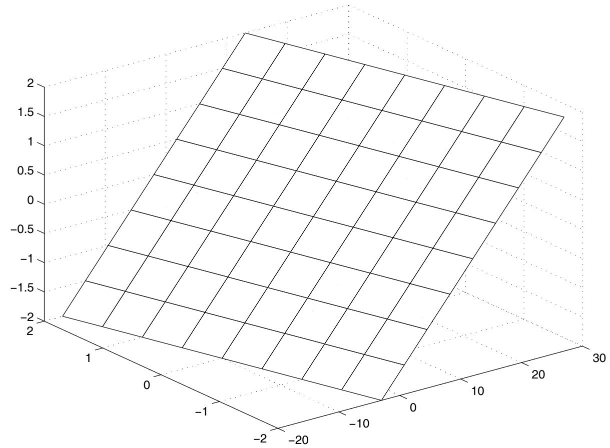
avec

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ A\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -7/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 15/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui montre que l'équation proposée est celle du plan $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Cette représentation permet aussi de dessiner le plan :

```
» y=[-2 :0.5 :2] ;
» z=[-2 :0.5 :2] ;
» [Y,Z]=meshgrid(y,z) ;
» X=-7/2*Y+15/2*Z+5 ;
» mesh(X,Y,Z)
```



La même démarche peut être appliquée à toute équation de la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

où α, β, γ ne sont pas tous trois nuls, ce qui montre que toute équation de la forme ci-dessus est celle d'un plan.

7.3.4.6. *D'un système d'équations paramétriques à une équation cartésienne*

Prenons l'exemple du plan défini par le système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 1 + 2t + s \\ y = t - 3s \\ z = 3 + 2t + 2s \end{cases}.$$

Ce plan passe par le point

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et a pour vecteurs directeurs

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient une équation cartésienne de P en écrivant

$$\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y-0 & 1 & -3 \\ z-3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

```
» syms x y z real
» M=[x-1 2 1 ; y 1 -3 ; z-3 2 2] ;
» det(M)
ans = 8*x+13-2*y-7*z
```

D'où l'équation cartésienne

$$8x - 2y - 7z + 13 = 0.$$

7.3.4.7. *Droite définie par un système d'équations cartésiennes*

Contrairement à ce qui se passe dans le plan, **on ne peut** pas définir une droite de l'espace par **une** équation cartésienne. Une telle équation caractérise en effet un plan. On peut simplement définir une droite comme intersection de deux plans, donc par un système de deux équations cartésiennes. L'exercice 7.5.4 p. 216 en est une illustration.

7.3.5. *Autres représentations paramétriques dans l'espace*

La commande *plot3* permet plus généralement de dessiner point par point une courbe de l'espace, alors que *mesh* permet de représenter des surfaces.

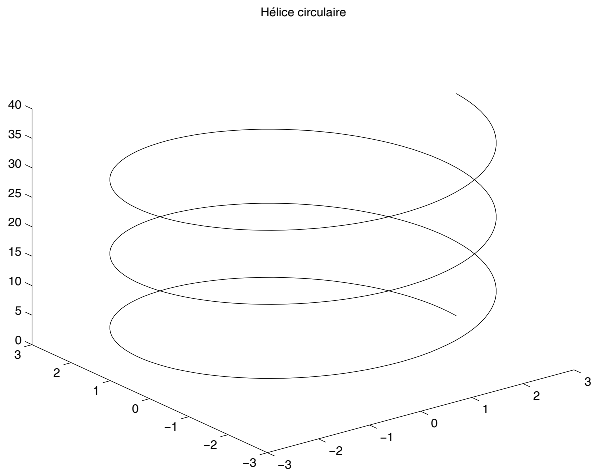
7.3.5.1. *Exemple de dessin d'une courbe de l'espace*

On considère la courbe (hélice circulaire) définie par le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = 3\sin(t) \\ z = 2t, \end{cases}$$

où $t \in [0, 6\pi]$. Le dessin s'obtient par :

```
» T=0 :pi/50 :6*pi ;
» X=3*cos(T) ; Y= 3*sin(T) ; Z = 2*T ;
» plot3(X,Y,Z)
» hold on ;  title('Hélice circulaire')
```



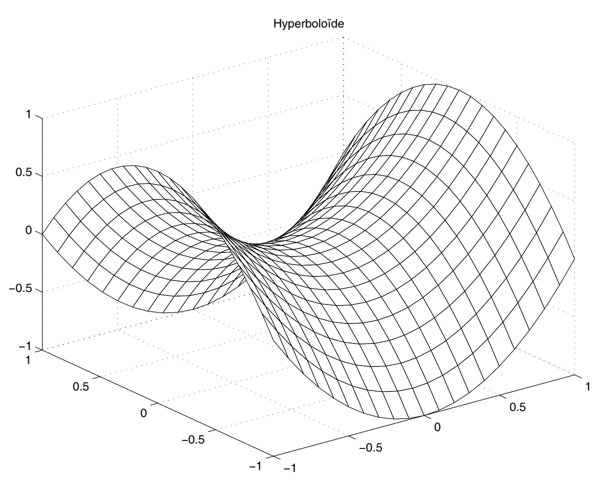
7.3.5.2. *Exemple de dessin d'une surface de l'espace*

On veut dessiner la surface de l'espace, appelée hyperboloïde, d'équation

$$z = x^2 - y^2,$$

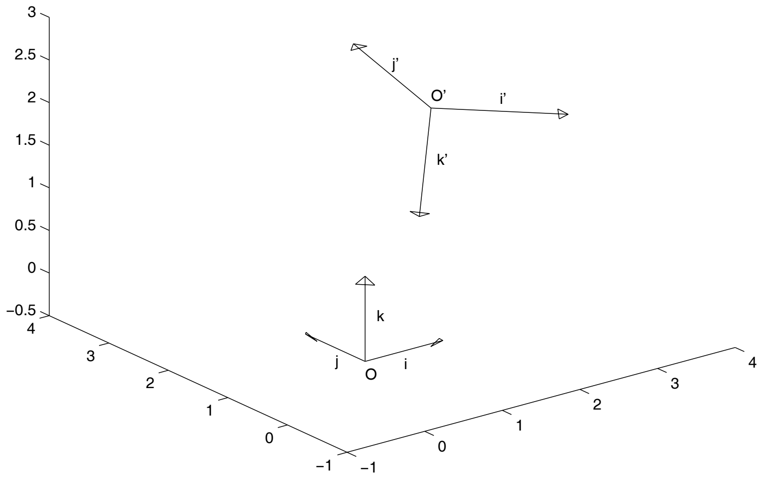
avec $x, y \in [-1,\ 1]$. On a :

```
» [X,Y] = meshgrid(-1 :0.1 :1,-1 :0.1 :1) ;
» Z=X.*X - Y.*Y ;
» mesh(X,Y,Z)
» title('Hyperboloïde')
```



7.4. Changements de base et changements de repère

Certains calculs ou certains dessins sont plus faciles à effectuer si on se place dans un "nouveau" repère $\left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$ plutôt que dans le repère initial $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Le but de cette partie est d'obtenir des formules de passage des coordonnées dans un repère à celles dans l'autre repère.



Les calculs seront effectués pour des bases et des repères de l'espace. On donnera aussi les formules correspondantes de géométrie plane.

7.4.1. *Changement de base dans l'espace*

On donne trois vecteurs $\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}$ par leurs coordonnées relativement à une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$:

$$\overrightarrow{i'}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \overrightarrow{j'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \overrightarrow{k'}\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}.$$

On note

$$P = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

la matrice de la famille $\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$, relativement à la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On rappelle que les vecteurs $\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$ forment une famille libre, donc une base, si et seulement si

$$\det(P) \neq 0.$$

On suppose dans la suite cette condition réalisée. P s'appelle alors la **matrice de passage** de $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ à $\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$.

Pour un vecteur $\overrightarrow{v}$ quelconque de l'espace, on note

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ses coordonnées dans la base de départ $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, et

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ses coordonnées dans la nouvelle base $\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$. On a l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{v} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k} = x'.\overrightarrow{i'} + y'.\overrightarrow{j'} + z'.\overrightarrow{k'},$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned} & x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k} \\ = \quad & x'.\left(a.\overrightarrow{i} + b.\overrightarrow{j} + c.\overrightarrow{k}\right) + y'.\left(a'.\overrightarrow{i} + b'.\overrightarrow{j} + c'.\overrightarrow{k}\right) \\ & + z'.\left(a''.\overrightarrow{i} + b''.\overrightarrow{j} + c''.\overrightarrow{k}\right) \end{aligned}$$

soit, en utilisant les propriétés de calcul vectoriel

$$\begin{aligned} & x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k} \\ = \quad & \left(x'a + y'a' + z'a''\right).\overrightarrow{i} + \left(x'b + y'b' + z'b''\right).\overrightarrow{j} \\ & + \left(x'c + y'c' + z'c''\right).\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

ce qui équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{l} x = x'a + y'a' + z'a'' \\ y = x'b + y'b' + z'b'' \\ z = x'c + y'c' + z'c''. \end{array}\right.$$

Ce dernier s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

ou encore

$$X = P \times X'.$$

Ainsi,

> *on obtient la matrice unicolonne des coordonnées d'un vecteur dans la base de départ en multipliant la matrice de passage P par la matrice des coordonnées de ce vecteur dans la nouvelle base.*

La matrice P étant inversible, on a aussi :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

7.4.2. *Changement de repère dans l'espace*

7.4.2.1. *Formule de changement*

On note relativement au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

$$O' \begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \\ z_{O'} \end{pmatrix}, \vec{i'} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{j'} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \vec{k'} \begin{pmatrix} a" \\ b" \\ c" \end{pmatrix}.$$

Si x, y, z représentent les coordonnées d'un point M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, et x', y', z' celles de ce même point dans le repère $\left(O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$, on obtient les formules de changement de repère en considérant le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ et ses coordonnées relativement aux deux bases $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et $\left(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$. Les formules de changement de base précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{pmatrix} x - x_{O'} \\ y - y_{O'} \\ z - z_{O'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

On en déduit aussi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} x - x_{O'} \\ y - y_{O'} \\ z - z_{O'} \end{pmatrix}.$$

7.4.2.2. *Calcul avec Matlab*

En utilisant la formule ci-dessus, la fonction définie par

$$M_{new} = Old2New(M_{old}, O_1, I_1, J_1, K_1)$$

calcule les nouvelles coordonnées M_{new} du point M dans le repère d'origine O_1 et de vecteurs de base I_1, J_1, K_1, en fonction des anciennes coordonnées M_{old}.

```
function Mnew =Old2New(Mold,O1,I1,J1,K1)
MatPass = [I1 ,J1 , K1] ;
Inv=MatPass^(-1) ;
Mnew = Inv*(Mold-O1) ;
```

7.4.3. *Changements de base et de repère dans le plan*

7.4.3.1. *Changement de base*

On obtient des formules analogues, dans le plan, en notant $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une base du plan, $\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}$ deux vecteurs définis par leurs coordonnées relativement à la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$:

$$\overrightarrow{i'} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overrightarrow{j'} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}.$$

On note également

$$P = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$$

la matrice de la famille $\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$ relativement à la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On a les résultats suivants :

– les vecteurs $\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$ forment une base, si et seulement si

$$\det(P) \neq 0.$$

– Si cette condition est réalisée, alors, pour un vecteur $\overrightarrow{v}$ quelconque du plan, en notant x, y ses coordonnées dans la base de départ $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et x', y' ses coordonnées dans la nouvelle base $\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$, on a la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

7.4.3.2. *Changement de repère*

On considère deux repères $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et $\left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$ du plan et on note, relativement au repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$:

$$O' \begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \end{pmatrix}, \overrightarrow{i'} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overrightarrow{j'} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}.$$

Pour M de coordonnées x, y dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et x', y' dans le repère

$$\left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right),$$

on a :

$$\begin{pmatrix} x - x_{O'} \\ y - y_{O'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

7.5. Exercices

7.5.1. *Une suite de parallélogrammes*

On définit la suite (P_n) de quadrilatères de la manière suivante :

$$\begin{cases} P_1 \text{ est le quadrilatère } ABCD \text{ de l'exemple 7.2.3 ;} \\ P_{n+1} \text{ est le quadrilatère joignant les milieux des côtés de } P_n. \end{cases}$$

1) Dessiner sur une même figure, $P_1, P_2, \cdots, P_{10}$.

2) Montrer que tous ces quadrilatères sont des parallélogrammes.

(solution p 219)

7.5.2. *Solutions entières d'une équation linéaire*

Utiliser $Matlab$ pour visualiser les solutions entières de l'équation

$$3x + 2y = 100 \quad \text{avec } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

Indication : on remarquera que nécessairement x doit être pair, et on posera donc

$$x = 2.t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

(solution p 220)

7.5.3. *Etude d'un parallélipède*

On considère le parallélipipède $(OABCDEFG)$, avec :

$$O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, G\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On précise que les faces $OABC$, $OAFG$, $OCDG$, $DEFG$ sont des parallélogrammes.

1) Calculer les coordonnées des sommets B, D, E et F.

2) Pour k réel quelconque, calculer les coordonnées du point I tel que

$$\overrightarrow{OI} = k.\overrightarrow{OE}.$$

3) Pour quelle valeur de k les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AI}$ sont-ils coplanaires ? Interprétation géométrique.

4) Dessiner sur une même figure le parallélipipède, le triangle ACG (utiliser la commande *fill*), le segment $[OE]$ et le point I.

(solution p 221)

7.5.4. *Intersection de deux plans*

On considère le système

$$\begin{cases} x + 3y & = & 5 \\ 2x + y - z & = & 12. \end{cases}$$

1) Dessiner les deux plans P_1 et P_2 correspondant à chaque équation du système.

2) Appliquer la méthode de Gauss à ce système pour exprimer x et y en fonction de z.

3) En déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection de P_1 et P_2. Dessiner cette droite.

(solution p 223)

7.5.5. *Etude d'une symétrie vectorielle*

Soit $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base de $\mathcal{V}_3$. On définit les trois vecteurs

$$\overrightarrow{I} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{J} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{K} = \overrightarrow{j} - \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}.$$

1) Vérifier que $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ est aussi une base de $\mathcal{V}_3$.

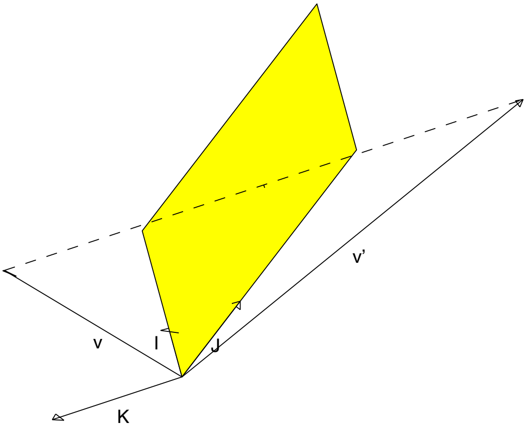
2) On considère l'application s (appelée symétrie vectorielle) qui, à tout vecteur

$$\overrightarrow{v} = X.\overrightarrow{I} + Y.\overrightarrow{J} + Z.\overrightarrow{K},$$

associe le vecteur

$$\overrightarrow{v'} = X.\overrightarrow{I} + Y.\overrightarrow{J} - Z.\overrightarrow{K}$$

(voir figure ci-dessous).



On note respectivement :

$$V_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, V_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, V'_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, V'_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$$

les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathcal{B}$, celles de $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathcal{B}_1$, celles de $\overrightarrow{v'}$ dans la base $\mathcal{B}$ et enfin celles de $\overrightarrow{v'}$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

- En utilisant la définition de s, exprimer matriciellement $V'_{\mathcal{B}_1}$ en fonction de $V_{\mathcal{B}_1}$.

- En utilisant la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$, exprimer matriciellement $V_{\mathcal{B}_1}$ en fonction de $V_{\mathcal{B}}$, et $V'_{\mathcal{B}}$ en fonction de $V'_{\mathcal{B}_1}$.

- En déduire l'expression de $V'_{\mathcal{B}}$ en fonction de $V_{\mathcal{B}}$.

3) Vérifier ce dernier résultat en calculant l'image des vecteurs $\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} + \vec{k}, \vec{j} - \vec{i} - \vec{k}$.

(solution p 225)

7.5.6. *Changement de repère*

En s'inspirant de la fonction $Old2New$ décrite au paragraphe 7.4.2.2, définir une fonction

$$Mold = New2Old(M_{new}, O_1, I_1, J_1, K_1)$$

qui calcule les anciennes coordonnées M_{old} du point M en fonction des nouvelles M_{new} données dans le repère d'origine O_1 et de vecteurs de base I_1, J_1, K_1.

(solution p 226)

7.5.7. *Parabole dans un nouveau repère*

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considère l'ensemble C des points dont les coordonnées vérifient l'équation

$$x + y - 1 = 2\,(x - y - 1)^2 .$$

1) Peut-on utiliser cette équation pour construire C ?

2) On va utiliser un changement de repère pour reconnaître la nature de cet ensemble. (Ce changement de repère devra permettre d'écrire l'équation sous forme : $Y = 2X^2$). Il sera défini par le système

$$\begin{cases} X = x - y - 1 \\ Y = x + y - 1. \end{cases}$$

Résoudre ce système d'inconnues x et y et trouver les valeurs de

$$a, a', b, b', x_A, y_A$$

telles que

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

3) En déduire le repère $\left(A, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ dans lequel C a pour équation

$$Y = 2X^2,$$

et utiliser cette dernière pour construire et reconnaître C.

(solution p 227)

7.6. Solutions

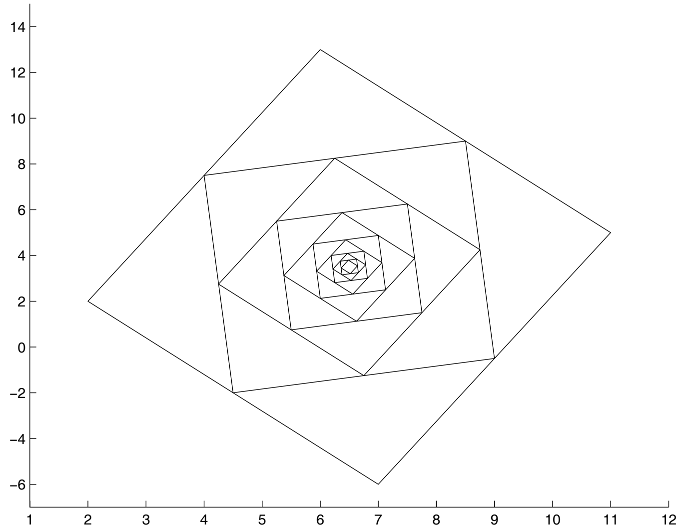
Exercice 7.5.1

1) On construit le premier parallélogramme :

```
» A=[6 ;13] ;B=[11 ;5] ;C=[7 ;-6] ;D=[2 ;2] ;
» P=[A B C D A] ;plot(P(1, :),P(2, :),'k')
```

A chaque itération, on calcule les milieux de deux côtés consécutifs de la ligne polygonale P et on dessine la nouvelle ligne polygonale obtenue :

```
» hold on
» for n = 1 :10
        for i=1 :4
            P( :,i)=(P( :,i)+P( :,i+1))/2 ;
        end
    P( :,5)=P( :,1) ;
    plot(P(1, :),P(2, :),'k')
end
» axis([1 12 -7 15])
```



2) Pour montrer que ces quadrilatères sont des parallélogrammes, on pourrait utiliser des propriétés géométriques (droites de milieux), mais on peut ici utiliser le calcul symbolique de *Matlab*.

– On a déjà vérifié (voir paragraphe 7.2.3) que P_1 était un parallélogramme.

– A un rang $n \geqslant 1$ donné, on définit les coordonnées des quatre sommets A, B, C, D du quadrilatère P_n :

```
» syms xA yA xB yB xC yC xD yD real
» A = [xA ;yA] ;B=[xB ;yB] ;C=[xC ;yC] ;D=[xD ;yD] ;
```

On calcule alors les coordonnées des milieux I_1, I_2, I_3, I_4 des quatre côtés, puis celles des vecteurs $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{I_1 I_2}$, et $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{I_4 I_3}$:

```
» I1=1/2*(A+B) ;I2=1/2*(B+C) ;I3=1/2*(C+D) ;I4=1/2*(D+A) ;
» V1=I2-I1
V1 =
    [ 1/2*xC-1/2*xA]
    [ 1/2*yC-1/2*yA]
» V2=I3-I4
V2 =
    [ 1/2*xC-1/2*xA]
    [ 1/2*yC-1/2*yA]
» V1-V2
ans =
    [ 0]
    [ 0]
```

On a ainsi vérifié l'égalité $\overrightarrow{I_1 I_2} = \overrightarrow{I_4 I_3}$.

Exercice 7.5.2

En mettant l'équation $3x + 2y = 100$ sous la forme

$$3x = 2.\,(50 - y)\,,$$

on voit que, nécessairement, x est pair[1], soit

$$x = 2t \quad \text{avec } t \in \mathbb{Z}\,.$$

Par substitution, on déduit

$$50 - y = 3t \quad \text{avec } t \in \mathbb{Z}\,.$$

1. par application d'un théorème d'arithmétique (lemme de Gauss).

On a ainsi obtenu un système d'équations paramétriques :

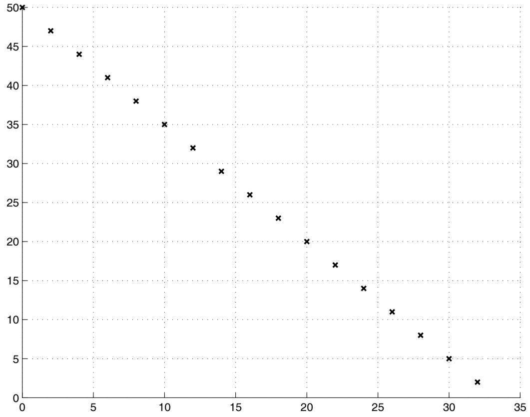
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t + 50 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{Z}.$$

Les conditions $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ donnent alors respectivement $t \geqslant 0$, $t \leqslant 50/3$. Soit

$$0 \leqslant t \leqslant 16, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

D'où les instructions :

```
» hold on ; grid on
» T=0 :1 :16 ;
» X=2*T ;Y=-3*T+50 ;
» plot(X,Y,'x')
```



Exercice 7.5.3.

1) On déclare les points O, A, C, G.

```
» O=[0 ;0 ;0] ;A=[3 ;0 ;0] ;
» C=[0 ;5 ;0] ;G=[0 ;0 ;4] ;
```

Par hypothèse, $OABC\ est$ un parallélogramme, donc

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}.$$

De plus, comme O est l'origine, $A, B, C, ...$ ont mêmes coordonnées que respectivement

$$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, ...$$

D'où

```
» B=A+C ;
» % De même :
» F = A+G ;D=C+G ; E=F+(D-G) ;
» % Visualisation des coordonnées de ces quatre points
» [ B D E F]
 ans =  3 0 3 3
        5 5 5 0
        0 4 4 4
```

2) On définit les coordonnées de I.

```
» syms k real
» I=k*E
 I =  [ 3*k]
      [ 5*k]
      [ 4*k]
```

3) Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AI}$ sont coplanaires si, et seulement si ils forment une famille liée, soit

$$\det\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AI}\right) = 0.$$

```
» d = det([C-A G-A I-A])
d = 180*k-60
» k0=solve(d,k)
k0 =1/3
```

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AI}$ sont coplanaires pour $k = 1/3$. Géométriquement, cela signifie que, dans ce cas, le point I appartient au plan (ACG) .

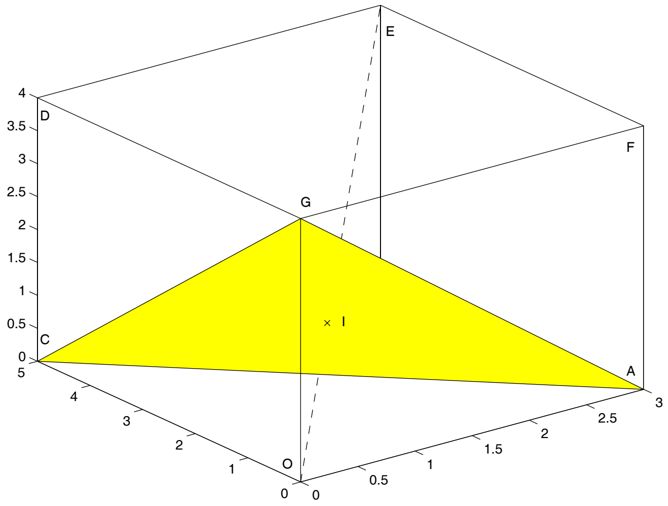
4) On construit une suite de sommets du parallélipipède qui permet de parcourir au moins une fois toutes les arêtes

```
» P=[O A B C O G F A F E B E D C D G] ;
» clf ;plot3(P(1, :),P(2, :),P(3, :),'k')
```

et on représente le point I, le triangle ACG et le segement $[OE]$:

```
» I =double(subs(I,k,k0)) ;
» hold on ;plot3(I(1),I(2),I(3),'kx')
» Tr = [A C G A] ;
» fill3(Tr(1, :), Tr(2, :),Tr(3, :),'y')
» S=[O E] ;
» plot3(S(1, :),S(2, :),S(3, :),'k- -')
```

On marque ensuite le nom des points, en utilisant la commande *text*, comme dans l'exemple du paragraphe 7.3.3.1.



Exercice 7.5.4

1) Le plan P_1 peut être défini par

$$\left\{\begin{array}{lcccc} x & = & 5 & -3y & \\ y & = & & y & \\ z & = & & & z \end{array}\right.$$

et P_2 par

$$\left\{\begin{array}{lcccc} x & = & 6 & -\frac{y}{2} & +\frac{z}{2} \\ y & = & & y & \\ z & = & & & z \end{array}\right.$$

D'où les instructions de dessin :

```
» y=[-2 :0.1 :2] ;
» z=[-4 :0.4 :4] ;
» [Y,Z]=meshgrid(y,z) ;
» X1=5-3*Y ;
» mesh(X1,Y,Z) ; hold on
» X2=6-Y/2+Z/2 ;
» mesh(X2,Y,Z) ;
```

2) La méthode de Gauss donne :

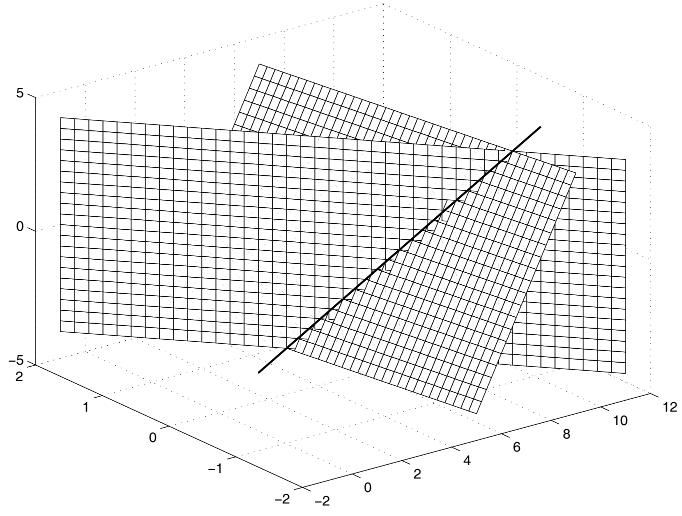
```
» Syst=[1 3 0 5 ; 2 1 -1 12]
 Syst = [ 1 3 0 5]
        [ 2 1 -1 12]
» sym(rref(Syst))
 ans = [ 1, 0, -3/5, 31/5
       [ 0, 1, 1/5, -2/5]
```

Le système est donc équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrr} x & = & \frac{3}{5}z & +\frac{31}{5} \\ y & = & -\frac{1}{5}z & -\frac{2}{5} \\ z & = & & z. \end{array}\right.$$

On peut alors construire la droite d'intersection de P_1 et P_2 à partir de cette représentation paramétrique :

```
» z=[-5 5] ;
» x=3/5*z+31/5 ;
» y=-1/5*z-2/5 ;
» plot3(x,y,z,'k','LineWidth',1.5)
```



Exercice 7.5.5

1) On définit par leurs coordonnées relativement à la base $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, puis $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$.

```
» i=[1 ;0 ;0] ; j=[0 ;1 ;0] ;k=[0 ;0 ;1] ;
» I=i+j
I =
   1
   1
   0
» % De même :
» J=i+k ;K=j-i-k ;
```

Pour montrer que la famille $\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ forme une base :

```
» % On définit la matrice de la famille (I,J,K) :
» P=[I J K]
P =
   1 1 -1
   1 0 1
   0 1 -1
» % On calcule son déterminant :
» d=det(P)
d =-1
```

2) On a par définition de s :

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = Y \\ Z' = -Z, \end{cases}$$

soit matriciellement

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

qui peut se noter

$$V'_{\mathcal{B}_1} = M \times V_{\mathcal{B}_1}.$$

On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\times P^{-1}} & V_{\mathcal{B}_1} \\ & & \downarrow \times M \\ V'_{\mathcal{B}} & \xleftarrow{\times P} & V'_{\mathcal{B}_1} \end{array}$$

d'où

$$V'_{\mathcal{B}_1} = P \times M \times P^{-1} \times V_{\mathcal{B}}.$$

On développe le second membre en utilisant *Matlab :*

```
» M=[1 0 0 ; 0 1 0 ; 0 0 -1] ;
» syms x y z real
» vB=[x ; y ; z] ;
» ProdMat=P*M*P^(-1)
ProdMat =
   -1 2 2
   2 -1 -2
   -2 2 3
» v1B=ProdMat*vB
v1B =
   [ -x+2*y+2*z]
   [ 2*x-y-2*z]
   [ -2*x+2*y+3*z]
```

Ainsi, dans la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, la symétrie vectorielle associe au vecteur $\overrightarrow{v}$ le vecteur $\overrightarrow{v'}$ tel que

$$\begin{cases} x' = -x + 2y + 2z \\ y' = \ 2x - y - 2z \\ z' = -2x + 2y + 3z. \end{cases}$$

3) On peut vérifier ce résultat en calculant par exemple l'image du vecteur $\overrightarrow{I}$:

```
» subs(v1B,vB,sym(I))
ans =
   [ 1]
   [ 1]
   [ 0]
```

Exercice 7.5.6

En utilisant la relation

$$\begin{pmatrix} x - x_{O'} \\ y - y_{O'} \\ z - z_{O'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

on a

```
function Mold =New2Old(Mnew,O1,I1,J1,K1)
MatPass = [I1 ,J1 , K1] ;
Mold = O1+ MatPass*Mnew ;
```

Exercice 7.5.7

1) On sait (grâce à la commande *ezplot*), construire avec *Matlab* une courbe d'équation de la forme

$$y = f(x).$$

On utilise donc *Matlab* pour résoudre l'équation d'inconnue y

$$x + y - 1 = 2\,(x - y - 1)^2\,.$$

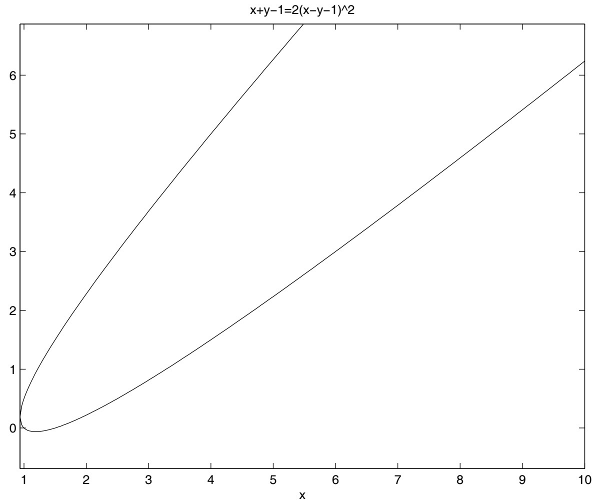
```
» syms x y real
» eq= x+y-1-2*(x-y-1)^2;
» Sy=solve(eq,y)
Sy =
[ -3/4+x+1/4*(-15+16*x)^(1/2)]
[ -3/4+x-1/4*(-15+16*x)^(1/2)]
```

C apparaît comme la réunion des deux courbes d'équations respectives

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4} + x + \frac{1}{4}\sqrt{-15 + 16x} \\ y = -\frac{3}{4} + x - \frac{1}{4}\sqrt{-15 + 16x}, \end{cases}$$

définies sur l'intervalle $[15/16, +\infty[$. On peut donner un aperçu de C

```
» ezplot(Sy(1),[15/16 10])
» hold on
» ezplot(Sy(2),[15/16 10])
» title('x+y-1=2(x-y-1)^2')
```



2) Du système, d'inconnues x, y

$$\left\{ \begin{array}{l} X = x - y - 1 \\ Y = x + y - 1, \end{array} \right.$$

on déduit

$$\left\{ \begin{array}{r} x - 1 = 1/2X + 1/2Y \\ y - 0 = -1/2X + +1/2Y, \end{array} \right.$$

ou encore

$$\left(\begin{array}{c} x - 1 \\ y - 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \right).$$

3) On définit donc le nouveau repère $\left(A, \vec{I}, \vec{J}\right)$, avec

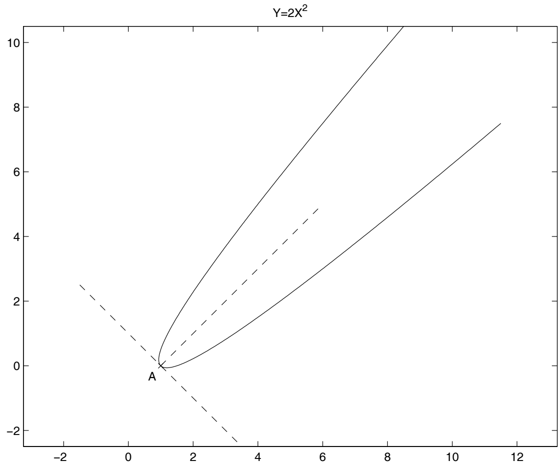
$$A \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \vec{I} \left(\begin{array}{c} 1/2 \\ -1/2 \end{array} \right), \vec{J} \left(\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 \end{array} \right).$$

On utilise ensuite les formules de changement de repère pour définir les anciennes coordonnées (x, y) des points de la courbe C en fonction des nouvelles coordonnées (X, Y).

```
» A=[1 ;0] ;I=[1/2 ;-1/2] ;J=[1/2 ;1/2] ;
» MatPass=[I J] ;
» X=-3 :0.01 :3 ;
» Y=2.*X.^2 ;
» AncCoord=MatPass*[X ;Y] ;
» x=AncCoord(1, :)+A(1) ;
» y=AncCoord(2, :)+A(2) ;
» plot(x,y)
```

On complète le tracé en plaçant l'origine A et les axes du nouveau repère :

```
» hold on ;axis equal ;
» plot(A(1),A(2),'kx') ;
» Axe1=[A-5*I A+5*I] ;
» plot(Axe1(1, :),Axe1(2, :),'k--')
» Axe2=[A A+10*J] ;
» plot(Axe2(1, :),Axe2(2, :),'k--')
» title('Y=2X^2')
» gtext('A')
```



C est donc une parabole de sommet A, d'axe $\left(A, \overrightarrow{J}\right)$.

Chapitre 8

Produit scalaire et produit vectoriel

Le produit scalaire et le produit vectoriel fournissent des outils de calcul permettant de vérifier que des vecteurs sont orthogonaux, de calculer l'angle formé par deux vecteurs, de construire un vecteur orthogonal à deux vecteurs de l'espace donnés, etc...

On utilise ces deux outils en infographie, notamment pour déterminer quelles sont les faces visibles et les faces cachées d'un polyèdre convexe (voir exercice 8.4.5).

Dans ce chapitre, on fait le choix, en supposant connues les notions de géométrie élémentaire vues dès le collège de rappeler certains résultats concernant les vecteurs orthogonaux et les bases orthonormées. On définit ensuite le produit scalaire et le produit vectoriel par leur expression algébrique relativement à une base orthonormée. Les calculs sur ces expressions algébriques permettent ensuite de retrouver les propriétés géométriques de ces deux opérations.

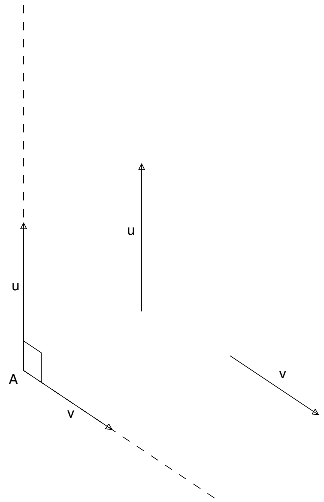
Toutes ces notions seront présentées en géométrie de l'espace. Les propriétés liées au produit scalaire dans le plan s'en déduisent naturellement.

8.1. Bases orthonormées dans le plan et l'espace

8.1.1. *Vecteurs orthogonaux*

8.1.1.1. *Définition géométrique*

Deux vecteurs **non nuls** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan ou de l'espace sont dits **orthogonaux** si, pour A point donné, les droites $(A, \overrightarrow{u})$ et $(A, \overrightarrow{v})$ sont perpendiculaires. Cette définition est indépendante du choix du point A.



Par convention, le **vecteur** $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{V}$.

Lorque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, on note :

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}.$$

8.1.2. *Norme d'un vecteur*

8.1.2.1. *Définition*

Etant donné un vecteur $\overrightarrow{u}$ de représentant $\overrightarrow{AB}$, la **norme** (euclidienne) du vecteur $\overrightarrow{u}$ est le réel positif, noté $\|\overrightarrow{u}\|$, égal à la distance AB. Ce nombre est indépendant du représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\overrightarrow{u}$ choisi.

8.1.2.2. *Propriétés*

La norme euclidienne vérifie :
pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et tout réel k,

$$\begin{array}{ll}
\|\overrightarrow{u}\| \geqslant 0, & \\
\|\overrightarrow{u}\| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}, & \\
\|k.\overrightarrow{u}\| = |k| \,.\, \|\overrightarrow{u}\|, & \\
\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\| & \text{(inégalité triangulaire),} \\
\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 & \text{(théorème de Pythagore).}
\end{array}$$

8.1.2.3. *Vecteur unitaire (ou normé)*

C'est par définition un vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que

$$\|\overrightarrow{u}\| = 1.$$

Etant donné un vecteur non nul quelconque $\overrightarrow{u}$, le vecteur

$$\overrightarrow{u_0} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$$

est un vecteur unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{u}$ et de même sens que $\overrightarrow{u}$.

8.1.3. *Définition d'une base orthonormée*

Dans $\mathcal{V}_3$, trois vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ forment une base orthonormée s'ils sont unitaires et deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire s'ils vérifient :

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = \left\|\overrightarrow{k}\right\| = 1, \\ \overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j} \perp \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{k} \perp \overrightarrow{i}. \end{cases}$$

On définit de manière analogue une base orthonormée $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ du plan.

Un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace est dit orthonormé si les les vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ forment une base orthonormée.

8.1.4. *Expression analytique de la norme et de la distance*

Soit $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormée de **l'espace**. Pour tout vecteur

$$\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

on montre, en utilisant le théorème de Pythagore, que :

$$\|\overrightarrow{v}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

d'où

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Si $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace, la distance des points

$$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} x_B \\ yB \\ z_B \end{pmatrix},$$

est

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

On obtient des formules analogues relativement à une base ou un repère orthonormé du **plan.**

8.1.5. *Calculs avec Matlab*

Pour le graphisme, dans le plan ou l'espace, la commande *axis* **equal** impose que le repère choisi pour le dessin soit orthonormé.

Pour un vecteur U du plan ou de l'espace défini par ses coordonnées, $\mathbf{norm}(U)$ calcule la norme euclidienne du vecteur U.

8.1.5.1. *Exemple*

On donne les trois points de l'espace

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

par leurs coordonnées dans un repère orthonormé. On montre en utilisant la propriété de Pythagore que le triangle ABC est rectangle en A.

```
» A=[1 ;3 ;5] ;B=[2 ;4 ;7] ;C=[3 ;5 ;3] ;
» ABcarre=norm(B-A)^2
» ABcarre =6.0000
» ACcarre=norm(C-A)^2
ACcarre = 12.0000
» BCcarre=norm(C-B)^2
BCcarre = 18.0000
» PythagoreVerifie= ABcarre+ACcarre- BCcarre
PythagoreVerifie = 3.5527e-015
```

Le résultat n'est pas exactement égal à 0, en raison des erreurs dues à la représentation machine des nombres.

8.2. Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan ou l'espace

8.2.1. *Définition*

Dans l'ensemble des vecteurs de l'espace, on **fixe** une base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$

Etant donné deux vecteurs

$$\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \overrightarrow{v'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

leur **produit scalaire** est le réel

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v'} = xx' + yy' + zz'.$$

Avec *Matlab*, la fonction $\mathbf{dot}(U, V)$ calcule le produit scalaire des vecteurs U et V.

8.2.2. *Propriétés de symétrie et bilinéarité*

Le produit scalaire des vecteurs du plan ou de l'espace vérifie :

• *la propriété de symétrie :*

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{v'}.\overrightarrow{v},$$

• *les propriétés de bilinéarité :*

$$\overrightarrow{u}.\left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'}\right) = \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'}\right).\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v'},$$

$$\overrightarrow{u}.\left(\overrightarrow{k.v}\right) = \left(\overrightarrow{k.v}\right).\overrightarrow{u} = k.\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right).$$

On en déduit le développement :

$$\begin{aligned} &\left(k.\overrightarrow{u} + l.\overrightarrow{v}\right).\left(k'.\overrightarrow{u'} + l'.\overrightarrow{v'}\right) \\ = \; & kk'\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'}\right) + kl'\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v'}\right) + lk'\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u'}\right) + ll'\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v'}\right) \end{aligned}$$

8.2.3. *Produit scalaire et norme*

On a la propriété

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} = x^2 + y^2 + z^2 = \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2,$$

d'où aussi

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} \geqslant 0, \\ &\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

8.2.4. *Produit scalaire et orthogonalité*

Par développement et réduction, on montre que

$$\frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})-(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u})-(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v})\right]=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}.$$

On vérifie cette égalité avec *Matlab* en calculant la différence des deux membres :

```
» syms a b c a1 b1 c1 real
» U=[a ;b ;c] ; V=[a1 ;b1 ;c1] ;
» diff = 1/2*(dot(U+V,U+V)-dot(U,U)-dot(V,V)) ;
» simplify(diff)
ans = a*a1+b*b1+c*c1
```

Comme le premier membre est aussi égal à

$$\frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})-(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u})-(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v})\right]=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right),$$

on en déduit, en utilisant le théorème de Pythagore, la **propriété fondamentale** :

> *Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si*
> $$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0.$$

8.2.5. *Produit scalaire et changement de base orthonormée*

Soit $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ la base orthonormée de référence, dans laquelle a été défini le produit scalaire, et $\left(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ une autre base orthonormée. On note (X,Y,Z) et (X',Y',Z') les coordonnées de deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ dans cette nouvelle base, (x,y,z) et (x',y',z') leurs coordonnées dans l'ancienne base. On a

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v'}=\left(X\overrightarrow{I}+Y\overrightarrow{J}+Z.\overrightarrow{K}\right).\left(X'\overrightarrow{I}+Y'\overrightarrow{J}+Z'.\overrightarrow{K}\right).$$

En développant ce produit scalaire, et en utilisant les propriétés de norme :

$$\overrightarrow{I}.\overrightarrow{I}=\overrightarrow{J}.\overrightarrow{J}=\overrightarrow{K}.\overrightarrow{K}=1,$$

et d'orthogonalité

$$\overrightarrow{I}.\overrightarrow{J}=\overrightarrow{J}.\overrightarrow{K}=\overrightarrow{K}.\overrightarrow{I}=0,$$

on trouve

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v'}=XX'+YY'+ZZ'.$$

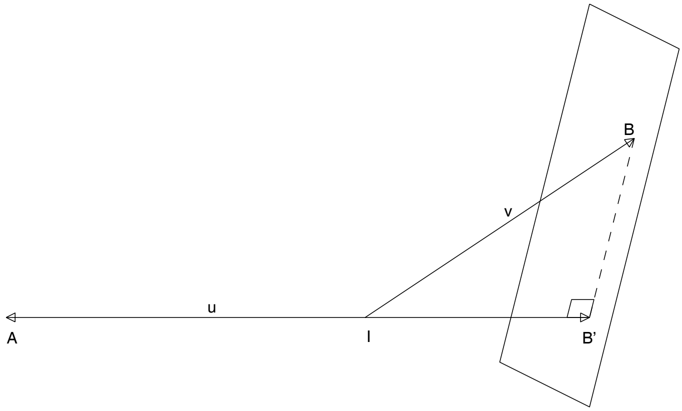
Ainsi, l'expression du produit scalaire est la même, quelle que soit la base orthonormée choisie.

8.2.6. *Produit scalaire et angle de deux vecteurs*

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. On fixe un point I, et on définit A, B, B' tels que :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{IA},\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{IB},$$

et B' est le projeté orthogonal de B sur la droite (IA) .



On montre alors que

$$\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB'} = IA.IB\cos(\widehat{BIA}) = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}}\right).$$

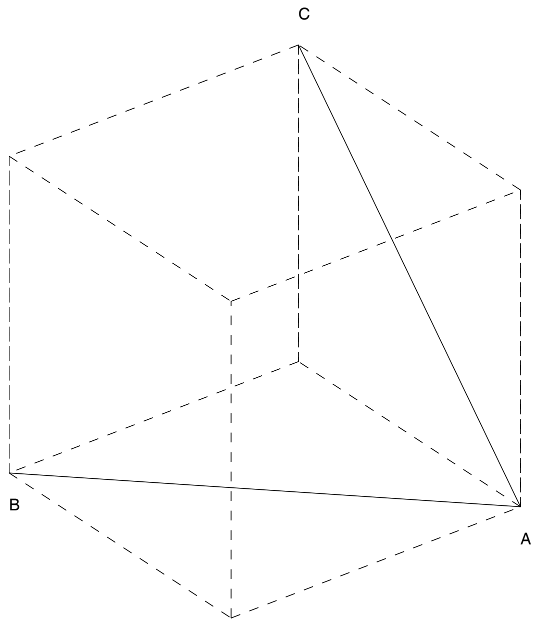
On peut ainsi calculer l'angle non orienté des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ en utilisant la relation

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}}\right) = \frac{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|}$$

En particulier selon que le produit scalaire est positif, nul ou négatif, l'angle (non orienté) est aigu, droit ou obtus respectivement.

8.2.6.1. *Exemple*

On demande de calculer l'angle formé par les diagonales (AB) et (AC) des deux faces adjacentes du cube dessiné ci-dessous.



On précise que

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

```
» A=[1 ;0 ;0] ;B=[0 ;1 ;0] ;C=[1 ;1 ;1] ;
» cosAngle = dot(B-A,C-A)/(norm(B-A)*norm(C-A))
cosAngle = 0.5000
» Angle =sym(acos(cosAngle))
Angle = pi/3
```

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment un angle (non orienté) de $\pi/3$. On peut retrouver ce résultat en calculant les distances AB, AC, BC pour vérifier que le triangle ABC est équilatéral.

8.2.7. *Exemple d'utilisation du produit scalaire*

8.2.7.1. *Plan de vecteur normal donné*

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on donne un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ et un point A :

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \ A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des points

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tels que

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n},$$

est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'équation

$$a\left(x - x_A\right) + b\left(y - y_A\right) + c\left(z - z_A\right) = 0.$$

On reconnaît l'équation d'un plan, appelé plan passant par A et de **vecteur normal** $\overrightarrow{n}$.

Inversement, étant donné un plan d'équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

dans un repère orthonormé, il suffit de trouver un triplet solution (x_A, y_A, z_A) pour mettre l'équation donnée sous la forme

$$a\left(x - x_A\right) + b\left(y - y_A\right) + c\left(z - z_A\right) = 0,$$

et reconnaître ainsi le plan passant par

$$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$$

et de vecteur normal

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

8.2.7.2. *Remarques*

On trouvera d'autres exemples d'utilisation du produit scalaire en exercices 8.4.2 et 8.4.3.

On obtient des résultats et formules analogues dans le plan, en adaptant les dimensions (plan devient droite, "$ax + by + cz + d = 0$" devient "$ax + by + c = 0$", etc...).

8.3. Produit vectoriel dans $\mathcal{V}_3$

8.3.1. *Orientation dans* $\mathcal{V}_3$

Intuitivement, l'orientation consiste à choisir sur une droite un sens de "parcours", dans le plan un sens de "rotation", et dans l'espace un sens de "vissage". Dans chaque cas, il n'y a que deux orientations possibles.

On peut caractériser par le calcul l'orientation dans l'espace : pour toutes bases $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$, on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}$'.

Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$' sont dites de même sens, ou de même orientation, si

$$det(P) > 0.$$

Elles sont dites de sens (ou d'orientation) contraire si

$$det(P) < 0.$$

L'espace vectoriel est orienté par le choix d'une base de référence $\mathcal{B}_0$: les bases de même orientation que $\mathcal{B}_0$ sont alors dites **directes**, les autres sont dites **indirectes**.

8.3.1.1. *Exemple*

On peut vérifier, que, si $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base directe, alors $\left(-\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et $\left(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\right)$ sont des bases indirectes :

```
» i=[1 ;0 ;0] ;j=[0 ;1 ;0] ;k=[0 ;0 ;1] ;
» P=[-i j k] ;
» d=det(P)
d = -1
» P1=[j i k] ;
» d1=det(P1)
d1 = -1
```

8.3.1.2. *Remarque*

Plus généralement, d'après les propriétés des déterminants, si on remplace l'un des vecteurs d'une base $\mathcal{B}$ par son opposé, on change l'orientation de $\mathcal{B}$. Il en est de même si on permute deux vecteurs de $\mathcal{B}$.

8.3.2. *Définition du produit vectoriel*

8.3.2.1. *Définition*

On oriente $\mathcal{V}_3$, et on note $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base **orthonormée directe** de référence choisie.

Etant donnés deux vecteurs de $\mathcal{V}_3$

$$\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \overrightarrow{v'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

leur produit vectoriel est le vecteur

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

8.3.2.2. *Remarque*

Le produit vectoriel n'est pas défini dans $\mathcal{V}_2$

8.3.2.3. *Calcul sous Matlab*

Avec *Matlab*, la fonction **cross**(U, V) calcule le produit vectoriel des deux vecteurs U et V.

```
» syms x y z x1 y1 z1 real
» U=[x ;y ;z] ; V=[x1 ;y1 ;z1] ;
» W=cross(U,V)
W =
[ y*z1-z*y1]
[ z*x1-x*z1]
[ x*y1-y*x1]
```

8.3.3. *Propriétés d'antisymétrie et de bilinéarité*

Le produit vectoriel vérifie :

• *la propriété d'antisymétrie :*

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'} = -\overrightarrow{v'} \wedge \overrightarrow{v},$$

• *les propriétés de bilinéarité :*

$$\overrightarrow{u} \wedge \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'}\right) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v'},$$
$$\left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'}\right) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v'} \wedge \overrightarrow{u},$$
$$\overrightarrow{u} \wedge (k.\overrightarrow{v}) = (k.\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = k.\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right).$$

On en déduit le développement :

$$\begin{aligned} & (k.\overrightarrow{u} + l.\overrightarrow{v}) \wedge \left(k'.\overrightarrow{u'} + l'.\overrightarrow{v'}\right) \\ = \quad & kk'\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right) + lk'\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u'}\right) + kl'\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v'}\right) + ll'\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'}\right). \end{aligned}$$

8.3.4. *Produit mixte de trois vecteurs*

Etant donnés trois vecteurs quelconques $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$, on a l'égalité

$$\overrightarrow{u}.\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right) = \det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right).$$

En effet, pour

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix},$$

on a, en développant le déterminant suivant la première colonne,

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) &= \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \\ &= x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \\ &= \overrightarrow{u}.\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right). \end{aligned}$$

Le réel $\overrightarrow{u}.\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)$ s'appelle le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$.

8.3.5. *Propriétés géométriques du produit vectoriel*

8.3.5.1. *Condition de nullité*

Le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si, et seulement si ces deux vecteurs sont **colinéaires**.

8.3.5.2. *Caractérisation*

Etant donné deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, leur produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{w}$:

– **orthogonal** à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$,

– **de norme**

$$\|\overrightarrow{u}\| \ \|\overrightarrow{v}\| \ \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)\right|,$$

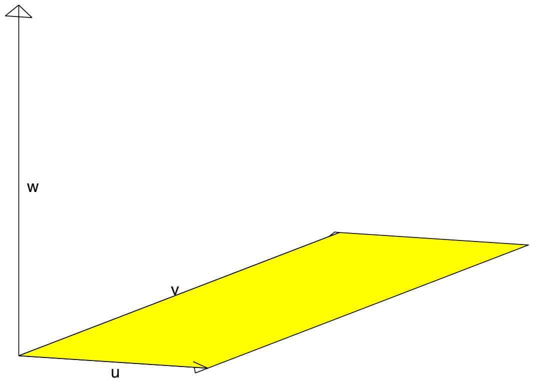
(c'est aussi l'aire du parallélogramme construit à partir des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$),

– **de sens** tel que

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$$

est une base directe (non orthonormée en général !)

Produit vectoriel de u et v



8.3.5.3. *Remarque*

Dans le cas particulier où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs **normés et orthogonaux,** d'après ce qui précède, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$:

– est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,

– a pour norme

$$\|\overrightarrow{u}\| \ \|\overrightarrow{v}\| \ \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)\right| = 1 \times 1 \times 1 = 1.$$

Dans ce cas, la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est orthonormée directe. C'est là un moyen de **compléter une base orthonormée d'un plan de l'espace en une base orthonormée de l'espace.**

8.3.6. *Produit vectoriel et changement de base orthonormée directe*

Soit $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ la base orthonormée directe de référence, dans laquelle a été défini le produit vectoriel, et $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ une autre base orthonormée directe. On note (X, Y, Z) et (X', Y', Z') les coordonnées de deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ dans cette nouvelle base, $(x, y, z$ et (x', y', z') leurs coordonnées dans l'ancienne base. On a

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'} = \left(X\overrightarrow{I} + Y\overrightarrow{J} + Z.\overrightarrow{K}\right) \wedge \left(X'\overrightarrow{I} + Y'\overrightarrow{J} + Z'.\overrightarrow{K}\right).$$

En développant ce produit vectoriel, on obtient une somme de neuf termes. Mais on a :

$$\overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{I} = \overrightarrow{J} \wedge \overrightarrow{J} = \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{K} = \overrightarrow{0},$$

on a aussi, par propriétés des bases orthonormées

$$\overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{J} = \overrightarrow{K}, \quad \overrightarrow{J} \wedge \overrightarrow{K} = \overrightarrow{I}, \quad \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{I} = \overrightarrow{J},$$

et enfin par antisymétrie

$$\overrightarrow{J} \wedge \overrightarrow{I} = -\overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{J},$$

etc...

D'où, après calculs

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v'} = (YZ' - ZX')\,\overrightarrow{I} + (ZX' - XZ')\,\overrightarrow{J} + (XY' - YX')\,\overrightarrow{K}.$$

Ainsi, dans la base $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$, le produit vectoriel de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} Y & Y' \\ Z & Z' \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} Z & Z' \\ X & X' \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} X & X' \\ Y & Y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

L'expression du produit vectoriel est donc la même, quelle que soit la base orthonormée directe choisie.

8.4. Exercices

8.4.1. *Norme d'un vecteur*

On peut remarquer que la fonction *norm* n'est pas définie pour des vecteurs dont les coordonnées sont de type symbolique :

```
» syms a b c real
» U=[a ;b ;c] ;
» norm(U)
? ? ? Function 'norm' not defined for values of class 'sym'.
```

Définir votre propre fonction *norme(U)*, qui, quel que soit le type (numérique ou symbolique) des éléments de U, retourne la norme du vecteur U. Utiliser cette fonction et le calcul symbolique pour vérifier formellement l'égalité de Pythagore dans l'exemple 8.1.5.1 p. 234.

(solution p 251)

8.4.2. *Distance d'un point à un plan*

Cet exercice a pour but de calculer la **distance d'un point à un plan d'équation donnée**.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère un plan P d'équation

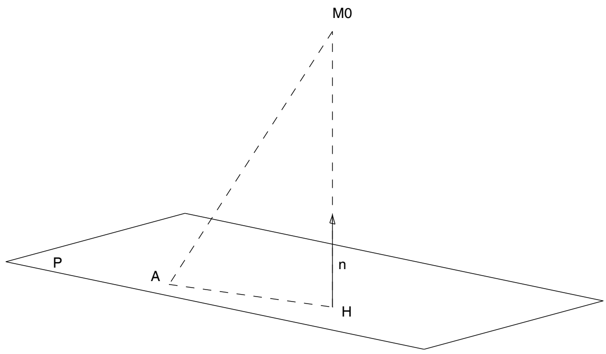
$$ax + by + cz + d = 0,$$

et un point

$$M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

On note H le projeté orthogonal de M_0 sur P. On cherche à exprimer la distance M_0H, sans calculer les coordonnées du point H.

On montre, grâce au théorème de Pythagore, que M_0H est la plus petite des distances de M_0 à un point quelconque de P. On dira que M_0H est la distance du point M_0 au plan P.



On utilise le vecteur

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

qui est normal au plan P, donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{M_0H}$, et on note k le réel tel que

$$\overrightarrow{M_0H} = k.\overrightarrow{n}.$$

1) Démontrer les relations :

a)

$$M_0H = |k|\,.\,\|\overrightarrow{n}\|\,.$$

b)

$$\overrightarrow{AM_0}\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n} = -k.\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}.$$

c)

$$\overrightarrow{AM_0}\cdot\overrightarrow{n} = ax_0 + by_0 + cz_0 + d.$$

d)

$$M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

2) Application : calculer la distance du point

$$M_0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

au plan P passant par les trois points

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

(solution p 252)

8.4.3. *Plan médiateur d'un segment*

On considère deux points distincts A et B de l'espace, et on note I le milieu du segment $[AB]$.

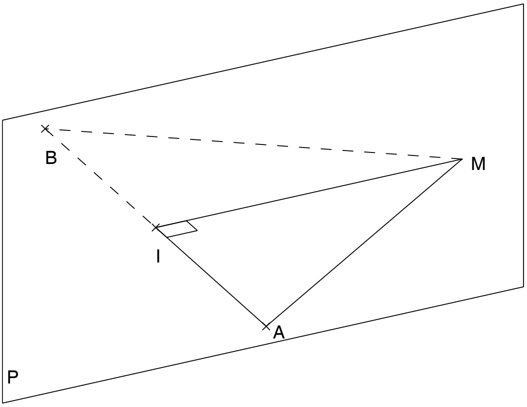
1) Montrer que, pour M point de l'espace :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$$

2) En déduire l'équivalence :

$$MA = MB \iff \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB}$$

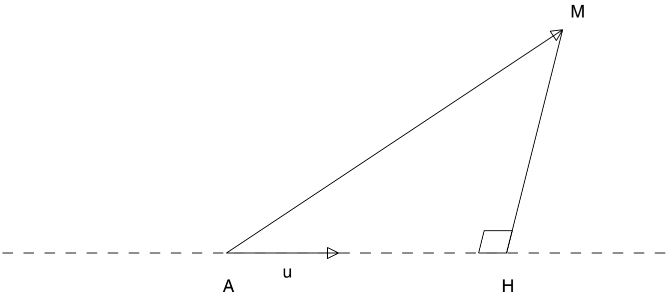
L'ensemble des points M équidistants de A et B est le plan passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$. On l'appelle le **plan médiateur** de [*AB*].



(solution p 253)

8.4.4. *Distance d'un point à une droite*

On se propose de calculer la **distance d'un point à une droite de l'espace.** On considère un point M de l'espace, et une droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. On note H le projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathcal{D}$.



1) Justifier les égalités suivantes :

a) $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}$.

b) $\left\|\overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM}\right\| . \|\overrightarrow{u}\|$.

On en déduit que

$$HM = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|},$$

et peut se calculer analytiquement, connaissant les coordonnées de A, M et $\overrightarrow{u}$.

Comme dans le cas de la distance d'un point à un plan (voir exercice 8.4.2), on montre que HM est la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$

2) Application : calculer la distance du point C à la droite (AB), avec

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

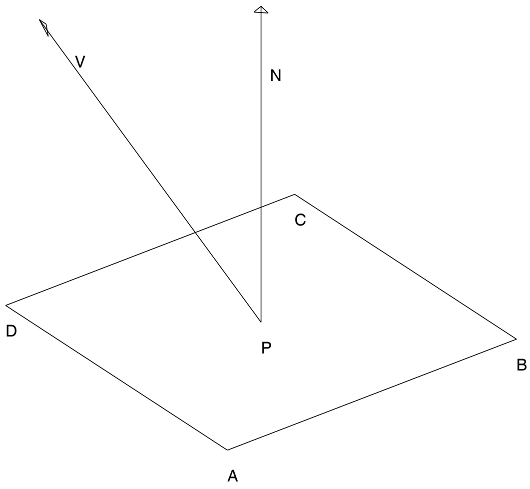
(solution p. 254)

8.4.5. *Faces visibles et faces cachées d'un cube*

On veut représenter un polyèdre convexe (un cube par exemple) en distinguant ses **faces visibles** et ses **faces cachées**, pour un observateur se trouvant à une position donnée. Supposons connu un vecteur $\overrightarrow{N}$ normal à une face donnée, "dirigé vers l'extérieur", et un vecteur de vue $\overrightarrow{V}$ représentant "la direction dans laquelle se trouve l'observateur", à partir d'un point P de la face. On utilise alors le critère suivant :

– si l'angle $\left(\widehat{\vec{N}, \vec{V}}\right)$ est aigu, c'est-à-dire si le produit scalaire $\vec{N}.\vec{V}$ est positif, la face est visible,

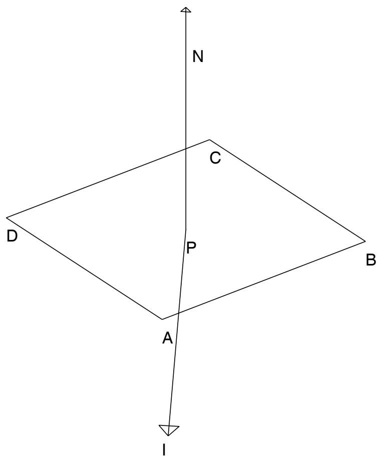
– sinon elle est cachée.



Pour calculer un vecteur normal à la face en question, il suffit de calculer, à partir de trois points non alignés A, B, C de cette face, le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Mais pour déterminer si ce vecteur normal est tourné ou non vers l'extérieur, il faut déterminer un sens de parcours de la face, ce qui n'est pas simple. On peut choisir une autre méthode : on considère un point I situé à l'intérieur du polyèdre convexe (on peut par exemple construire le centre de gravité de ses sommets), et P un point de la face considérée.

– si l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{PI}, \vec{N}}\right)$ est obtus, c'est-à-dire si le produit scalaire $\overrightarrow{PI}.\vec{N}$ est négatif, le vecteur normal $\vec{N}$ est dirigé vers l'extérieur

– sinon il est dirigé vers l'intérieur.



On en déduit donc que la face est visible si les deux produits scalaires $\overrightarrow{N}.\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{N}$ sont de signes contraires, et cachée s'ils sont de mêmes signes.

Application : on considère les points

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\\3\\3-\sqrt{3}\end{pmatrix},\quad D\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\1\\2-\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

1) Vérifier que $(ABCD)$ est un carré.

2) Déterminer un point E tel que $\overrightarrow{AE}$ soit un vecteur normal au plan de ce carré, avec de plus

$$\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|,$$

puis définir les points F, G, H tels que $(ABCDEFGH)$ soit un cube.

3) Déterminer si la face $(ABCD)$ est visible ou cachée, pour un observateur placé au point

$$S\begin{pmatrix}-15\\-20\\25\end{pmatrix}.$$

4) Représenter le cube, avec ses faces visibles en traits pleins et ses faces cachées en traits pointillés, toujours pour un observateur se trouvant au point S. On pourra suivre les indications suivantes :

- écrire une fonction *visib=dessineFace(F,S,I)* qui détermine si la face F est visible ou cachée, compte tenu de la position S de l'observateur et de la donnée du point I intérieur au polyèdre convexe. F, S, I pourront être donnés sous forme de matrices colonnes de coordonnées.
- utiliser cette fonction pour représenter successivement les six faces du cube,
- pour que la position S de l'observateur soit prise en compte dans le dessin réalisé par *Matlab*, on utilisera la commande

view $([S(1)\ S(2)\ S(3)])$

(solution p. 255)

8.5. Solutions

Exercice 8.4.1

On utilise la relation

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}.$$

```
function v=norme(U)
v1=dot(U,U) ;
v=sqrt(v1) ;
```

Pour reprendre l'exemple du triangle ABC du paragraphe 8.1.5.1, on utilise la fonction *sym* qui convertit les coordonnées des points A, B et C en symbolique :

```
» A=sym([1 ;3 ;5]) ;B=sym([2 ;4 ;7]) ;C=sym([3 ;5 ;3]) ;
» ABcarre=norme(B-A)^2
ABcarre = 6
» ACcarre=norme(C-A)^2
ACcarre = 12
» BCcarre=norme(C-B)^2
BCcarre = 18
PythagoreVerifie= ABcarre+ACcarre- BCcarre
PythagoreVerifie = 0
```

Exercice 8.4.2

1) a) On a

$$\overrightarrow{M_0H} = k.\overrightarrow{n}.$$

donc

$$M_0H = \left\|\overrightarrow{M_0H}\right\| = |k|\,.\,\|\overrightarrow{n}\|\,.$$

b)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM_0}\cdot\overrightarrow{n} &= \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM_0}\right)\cdot\overrightarrow{n} && \text{(relation de Chasles)}\\
&= \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}+\overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n}\\
&= \overrightarrow{HM_0}\cdot\overrightarrow{n} && (\text{car } \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{n})\\
&= -k.\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}. && (\text{car } \overrightarrow{HM_0} = -k.\overrightarrow{n})
\end{aligned}$$

c) En utilisant les coordonnées :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM_0}\cdot\overrightarrow{n} &= (x_0 - x_A)\,a + (y_0 - y_A)\,b + (z_0 - z_A)\,c\\
&= ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_A + by_A + cz_A)\,.
\end{aligned}$$

Mais, comme les coordonnées du point A vérifient l'équation du plan P,

$$ax_A + by_A + cz_A = -d,$$

on a

$$\overrightarrow{AM_0}\cdot\overrightarrow{n} = ax_0 + by_0 + cz_0 + d.$$

d) De la question b), on déduit

$$|k| = \frac{\left|\overrightarrow{AM_0}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}},$$

puis en utilisant a) et c)

$$\begin{aligned}
M_0H &= |k|\,.\,\|\overrightarrow{n}\|\\
&= \frac{\left|\overrightarrow{AM_0}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}}\\
&= \frac{\left|\overrightarrow{AM_0}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}\\
&= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.
\end{aligned}$$

2) On détermine d'abord l'équation du plan $P = (ABC)$: il a pour vecteurs directeurs

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}.$$

Un point M, de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, appartient à ce plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, soit

$$\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0,$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'équation cartésienne de P

$$-x + 1 - y + z = 0.$$

On peut vérifier ces calculs avec *Matlab* :

```
» A =[1 ;0 ;0] ;
» B=[1 ;1 ;1] ;
» C=[0 ;1 ;0] ;
» AB=B-A ;AC=C-A ;
» syms x y z ;M=[x ;y ;z] ;
» AM=M-A ;
» Equation = det([AM AB AC])
Equation = -x+1-y+z
```

On utilise ensuite la formule démontrée dans la première question pour calculer la distance de M_0 à ce plan :

$$d\,(M_0, P) = \frac{|-1 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 0 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 8.4.3

La première égalité pourrait se démontrer en utilisant la relation de Chasles et les propriétés de bilinéarité du produit scalaire. Elle peut aussi se vérifier avec *Matlab* par le calcul sur les coordonnées de A et B :

```
» syms xA yA zA xB yB zB x y z real
» A=[xA ;yA ;zA] ;
» B=[xB ;yB ;zB] ;
» I=(A+B)/2 ;
» prodScal =simplify(2*dot(M-I,B-A)) ;
» diffCarres=simplify(dot(A-M,A-M)-dot(B-M,B-M)) ;
» simplify(prodScal-diffCarres)
ans = 0
```

En utilisant les propriétés du produit scalaire et l'égalité vérifiée précédemment, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll} & \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} & \\ \Longleftrightarrow & \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0 & \text{(produit scalaire et orthogonalité)} \\ \Longleftrightarrow & \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MB} = 0 & \text{(utilisation de l'égalité démontrée)} \\ \Longleftrightarrow & \left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 & \text{(produit scalaire et norme)} \\ \Longleftrightarrow & MA = MB & \text{(norme et distance)} \end{array}$$

Exercice 8.4.4

1) On a :

a) en utilisant la relation de Chasles et la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u},$$

b) comme les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux

$$\left\|\overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM}\right\|.\|\overrightarrow{u}\|.\left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{HM},\overrightarrow{u}}\right)\right| = \left\|\overrightarrow{HM}\right\|.\|\overrightarrow{u}\|.$$

2) La droite (AB) passe par A et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. On a donc ici

$$d(C,(AB)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}.$$

On effectue les calculs avec *Matlab*

```
» A=[1 ;0 ;0] ; B=[0 ;1 ;1] ; C=[1 ;1 ;0] ;
» AB=B-A
AB =
   -1
   1
   1
» AC=C-A
AC =
   0
   1
   0
```

```
» V=cross(AB,AC)
V =
   -1
   0
   -1
» sym(norm(V))
ans = sqrt(2)
» sym(norm(AB))
ans = sqrt(3)
» norm(V)/norm(AB)
ans = 0.8165
```

Ainsi

$$d\left(C,(AB)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\simeq 0,8165.$$

Exercice 8.4.5

1) Pour vérifier que $(ABCD)$ est un carré, on calcule les coordonnées des vecteurs

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, donc $(ABCD)$ est un parallélogramme (ce qui implique en particulier que la figure est plane). D'autre part

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=1\times\sqrt{3}+2\times 0+1\times\left(-\sqrt{3}\right)=0,$$

donc

$$(AB)\perp(AD)\,.$$

Enfin
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$$
et
$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{\sqrt{3}^2+0^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6},$$
d'où
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|.$$
Le parallélogramme $(ABCD)$ est à la fois un rectangle et un losange, c'est donc un carré. Ces vérifications peuvent aussi être effectuées en utilisant le calcul symbolique de *Matlab* : on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC}$:

```
» A=sym('[1 ;1 ;2]') ;B=sym('[2 ;3 ;3]') ;
» C=sym('[2+sqrt(3) ;3 ;3-sqrt(3)]') ;
» D=sym('[1+sqrt(3) ;1 ;2-sqrt(3)]') ;
» AB=B-A
AB =
[ 1]
[ 2]
[ 1]
» AD=D-A
AD =
[ 3^(1/2)]
[ 0]
[ -3^(1/2)]
» DC=C-D
DC =
[ 1]
[ 2]
[ 1]
```

puis $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|$:

```
» dot(AB,AD)
ans = 0
» normeAB = sqrt(dot(AB,AB))
normeAB = 6^(1/2)
» normeAD = sqrt(dot(AD,AD))
normeAD = 6^(1/2)
```

2) On calcule un vecteur normal à la face $(ABCD)$, par exemple
$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD},$$

puis on calcule le vecteur

$$\overrightarrow{U} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{N}\right\|}\overrightarrow{N}$$

colinéaire à $\overrightarrow{N}$ et de même norme que $\overrightarrow{AB}$. Le point E peut alors être défini par $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{U}$.

```
» N=cross(AB,AD) ;
» normeN=sqrt(dot(N,N))
normeN = 6
» U=simplify(normeAB/normeN*N)
U =
[ -2^(1/2)]
[ 2^(1/2)]
[ -2^(1/2)]
» E=A+U
E =
[ 1-2^(1/2)]
[ 2^(1/2)+1]
[ 2-2^(1/2)]
```

On complète le cube par les points F, G, H tels que

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{U}.$$

```
» F=B+U
F =
[ 2-2^(1/2)]
[ 3+2^(1/2)]
[ 3-2^(1/2)]
» G=C+U
G =
[ 2+3^(1/2)-2^(1/2)]
[ 3+2^(1/2)]
[ 3-3^(1/2)-2^(1/2)]
» H=D+U
H =
[ 1+3^(1/2)-2^(1/2)]
[ 2^(1/2)+1]
[ 2-3^(1/2)-2^(1/2)]
```

3) On a déjà calculé le vecteur $\overrightarrow{N}$ normal à la face $(ABCD)$. On calcule le vecteur de vue

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AS},$$

on choisit pour point intérieur au cube le milieu I de la diagonale $[AG]$ et on compare le signe des produits scalaires $\overrightarrow{N}.\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{N}.\overrightarrow{AI}$

```
» S=[-15 ;-20 ;25] ;
» V=S-A ;
» I=1/2*(A+G)
I =
[ 3/2+1/2*3^(1/2)-1/2*2^(1/2)]
[ 2+1/2*2^(1/2)]
[ 5/2-1/2*3^(1/2)-1/2*2^(1/2)]
» double(dot(N,V))
ans =-96.9948
» double(dot(N,I-A))
ans =7.3485
```

On en déduit que la face $(ABCD)$ est visible.

4) Pour écrire la fonction *dessineFace*, on note A, B, C les trois premiers points de la face F. On calcule le vecteur normal

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC},$$

le vecteur de vue $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AS}$ et le vecteur $\overrightarrow{AI}$. On sait que la face est visible si le signe du produit

$$\left(\overrightarrow{N}.\overrightarrow{V}\right) \times \left(\overrightarrow{N}.\overrightarrow{AI}\right)$$

est négatif. Si c'est le cas, on dessine la face F en traits pleins, sinon on la dessine en traits pointillés.

```
function visib=dessineFace(F,S,I)
   AB=F( :,2)-F( :,1) ;
   AC=F( :,3)-F( :,1) ;
   N=cross(AB,AC) ;
   A=F( :,1) ;
   V=S-A ;
   AI=I-A ;
   visib=-sign(dot(V,N)*dot(AI,N)) ;
   F=[F A] ;
   if (visib==1)
      plot3(F(1, :),F(2, :),F(3, :),'r-','LineWidth',2)
   else
      plot3(F(1, :),F(2, :),F(3, :),'b- -','LineWidth',1)
   end
```

Pour faire les calculs de signe et les dessins, il faut convertir au format numérique les coordonnées des points qui avaient été introduites sous forme symbolique.

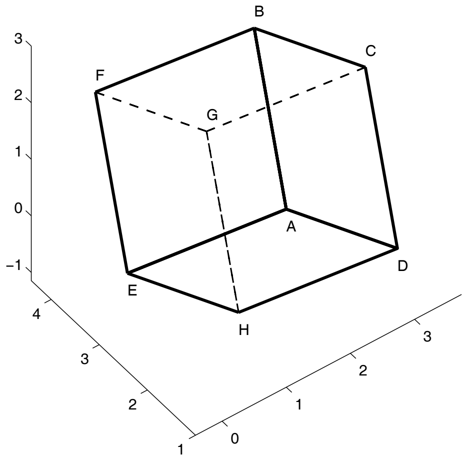
```
» A=double(A) ;B=double(B) ;C=double(C) ;D=double(D) ;
» E=double(E) ;F=double(F) ;G=double(G) ;H=double(H) ;
» I=double(I) ;
» clf ;  dessineFace([A B C D],S,I)
ans = 1
» hold on ; dessineFace([A B F E],S,I)
ans = 1
» dessineFace([B C G F],S,I)
ans = -1
» dessineFace([C D H G],S,I)
ans = -1
» dessineFace([D A E H],S,I)
ans = 1
» dessineFace([E F G H],S,I)
ans = -1
```

Les faces cachées sont ici $(BCGF)$, $(CDHG)$, $(EFGH)$.
On rend le repère orthonormé et on utilise la fonction *view* pour placer virtuellement l'observateur à la position voulue.

```
» axis equal ;
» view([S(1) S(2) S(3)])
```

Enfin, on complète le dessin en marquant les sommets du cube.

```
» h=0.3 ;
» text(A(1),A(2),A(3)-h,'A')
» text(B(1),B(2),B(3)+h,'B')
» text(C(1),C(2),C(3)+h,'C')
» text(D(1),D(2),D(3)-h,'D')
» text(E(1),E(2),E(3)-h,'E')
» text(F(1),F(2),F(3)+h,'F')
» text(G(1),G(2),G(3)+h,'G')
» text(H(1),H(2),H(3)-h,'H')
```



(il faut regarder la figure en considérant que c'est le point A qui est le plus proche de l'observateur).

Remarque

On peut aussi représenter les faces visibles en utilisant la représentation des plans vue au chapitre 7, paragraphe 7.3.4.3 et en l'adaptant au dessin des faces d'un parallélipipède.

La fonction *dessineFaceParallelipipede* représente la face

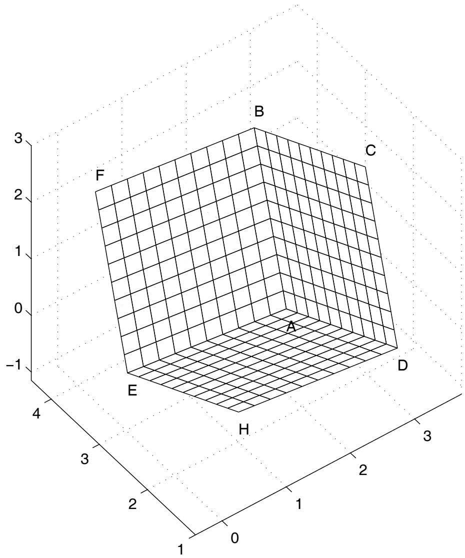
$$F = ABCD,$$

sous forme d'un quadrillage.

```
function dessineFaceParallelipipede(F)
A=F( :,1) ;
AB=F( :,2)-F( :,1) ;
AD=F( :,4)-F( :,1) ;
F=[F A] ;
u=[0 :0.1 :1] ;
v=u ;
[U,V]=meshgrid(u,v) ;
X=A(1)+U*AB(1)+V*AD(1) ;
Y=A(2)+U*AB(2)+V*AD(2) ;
Z=A(3)+U*AB(3)+V*AD(3) ;
mesh(X,Y,Z)
```

On utilise cette fonction pour représenter les trois faces visibles du cube :

```
» clf ;
» dessineFaceParallelipipede([A B C D]) ; hold on
» dessineFaceParallelipipede([A B F E])
» dessineFaceParallelipipede([A D H E])
» view([S(1) S(2) S(3)]) ; axis equal ;
» h=0.3 ;
» text(A(1),A(2),A(3)-h,'A') ; text(B(1),B(2),B(3)+h,'B')
» text(C(1),C(2),C(3)+h,'C') ; text(D(1),D(2),D(3)-h,'D')
» text(E(1),E(2),E(3)-h,'E') ; text(F(1),F(2),F(3)+h,'F')
» text(G(1),G(2),G(3)+h,'G') ; text(H(1),H(2),H(3)-h,'H')
```



Chapitre 9

Transformations dans le plan et dans l'espace

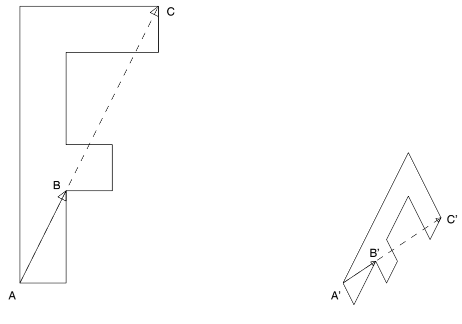
9.1. Transformations géométriques et applications linéaires

9.1.1. *Introduction*

Déplacer un objet du plan ou de l'espace, l'agrandir, le transformer, le projeter, sont des opérations fréquemment utilisées, notamment en infographie. Cela conduit à associer à des points du plan ou de l'espace d'autres points. Le modèle mathématique est donc celui d'application du plan ou de l'espace vers lui-même.

$$f\,:\;M \longmapsto M'$$

Ces applications sont appelées **transformations ponctuelles**.



9.1.2. *Application affine et application linéaire associée*

9.1.2.1. *Notion d'application affine*

Les transformations usuelles (translations, rotations, homothéties, symétries, ...) ont notamment pour propriétés géométriques de conserver l'alignement, le parallélisme (deux droites parallèles ont pour images des droites parallèles) et le rapport des distances. Plus précisément, ces applications vérifient la propriété :

$$\begin{array}{l}\text{si trois points } A, B, C \text{ vérifient } \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB},\\ \text{leurs images } A', B', C' \text{ vérifient aussi } \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}.\end{array} \qquad (\mathbf{1})$$

De manière générale, une transformation ponctuelle f vérifiant cette propriété $(\mathbf{1})$ est dite une application **affine**. Il en résulte la propriété fondamentale suivante :

$$\begin{array}{l}\text{si quatre points } A, B, C, D \text{ vérifient la relation } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD},\\ \text{leurs images } A', B', C', D' \text{ vérifient } \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}.\end{array} \qquad (\mathbf{2})$$

En effet, supposons quatre points A, B, C, D vérifiant la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Le milieu I des diagonales $[AD]$ et $[BC]$ du parallélogramme $ABDC$ vérifie

$$\begin{cases} \overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IA} \\ \overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}. \end{cases}$$

D'après la propriété $(\mathbf{1})$, son image I' vérifie

$$\begin{cases} \overrightarrow{I'D'} = -\overrightarrow{I'A'} \\ \overrightarrow{I'C'} = -\overrightarrow{I'B'}. \end{cases}$$

ce qui montre que $[A'D']$ et $[B'C']$ ont aussi le même milieu. Ainsi $A'B'D'C'$ est un parallélogramme et on en conclut que

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}.$$

9.1.2.2. *Application linéaire associée*

On peut alors définir l'application vectorielle φ, qui au vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ associe le vecteur

$$\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{f(A)f(B)},$$

l'image du vecteur $\overrightarrow{u}$ ne dépendant pas du représentant $\overrightarrow{AB}$ choisi d'après la propriété $(\mathbf{2})$.

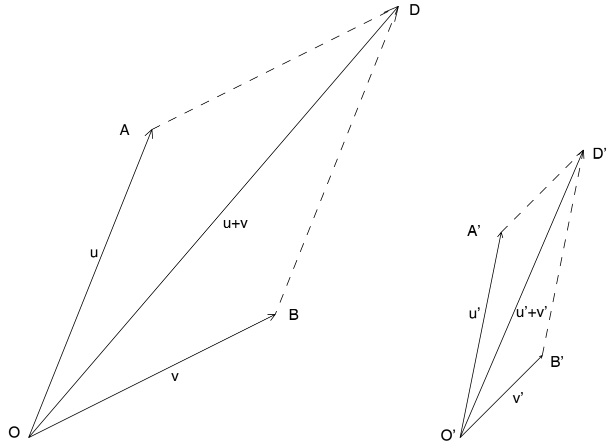
De plus, cette application vectorielle φ est linéaire :

– Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs quelconques. On note O, A, B, D des points tels que

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OD},$$

et A', B', D' les images de A, B, D par f. $OADB$ est un parallélogramme, et, d'après la propriété (**2**), $O'A'D'B'$ aussi. Il en résulte que

$$\overrightarrow{O'D'} = \varphi\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} = \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{v}\right).$$



– De même, pour $\overrightarrow{u}$ vecteur quelconque et k réel, on note

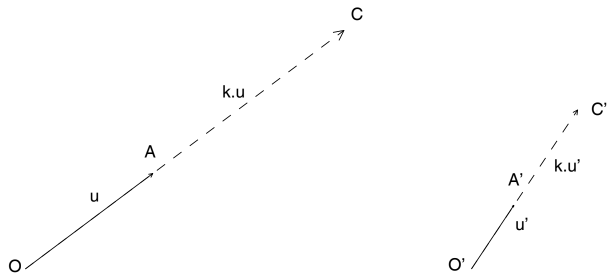
$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA},\ k.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OC},$$

et O', A', C' les images de O, A et C. On a d'après la propriété (**1**)

$$\overrightarrow{O'C'} = \varphi\left(\overrightarrow{OC}\right) = \varphi\left(k.\overrightarrow{u}\right) = k.\overrightarrow{O'A''} = k.\varphi\left(\overrightarrow{u}\right),$$

mais aussi

$$\overrightarrow{O'C'} = k.\overrightarrow{O'A''} = k.\varphi\left(\overrightarrow{OA}\right) = k.\varphi\left(\overrightarrow{u}\right).$$



9.1.2.3. *Composée et réciproque d'applications affines*

Si deux transformations f et g sont des applications affines du plan ou de l'espace, donc vérifient la propriété $(\mathbf{1})$ de "conservation de l'alignement et du rapport des distances", leur composée $g \circ f$ vérifie également cette propriété, donc est une application affine.

De même, si f est une application affine bijective du plan ou de l'espace, l'application réciproque f^{-1} est également une application affine.

9.1.3. *Applications affines et calcul matriciel*

Soit f une application affine et φ son application linéaire associée. On se place ici dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan. Les calculs relatifs à un repère de l'espace sont analogues. On note

$$O' = f(O), \quad \overrightarrow{i'} = \varphi(\overrightarrow{i}), \quad \overrightarrow{j'} = \varphi(\overrightarrow{j}),$$

avec

$$O' \begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{i'} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{j'} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

On dira, par abus de langage que f transforme le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ en $\left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$.

D'après les propriétés des applications linéaires, φ a pour matrice

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

et la relation vectorielle

$$\overrightarrow{O'M'} = \varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)$$

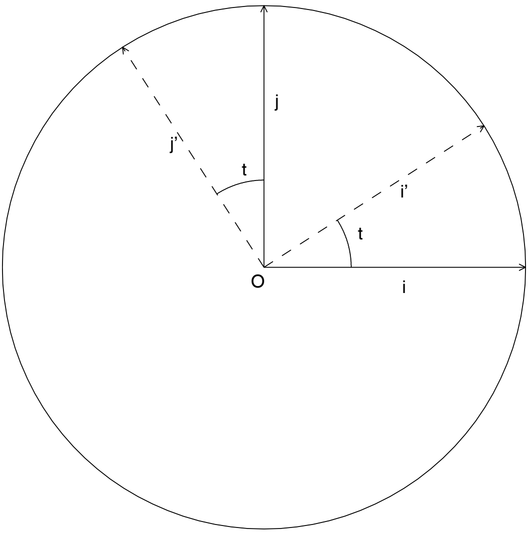
se traduit matriciellement par

$$\begin{pmatrix} x' - x_{O'} \\ y' - y_{O'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

x' et y' sont ainsi déterminés de manière unique, ce qui montre aussi qu'il existe une unique application affine f transformant le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ en $\left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$.

9.1.3.1. *Exemple*

On se donne un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et on étudie la rotation r de centre O et d'angle t :



Comme

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{i'}\right\| = \left\|\overrightarrow{i}\right\| = 1 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i'}}\right) = t, \end{cases}$$

on déduit des règles de calcul sur le cercle trigonométrique que le vecteur $\overrightarrow{i'}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{i'} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

On applique la même méthode pour calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{j'}$, avec cette fois-ci

$$\left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j'}}\right) = \frac{\pi}{2} + t.$$

D'où

$$\overrightarrow{j'} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

La matrice de l'application linéaire associée à la rotation r est

$$R = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

et un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a pour image M' tel que

$$\overrightarrow{OM'} = \varphi\left(\overrightarrow{OM}\right).$$

Donc M' a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos t - y\sin t \\ x\sin t + y\cos t \end{pmatrix}.$$

9.1.3.2. *Calcul avec Matlab*

On veut calculer l'image A' du point

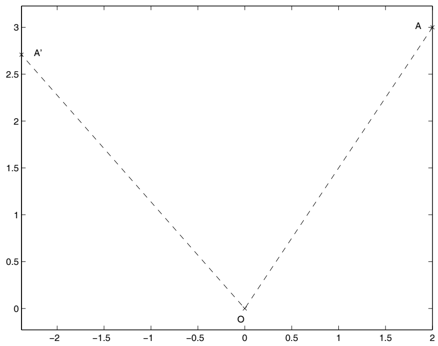
$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

par la rotation de centre O et d'angle $t = 5\pi/12$.

```
» O=[0 ;0] ; A=[2 ;3] ;
» t =5*pi/12 ;
» R=[cos(t) -sin(t) ; sin(t) cos(t)] ;
» A1= R*A
A1 =
   -2.3801
   2.7083
```

On dessine les points A, O, A' :

```
» Fig=[A O A1] ;
» clf
» plot(Fig(1, :),Fig(2, :),'kx')
» hold on ;axis equal
» plot(Fig(1, :),Fig(2, :),'k–')
» gtext('O') ;gtext('A') ;gtext('A''') ;
```



9.1.3.3. *Cas où $f(O) \neq O$*

Dans le cas où $f(O) \neq O$, on ne peut pas obtenir de relation matricielle aussi simple. Considérons par exemple une translation plane de vecteur

$$\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

dans un repère donné. La relation $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v}$ entraîne immédiatement

$$\begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$$

qui ne peut se mettre sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Par contre, en remarquant que

$$\begin{cases} x' = 1x + 0y + a \times 1 \\ y' = 0x + 1y + b \times 1, \end{cases}$$

on a la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cela conduit à associer au point M non plus un couple mais un triplet de coordonnées et à utiliser pour cela la notion de coordonnées homogènes.

9.2. Coordonnées homogènes et transformations planes

9.2.1. *Coordonnées homogènes d'un point du plan*

9.2.1.1. *Définition*

Le plan est rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Etant donné un point M de coordonnées (cartésiennes)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

on appelle coordonnées homogènes de M tout triplet

$$\begin{pmatrix} tx \\ ty \\ t \end{pmatrix},$$

avec $t \in \mathbb{R}^*$. Un point M a donc une infinité de coordonnées homogènes, définies à un facteur multiplicatif près. Si on choisit $t = 1$, on retrouve le triplet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

introduit au paragraphe ci-dessus.

Inversement, si on se donne un triplet

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix},$$

on cherche s'il existe un point M admettant ce triplet pour coordonnées homogènes. Les coordonnées cartésiennes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

de M doivent vérifier : il existe $t \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} tx & = & X \\ ty & = & Y \\ t & = & T. \end{array} \right.$$

D'après la troisième équation et par substitutions dans les deux premières, on a :

– Si $T \neq 0$, il existe un unique point M dont les coordonnées homogènes sont données ; il a pour coordonnées cartésiennes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X/T \\ Y/T \end{pmatrix}.$$

– Si $T = 0$, aucun point M du plan n'est solution.

9.2.1.2. *Interprétation géométrique*

On plonge le plan de repère

$$\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$$

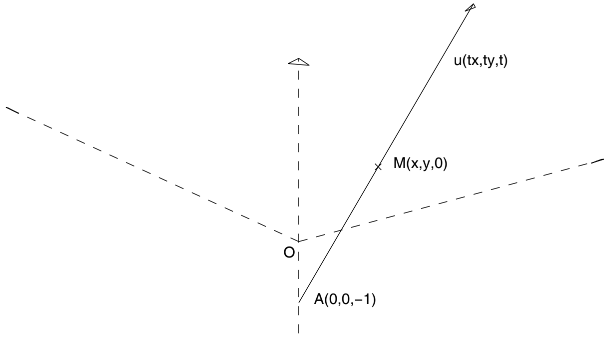
dans l'espace rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, et on considère le point

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A tout point M du plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, de coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on fait correspondre l'ensemble des vecteurs non nuls colinéaires à $\overrightarrow{AM}$. Ces vecteurs vérifient

$$\overrightarrow{u} = t.\overrightarrow{AM}$$

et ont donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} tx \\ ty \\ t \end{pmatrix}$.



Ainsi, les coordonnées homogènes d'un point M du plan s'interprètent comme les coordonnées cartésiennes des vecteurs non nuls de l'espace colinéaires à $\overrightarrow{AM}$.

9.2.1.3. *Calcul avec Matlab*

Etant donné un tableau de coordonnées cartésiennes (représentant par exemple les sommets successifs d'une ligne polygonale), il sera utile par la suite de lui associer le tableau des coordonnées homogènes associé. On peut le faire à l'aide d'une fonction *Matlab cart2Homog* :

```
function Mh = cart2Homog(Mc)
m = size(Mc,2) ; % nombre de points
L = ones(1,m) ;
Mh = [Mc ;L] ;% on ajoute une ligne de 1
```

Exemple d'utilisation

```
» A=[2 ;1] ;
» B =[5 ;-1] ;
» C =[4 ;4] ;
» T= [A B C]
 T =  2 5 4
      1 -1 4
» Thomog= cart2Homog(T)
 Thomog =  2 5 4
           1 -1 4
           1 1 1
```

On définit de même une fonction *homog2Cart* qui convertit les coordonnées homogènes d'une suite de points en leurs coordonnées cartésiennes. Pour cela, on divise les deux premières lignes de la matrice des coordonnées homogènes par la dernière :

```
function Mc = homog2Cart(Mh)
Mc(1, :) =Mh(1, :)./Mh(3, :) ;
Mc(2, :) =Mh(2, :)./Mh(3, :) ;
end
```

Exemple d'utilisation :

```
» F = [1 1 2 4 ; 2 5 6 3 ; 3 3 3 1]
F =
1 1 2 4
2 5 6 3
3 3 3 1
» homog2Cart(F)
ans =
0.3333 0.3333 0.6667 4.0000
0.6667 1.6667 2.0000 3.0000
```

9.2.2. *Matrice, en coordonnées homogènes, de transformations usuelles*

9.2.2.1. *Translation de vecteur* $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *(repère* $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ *quelconque)*

On a vu au paragraphe 9.1.3.3 que les coordonnées homogènes du translaté M' d'un point M peuvent être données par la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.2.2.2. *Remarque*

Si les coordonnées homogènes de M sont multipliées par un même facteur non nul t, celles de M' le sont aussi. Il en sera de même si on multiplie la matrice 3×3 de la translation par t. La matrice de la translation est donc elle-même définie à un facteur non nul près. Cette remarque vaut également pour les matrices de toutes les autres transformations.

9.2.2.3. *Homothétie de centre O, de rapport k (repère* $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ *quelconque)*

La relation vectorielle $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ se traduit en coordonnées cartésiennes par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix},$$

et en coordonnées homogènes par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.2.2.4. *Changement d'échelle*

En infographie, on généralise la notion précédente en introduisant des facteurs multiplicatifs différents k et l selon la direction $\left(O, \vec{i}\right)$ et la direction $\left(O, \vec{j}\right)$. Cela permet en pratique "d'allonger" ou "d'aplatir" la figure. On a cette fois-ci les relations :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ly \end{pmatrix},$$

et en coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.2.2.5. *Rotation de centre O, d'angle θ (repère* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *orthonormé direct)*

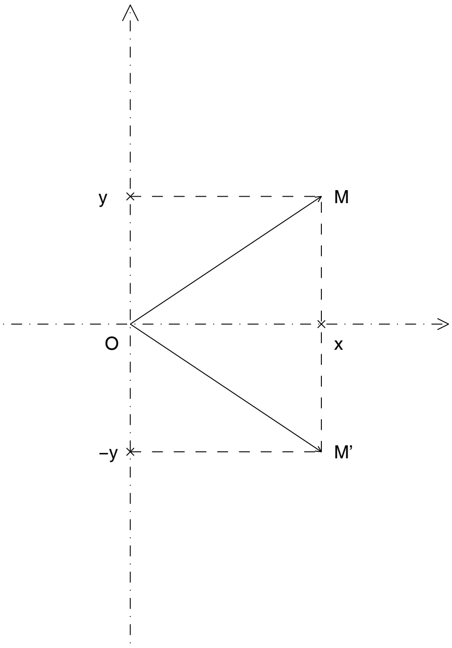
On a obtenu au paragraphe 9.1.3.1 la relation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

En coordonnées homogènes, on peut donc écrire :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.2.2.6. *Symétrie orthogonale d'axe* $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$*(repère* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *orthonormé)*



On a les relations classiques

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},$$

d'où, en coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.2.2.7. *Application affine quelconque, relativement à un repère* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

Soit f l'application affine qui transforme $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ en $\left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$ avec

$$O'\begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{i'}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{j'}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

On a vu au paragraphe 9.1.3 que l'image M' d'un point quelconque M a ses coordonnées cartésiennes définies par

$$\begin{pmatrix} x' - x_{O'} \\ y' - y_{O'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On vérifie que cette égalité peut s'écrire, à l'aide des coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & x_{O'} \\ c & d & y_{O'} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.2.3. *Image d'une figure*

On considère une figure définie par une suite de points $F = (M_1 M_2 \cdots M_n)$. F peut tout aussi bien être un segment de droite ($n = 2$), une ligne polygonale, n points d'une courbe plane. On souhaite construire la transformée $F' = (M_1' M_2' \cdots M_n')$ de la figure F, par une transformation de matrice T en coordonnées homogènes donnée. On pourrait obtenir les coordonnées homogènes de $M_1', M_2', \cdots M_n'$ en multipliant successivement T par la matrice-colonne des coordonnées homogènes de chaque point de la figure F. Mais les règles de calcul ligne par colonne du produit matriciel font que cela revient à multiplier globalement la matrice T par la matrice

$$\mathcal{M}_F = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \\ T_1 & T_2 & \cdots & T_n \end{pmatrix},$$

obtenue en juxtaposant les colonnes $\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ T_i \end{pmatrix}$ des coordonnées homogènes des points M_i.

Exemple

On utilise *Matlab* pour représenter le triangle ABC et son image par la rotation de centre O et d'angle $3\pi/4$, les points A, B et C étant donnés par leurs coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Pour cela, on définit la matrice de la rotation :

```
» c = cos(3*pi/4) ; s= sin(3*pi/4) ;
» R=[c -s 0 ; s c 0 ; 0 0 1]
R =
   -0.7071 -0.7071    0
   0.7071 -0.7071     0
      0          0       1.0000
```

On dessine la ligne polygonale fermée $(ABCA)$ et le centre O de la rotation

```
» A=[2 ;1] ;B=[5 ;-1] ;C=[4 ;4] ;
» Fc =[A B C A]
Fc =
    2 5 4 2
   1 -1 4 1
» axis equal ; hold on
» plot(0,0,'kx')
» plot (Fc(1, :),Fc(2, :),'k')
```

On applique la matrice de la rotation R à la matrice en coordonnées homogènes du triangle. On utilise pour cela la fonction de conversion *cart2Homog* (vue au paragraphe 9.2.1.3).

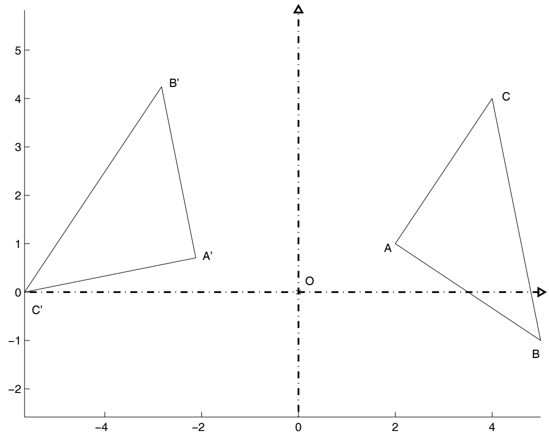
```
» F= cart2Homog(Fc) ;
» F1=R*F
F1 =
   -2.1213 -2.8284 -5.6569 -2.1213
   0.7071 4.2426 0.0000 0.7071
   1.0000 1.0000 1.0000 1.0000
```

On reconvertit la matrice de la figure image F_1 en coordonnées cartésiennes, en utilisant cette fois-ci la fonction *homog2Cart* (voir paragraphe 9.2.1.3) et on dessine l'image obtenue :

```
» F1c=homog2Cart(F1) ;
» plot (F1c(1, :),F1c(2, :),'k')
```

On complète la figure en dessinant le repère (voir chapitre 2, paragraphe 2.1.3.3) et en marquant le nom des points :

```
» dessineRepere
» gtext('O')
» gtext('A') ;gtext('B') ;gtext('C') ;
» gtext('A'') ;gtext('B'') ;gtext('C'') ;
```



9.2.4. *Composition de transformations et matrices en coordonnées homogènes*

9.2.4.1. *Propriété*

Soient f et g deux transformations planes admettant respectivement F et G pour matrices en coordonnées homogènes, relativement à un repère fixé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Etant donné un point M quelconque de coordonnées homogènes $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix}$, on note M' $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{pmatrix}$ son image par f et M'' $\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ T'' \end{pmatrix}$ l'image de M' par g. On a les relations matricielles :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{pmatrix} = F.\begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ T'' \end{pmatrix} = G.\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ T'' \end{pmatrix} = G.F.\begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix}$$

Ainsi :

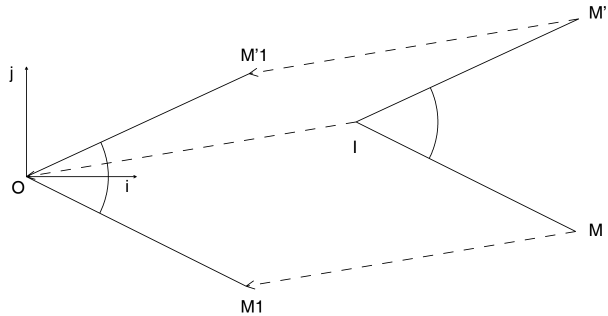
> *Si f et g admettent pour matrices respectives en coordonnées homogènes F et G, alors leur composée $g \circ f$ admet pour matrice en coordonnées homogènes $G \times F$.*

9.2.4.2. *Remarque*

Etant donné une transformation f, on cherchera à l'écrire comme composée de transformations usuelles (dont on connaît les matrices en coordonnées homogènes). On utilisera ensuite le théorème ci-dessus pour obtenir la matrice de f.

9.2.4.3. *Exemple*

Considérons une rotation plane $r = R_{(I,\theta)}$ de centre $I \begin{pmatrix} x_I \\ y_I \end{pmatrix}$ et d'angle θ. On peut la décomposer en une suite de trois transformations :



– $t_{\overrightarrow{IO}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$,
– $R_{(O,\theta)}$ la rotation de centre O d'angle θ,
– $t_{\overrightarrow{OI}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$.

En effet, si on considère M un point quelconque du plan, M' son image par r et si on note M_1 et M_1' les translatés de M et M' par la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$, on a par propriétés géométriques des translations et des rotations :

$$OM_1 = OM_1' \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_1'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) = \theta,$$

ce qui prouve

$$M' = t_{\overrightarrow{OI}}(M_1') = t_{\overrightarrow{OI}}(R_{(O,\theta)}(M_1)) = t_{\overrightarrow{OI}}(R_{(O,\theta)}(t_{\overrightarrow{IO}}(M))).$$

$R_{(I,\theta)} = t_{\overrightarrow{OI}} \circ R_{(O,\theta)} \circ t_{\overrightarrow{IO}}$ a donc pour matrice en coordonnées homogènes

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_I \\ 0 & 1 & y_I \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_I \\ 0 & 1 & -y_I \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.2.5. *Réciproque d'une transformation et matrices en coordonnées homogènes*

Soit f une transformation plane admettant F pour matrice en coordonnées homogènes, relativement à un repère fixé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On a alors :

- *f est bijective si et seulememt si F est inversible.*
- *Si f est bijective, f^{-1} admet F^{-1} pour matrice en coordonnées homogènes.*

En effet, si on note $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{pmatrix}$ les coordonnées homogènes de deux points M et M', on a les équivalences :

– f est bijective.

– Pour tout point M', il existe un unique point M tel que $M' = f(M)$.

– Pour tout triplet $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{pmatrix}$, il existe un unique triplet $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{pmatrix} = F \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix}.$$

– La matrice F est inversible.

De plus, si les propriétés ci-dessus sont vérifiées, la relation

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{pmatrix} = F \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix}$$

est équivalente à

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix} = F^{-1} \times \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{pmatrix},$$

ce qui montre que M est l'image de M' par l'application de matrice F^{-1}.

9.2.6. *Formule de changement de repère en coordonnées homogènes*

On reprend les notations usuelles en se donnant deux repères

$$\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right), \left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right),$$

le second étant caractérisé par ses coordonnées relativement au premier :

$$O'\begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \end{pmatrix}, \overrightarrow{i'}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overrightarrow{j'}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Pour un point M de cooordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ relativement au repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ relativement à $\left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$, on rappelle les formules de changement de repère obtenues au chapitre "Calcul vectoriel et géométrie" (paragraphe 7.4.3.2, p. 215) :

$$\begin{pmatrix} x - x_{O'} \\ y - y_{O'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Cette égalité matricielle peut aussi s'écrire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & x_{O'} \\ c & d & y_{O'} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En introduisant f, application affine transformant $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ en $\left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$, on reconnait dans l'égalité ci-dessus la matrice en coordonnées homogènes de f. Pour obtenir la formule de changement de repère ci-dessus, il suffit donc de déterminer géométriquement l'application affine qui transforme $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ en $\left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$, et de se rappeler qu'on multiplie la matrice de cette application affine par les nouvelles coordonnées homogènes d'un point pour en retrouver les anciennes.

9.3. Coordonnées homogènes et transformations de l'espace

9.3.1. *Coordonnées homogènes d'un point de l'espace*

Les définitions et propriétés sont analogues à celles données pour le plan. L'espace étant rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, pour tout point M de coordonnées (cartésiennes) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on appelle coordonnées homogènes de M tout quadruplet $\begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \\ t \end{pmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}^*$.

Inversement, si on se donne un quadruplet $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}$, avec $T \neq 0$, il existe un unique point M dont les coordonnées homogènes sont égales à ce quadruplet, et M

pour coordonnées cartésiennes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X/T \\ Y/T \\ Z/T \end{pmatrix}.$$

La fonction *cart2Homog* définie précédemment pour un tableau de points du plan s'adapte à l'espace, puisqu'elle a pour effet d'ajouter une ligne de 1 aux coordonnées cartésiennes.

On réécrit la fonction *homog2Cart*, pour qu'elle soit utilisable aussi bien dans le plan que dans l'espace.

```
function Mc = homog2Cart(Mh)
n = size(Mh,1) ;
Mc(1, :) =Mh(1, :)./Mh(n, :) ;
Mc(2, :) =Mh(2, :)./Mh(n, :) ;
if (n==4)
   Mc(3, :) =Mh(3, :)./Mh(n, :) ;
end
```

9.3.2. *Matrices des transformations de l'espace*

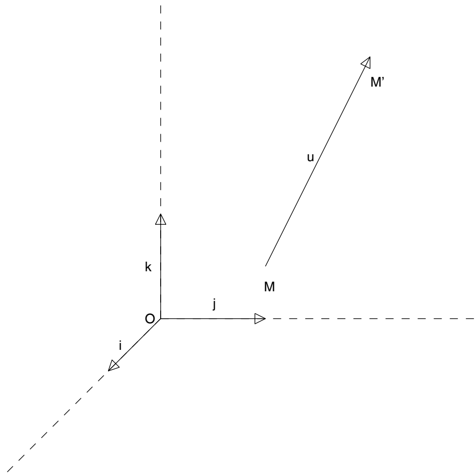
Les définitions, l'utilisation, les propriétés de ces matrices relatives à la composée, à la réciproque, au changement de repère sont identiques à celles des matrices des transformations planes. Il suffit donc là aussi de connaître la matrice de certaines transformations de base, et de décomposer une transformation quelconque à l'aide de ces transformations élémentaires (voir exercice 9.5.6).

On note respectivement

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix},$$

un point quelconque de l'espace et son image par la transformation considérée. On donnera dans chaque cas une caractérisation géométrique, l'expression analytique et l'expression matricielle des coordonnées homogènes de M' en fonction de celles de M.

9.3.2.1. *Translation t de vecteur $\overrightarrow{u}(a,b,c)$*



On a, géométriquement

$$M' = t(M) \Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u},$$

analytiquement

$$\begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \\ z' - z = c, \end{cases}$$

et matriciellement

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.3.2.2. *Rotation autour d'un axe de coordonnées.*

Dans ce paragraphe, on suppose le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ orthonormé direct.

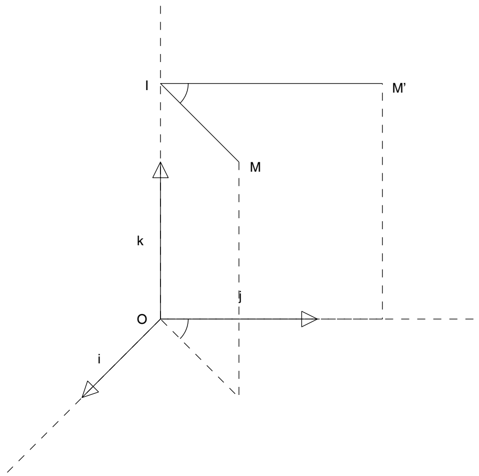
1) La rotation r d'axe $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$ et d'angle θ.

Elle peut être définie géométriquement de la manière suivante :

- on construit le plan P passant par M, perpendiculaire $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$, orienté par la base directe $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$;

- on note I le point d'intersection de P et de $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$;

- on construit alors M' image de M par la rotation plane de P, de centre I, d'angle θ.



Pour trouver l'expression analytique de r, on peut donc utiliser les formules des rotations planes, permettant de calculer x' et y' en fonction de x et y. On a

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z, \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) La rotation r d'axe $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ et d'angle θ.

De manière analogue et partant de $M' = r(M)$, on a

$$\begin{cases} y' = y\cos\theta - z\sin\theta \\ z' = y\sin\theta + z\cos\theta \\ x' = x, \end{cases}$$

et

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3) La rotation r d'axe $\left(O, \overrightarrow{j}\right)$ et d'angle θ.
On obtient de même

$$\begin{cases} z' = z\cos\theta - x\sin\theta \\ x' = z\sin\theta + x\cos\theta \\ y' = y \end{cases}$$

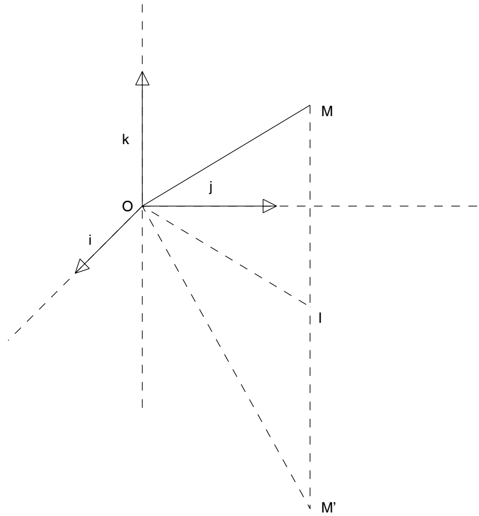
et

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.3.2.3. *Symétrie orthogonale s par rapport au plan* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

Le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace est supposé orthonormé direct.

On construit le point d'intersection I du plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ avec la perpendiculaire à ce plan passant par M, puis le point M' tel que I soit le milieu de $[MM']$.



De $M' = s(M)$, on déduit les caractérisations

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$$

et

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.4. Projections et leurs matrices en coordonnées homogènes

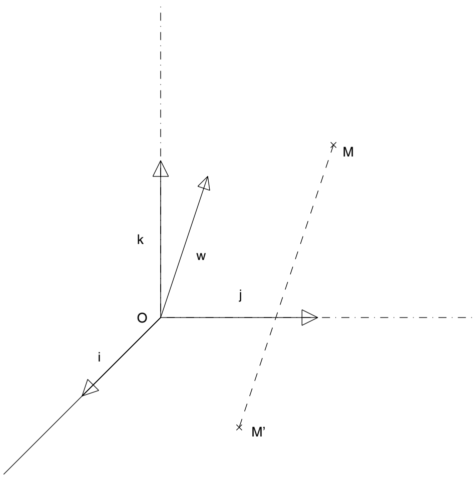
Les projections de l'espace sur un plan permettent en pratique d'obtenir une vue plane (sur un écran graphique d'ordinateur par exemple) d'un objet de l'espace.

On associe à ces projections une matrice en coordonnées homogènes, ce qui permet d'effectuer les calculs de coordonnées des projetés, notamment lorsqu'on compose une projection avec des rotations, translations, etc...

On s'intéresse d'abord aux différentes projections usuelles sur le plan de coordonnées $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

9.4.1. *Différents types de projections sur le plan* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

9.4.1.1. *Projection parallèle selon la direction* $(O, \overrightarrow{w})$



On donne un vecteur $\overrightarrow{w}$, n'appartenant pas à la direction du plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Le projeté d'un point M, sur le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ suivant la direction de la droite $(O, \overrightarrow{w})$, est le point M', intersection du plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et de la droite passant par M et parallèle à $(O, \vec{w})$.

Si on note

$$\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \ M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

on a $\overrightarrow{MM'} = k.\vec{w}$, d'où

$$\begin{cases} x' - x = k.a \\ y' - y = k.b \\ z' - z = k.c, \end{cases}$$

et

$$z' = 0 \ .$$

Nécessairement $c \neq 0$, car le vecteur $\vec{w}$ n'apprtient pas à la direction du plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On a donc

$$k = -z/c,$$

d'où

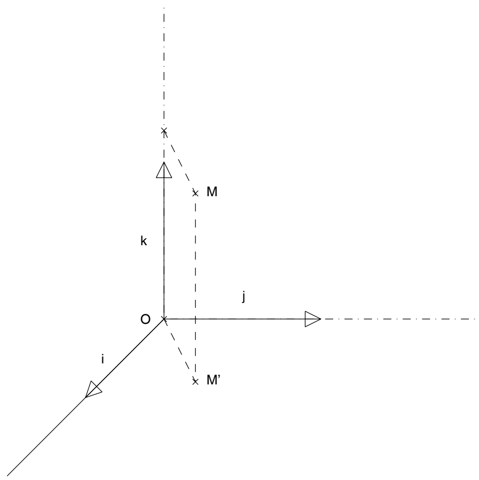
$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{a}{c}z \\ y' = y - \dfrac{b}{c}z \\ z' = 0 \end{cases},$$

et l'égalité matricielle en coordonnées homogènes

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a/c & 0 \\ 0 & 1 & -b/c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.4.1.2. *Projection orthogonale*

Un cas particulier important de projection parallèle est celui où la droite $(O, \vec{w})$ est perpendiculaire au plan de projection $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On parle alors de projection orthogonale sur ce plan.



En reprenant les résultats ci-dessus, avec le vecteur

$$\overrightarrow{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix},$$

on a, dans le cas d'une projection orthogonale, les égalités

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

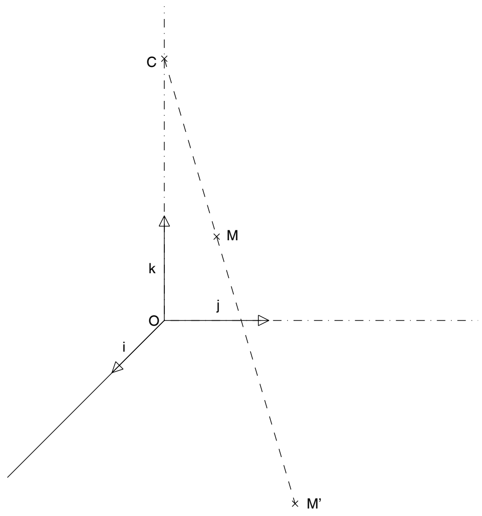
et

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = 0. \end{cases}$$

9.4.1.3. *Projection perspective de centre C*

On donne un point C n'appartenant pas au plan de projection $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. La projection perspective, de centre C, sur le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ transforme un point M de l'espace en M', point d'intersection du plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et de la droite (CM). Le point M' n'est pas défini si M appartient au plan passant par C et parallèle à

$\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



Pour le calcul, on choisit C sur l'axe $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$, et on note $C\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}$. On a par définition de M'

$$\overrightarrow{CM'} = k.\overrightarrow{CM},$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} x' - 0 = k.\left(x - 0\right) \\ y' - 0 = k.\left(y - 0\right) \\ z' - c = k.\left(z - c\right), \end{array}\right.$$

et

$$z' = 0 \quad .$$

M n'appartenant pas au plan $\left(C, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on a $z \neq c$. On peut donc écrire

$$k = -\frac{-c}{z - c},$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -\dfrac{-c}{z - c}x \\ y' = -\dfrac{-c}{z - c}y \\ z' = 0. \end{array}\right. \quad .$$

On ne peut pas exprimer matriciellement les coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, mais en introduisant les coordonnées homogènes X', Y', Z', T' telles que

$$X' = T'x', \quad Y' = T'y', \quad Z' = T'z'$$

avec

$$T' = z - c,$$

on a

$$\begin{cases} X' = -cx \\ Y' = -cy \\ Z' = 0 \\ T' = z - c \end{cases},$$

et matriciellement

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.4.1.4. *Remarque*

Etudions l'image de droites parallèles par une projection perspective sur le plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Considérons par exemple les droites D_n passant par le point $A_n \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à D_n si et seulement si

$$\overrightarrow{A_n M} = t.\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les coordonnées cartésiennes de M vérifient donc

$$\begin{cases} x = n + t \\ y = t \\ z = t. \end{cases}$$

Pour $t \neq c$, le projeté M' de M a ses coordonnées homogènes définies par

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n + t \\ t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c(n + t) \\ -ct \\ 0 \\ t - c \end{pmatrix},$$

d'où les coordonnées cartésiennes

$$M' \begin{pmatrix} \dfrac{-c(n+t)}{t-c} \\ \dfrac{-ct}{t-c} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut mettre ces coordonnées sous la forme

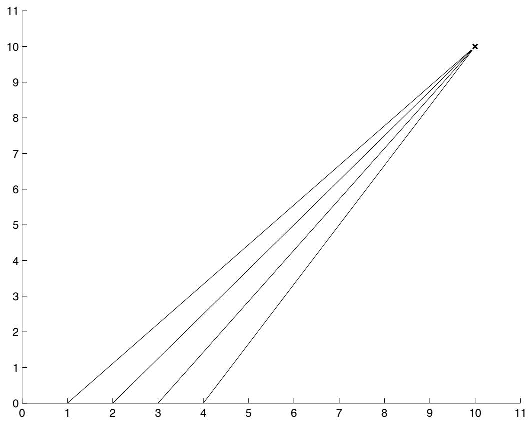
$$M' \begin{pmatrix} -c - \dfrac{c(n+c)}{t-c} \\ -c - \dfrac{c^2}{t-c} \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que, lorsque M varie sur D_n, le point M' apppartient à la droite D'_n passant par le point $\Omega \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}$, et de vecteur directeur $\overrightarrow{w_n} \begin{pmatrix} -c(n+c) \\ -c^2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Toutes ces droites sont sécantes en Ω, appelé point de fuite : c'est l'effet de perspective. On peut illustrer graphiquement cette propriété, en définissant quatre droites D_n, ou plutôt quatre segments $[A_nB_n]$ portés par ces droites, et en construisant leurs images par projection perspective.

```
» clf ;hold on
» c=-10 ;
» MatProjPers=[-c 0 0 0 ;0 -c 0 0 ; 0 0 0 0 ;0 0 1 -c] ;
» v=[1 ;1 ;1] ;
» t=1000 ;
» for n=1 :4
   An= [n ;0 ;0] ;
   Bn=An+t*v ;
   Dn=[An Bn] ;
   DnHomog=cart2Homog(Dn) ;
   DnPrimeHomog=MatProjPers*DnHomog ;
   DnPrime=homog2Cart(DnPrimeHomog) ;
   plot(DnPrime(1, :),DnPrime(2, :))
end
```

On construit également le point $\Omega \begin{pmatrix} -c \\ -c \end{pmatrix}$ du plan de projection $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

```
» plot(-c,-c,'x','LineWidth',1.5)
» axis ([0 11 0 11])
```



On notera que, les projections perspectives ne conservant pas le parallélisme, ce ne sont pas des applications affines.

9.4.2. *Projections sur un plan quelconque* P

Pour représenter l'image d'une figure V de l'espace par projection perspective de centre C sur un plan P, on construit une transformation f (obtenue par composition de rotations et translations) par laquelle P a pour image le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, et C a pour image un point C' de l'axe $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$.

En appliquant la transformation f à la figure V, on obtient une figure V' isométrique de V et la projection perspective de centre C sur le plan P pour la figure V se ramène à une projection perspective de centre C' sur le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ pour la figure V'.

En pratique, il suffit donc de déterminer la matrice de la transformation f pour obtenir les coordonnées de V', puis d'effectuer les calculs matriciels du paragraphe précédent, à partir des coordonnées des points de la figure V' (voir exercice 9.5.6 p. 298).

On procède de manière analogue lorsqu'il s'agit d'une projection orthogonale ou oblique sur un plan quelconque P.

9.4.3. *Représentation d'une figure de l'espace avec Matlab*

Par défaut, les figures de l'espace dessinées à l'aide des commandes *plot3*, *surf*, *mesh*, etc..., sont visualisées en utilisant une projection orthogonale sur un plan P. On peut modifier la direction de ce plan par la commande

$$\mathbf{view}([\mathbf{X\ Y\ Z}]),$$

où X, Y, Z représentent les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ normal à P.

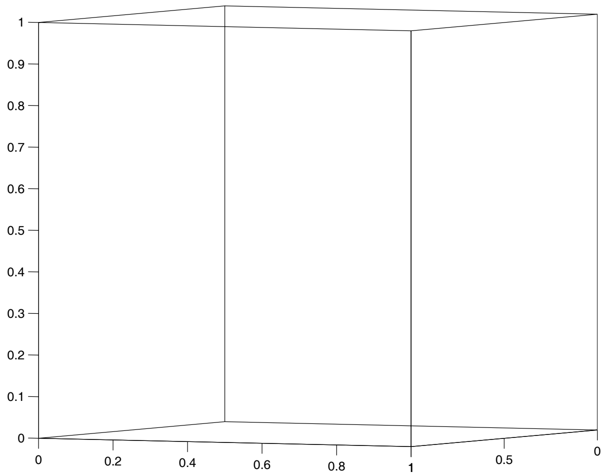
On définit par exemple le cube unité avec *Matlab* en construisant la suite des sommets qui permettra de dessiner toutes ses arêtes.

```
» A1=[0 ;0 ;0] ;A2=[1 ;0 ;0] ;A3=[1 ;1 ; ;0] ;A4=[0 ;1 ;0] ;
» B1=[0 ;0 ;1] ;B2=[1 ;0 ;1] ;B3=[1 ;1 ; ;1] ;B4=[0 ;1 ;1] ;
» Cube=[A1 A2 B2 A2 A3 B3 A3 A4 B4 A4 A1 B1 B2 B3 B4 B1] ;
```

On le représente à l'aide de la commande *plot3*, en définissant un vecteur normal au plan de projection

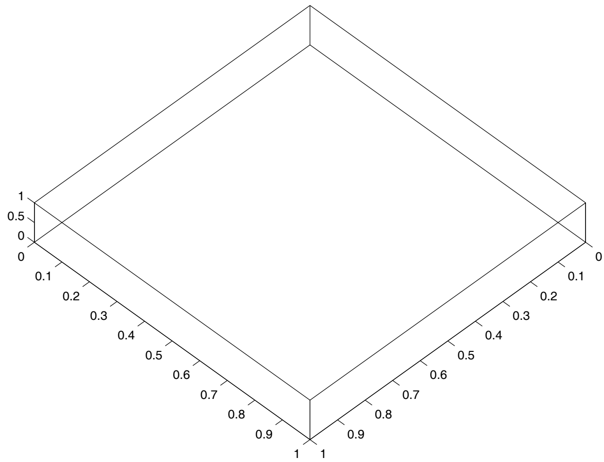
– "presque horizontal"

```
» view([20 10 1]) ;hold on
» plot3(Cube(1, :),Cube(2, :),Cube(3, :))
```



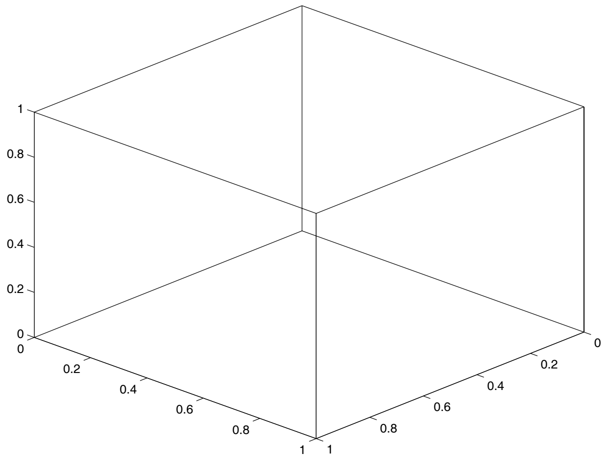
– "presque vertical"

```
» clf ;view([1 1 10]) ;hold on
» plot3(Cube(1, :),Cube(2, :),Cube(3, :))
```



– "oblique"

```
» clf ;view([20 19 18 ]) ;hold on
» plot3(Cube(1, :),Cube(2, :),Cube(3, :))
```



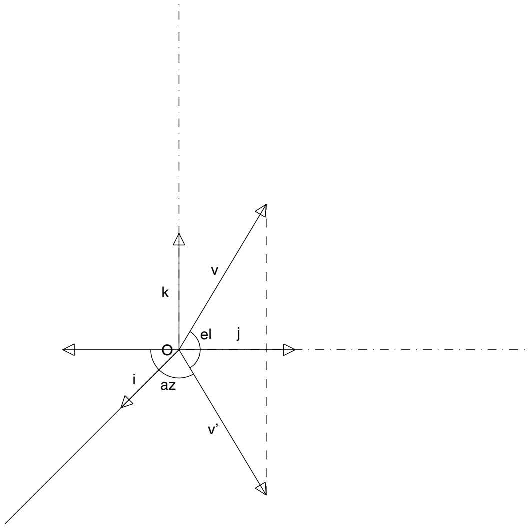
La commande *view* accepte aussi deux paramètres angulaires :

$$view(az, el)$$

où az et el sont des angles mesurés en degrés permettant de définir la direction de $\overrightarrow{v}$, vecteur normal au plan de projection :

– $az = \left(\widehat{-\overrightarrow{j}, \overrightarrow{v'}}\right)$ est l'angle du plan horizontal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ entre le vecteur $-\overrightarrow{j}$ et le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{v}$ sur ce plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

– $el = \left(\widehat{\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{v}}\right)$ est un angle du plan vertical contenant les deux vecteurs $\overrightarrow{v'}$ et $\overrightarrow{v}$, compté positivement si le vecteur $\overrightarrow{v}$ a une cote positive, négativement sinon.



Par analogie avec un mode de repérage utilisé en astronomie, az et el sont appelés azimut et élévation.

Si on n'utilise pas explictement la commande *view*, les valeurs par défaut du graphisme 3D de *Matlab* sont :

$$az = -37,5^\circ \quad \text{et} \quad el = 30^\circ.$$

9.5. Exercices

9.5.1. *Quelques matrices en coordonnées homogènes*

Pour automatiser les calculs ultérieurs, on définit les fonctions *Matlab*

$$matTrans(V), matRotO(theta), matSymOx, matEchO(k,l)$$

qui retournent les matrices en coordonnées homogènes des transformations planes du paragraphe 9.2.2.

Par exemple :

```
function M=matTrans(V)
M =[ 1 0 V(1) ;
     0 1 V(2) ;
     0 0 1 ] ;
```

Procéder de même pour définir les autres fonctions.

(solution p. 300)

9.5.2. *Rotation et symétrie orthogonale*

1) On considère dans un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la ligne polygonale $ABCDEF$, avec

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}, D\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, E\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}.$$

Construire avec *Matlab* cette ligne polygonale et son image par la rotation de centre $I\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et d'angle $3\pi/4$.

2) On considère la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(O, \overrightarrow{u})$ formant un angle α avec l'axe des abscisses. La décomposer en une suite de transformations de base (cf 9.2.2).

3) Donner la matrice de la symétrie d'axe $(O, \overrightarrow{u})$ dans le cas

$$\alpha = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}\right) = \pi/3,$$

et construire l'image de la ligne polygonale $(ABCDEF)$ par cette symétrie.

(solution p 300)

9.5.3. *Rotation et translation*

1) Vérifier par le calcul matriciel les propriétés géométriques suivantes :

a) La transformation réciproque de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est la translation de vecteur $-\overrightarrow{v}$.

b) La transformation réciproque de la rotation r de centre O, d'angle θ est la rotation de centre O, d'angle $-\theta$.

2) En écrivant la rotation $r = R_{(I,\theta)}$ de centre $I\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \end{pmatrix}$ et d'angle θ comme composée de transformations du type ci-dessus (voir paragraphe 9.2.4.3), retrouver sa transformation réciproque. On rappelle que, si M_1 et M_2 sont deux matrices inversibles de même taille, $M_1 \times M_2$ l'est aussi, et vérifie

$$(M_1 \times M_2)^{-1} = M_2^{-1} \times M_1^{-1}.$$

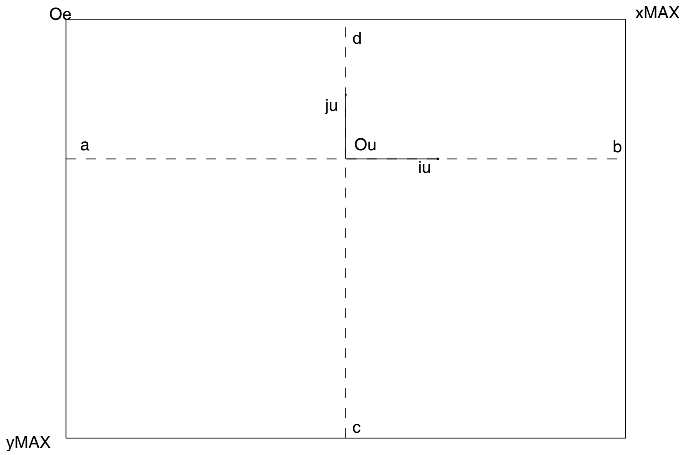
(solution p. 303)

9.5.4. *Ecran graphique*

Sur un écran graphique, chaque point écran (pixel) est représenté par deux coordonnées entières (x_e, y_e) telles que :

$$0 \leqslant x_e \leqslant x_{MAX} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y_e \leqslant y_{MAX}$$

à partir d'une origine O_e située en haut à gauche de l'écran. x_{MAX} et y_{MAX} sont deux constantes dépendant de la résolution graphique. Par exemple, en mode VGA, $x_{MAX} = 640$ et $y_{MAX} = 480$.



On veut utiliser un tel écran pour représenter des points de coordonnées (x, y) dans un repère orthogonal cadré de telle sorte que

$$a \leqslant x \leqslant b \text{ et } c \leqslant y \leqslant d.$$

On note $\left(O_e, \overrightarrow{i_e}, \overrightarrow{j_e}\right)$ le repère "écran" et $\left(O_u, \overrightarrow{i_u}, \overrightarrow{j_u}\right)$ le repère "utilisateur".

1) Trouver une suite de transformations simples permettant de passer du repère $\left(O_u, \overrightarrow{i_u}, \overrightarrow{j_u}\right)$ au repère $\left(O_e, \overrightarrow{i_e}, \overrightarrow{j_e}\right)$.

2) En déduire la formule matricielle permettant de passer, en coordonnées homogènes, des coordonnées "écran" aux coordonnées "utilisateur".

3) On se place dans le cas :

$$x_{MAX} = 640, \quad y_{MAX} = 480, \quad a = -6, \quad b = 2, \quad c = -3, \quad d = 1.$$

a) L'utilisateur se place sur le pixel de coordonnées (400, 200). A quel point du repère utilisateur cela correspond-il ?

b) Quel pixel correspond à O_u ? Quel pixel correspond au point de coordonnées $(-1, -2)$ du repère utilisateur ?

(solution p. 304)

9.5.5. *Projection parallèle et projection perspective*

On considère les points A, B, C, D, E, F, avec

$$A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, D\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}, E\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

et la figure formée par les deux faces $ABCD$ et $CDEF$.

1) Vérifier que ces deux faces sont des rectangles.

2) Construire le projeté de cette figure par la projection parallèle, sur $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ suivant la direction $(O, \overrightarrow{w})$, avec

$$\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}.$$

3) Construire également le projeté de cette figure par la projection perspective sur $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, de centre $I\begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix}$.

(solution p. 306)

9.5.6. *Projection perspective sur un plan "oblique"*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Le but de cet exercice est de représenter un objet de l'espace en projection perspective sur un plan P passant par O. Le centre de la projection est un point N tel que

$$(ON) \perp P.$$

Si $P = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, le problème a déjà été résolu au paragraphe 9.4.1.3. On suppose dans la suite

$$P \neq \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right),$$

donc N n'appartient pas à la droite $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$.

Première partie

On cherche une suite de deux rotations de l'espace r_1 et r_2, autour d'axes de coordonnées, telles que leur composée $r_2 \circ r_1$ transforme la demi-droite $\left[O, \overrightarrow{ON}\right)$ en la demi-droite $\left[O, \overrightarrow{k}\right)$. Pour cela, on définit N' projeté orthogonal de N sur le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, puis les trois réels r, θ, φ tels que :

– $r = ON$,

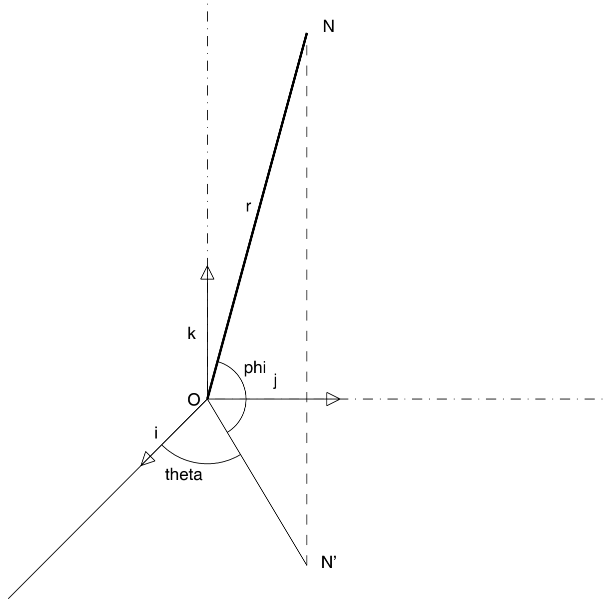
– $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{ON}}\right)$, angle orienté du plan rapporté au repère direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$,

– $\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{ON'}, \overrightarrow{ON}}\right)$, angle orienté du plan rapporté au repère direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{k}\right)$,

avec

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{ON'}\right\|}\overrightarrow{ON'}.$$

(Ces nombres r, θ, φ s'appellent les coordonnées sphériques de N).



1) Trouver l'angle d'une rotation de l'espace r_1, d'axe $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$, qui transforme la demi-droite $\left[O, \overrightarrow{ON'}\right)$ en la demi-droite $\left[O, \overrightarrow{j}\right)$. Caractériser le point $N" = r_1(N)$.

2) Trouver l'angle d'une rotation de l'espace r_2, d'axe $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$, qui transforme la demi-droite $\left[O, \overrightarrow{ON'''}\right)$ en la demi-droite $\left[O, \overrightarrow{k}\right)$.

3) Quelle est l'image de la demi-droite $\left[O, \overrightarrow{ON'}\right)$ par la composée

$$f = r_2 \circ r_1?$$

Quelle est l'image du plan P par f ? Celle de N ?

4) Donner la matrice F de f.

5) Vérifier par le calcul le résultat géométrique de la question 3, concernant l'image de N (on pourra calculer les coordonnées cartésiennes de N grâce à la fonction *Matlab* **sph2cart**.

Deuxième partie : application graphique

On choisit

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

et on considère le cube "unité" de l'espace, (les coordonnées de ses sommets sont toutes égales à 0 ou 1). Dessiner ce cube en projection perspective, en donnant à r successivement les valeurs $10, 5$.

(solution p. 309)

9.6. Solutions

Exercice 9.5.1

On utilise les matrices des transformations, vues au paragraphe 9.2.2 :

1) Rotation de ce centre O et d'angle θ.

```
function M=matRotO(theta)
   c = cos(theta) ;
   s = sin(theta) ;
   M = [c -s 0 ;
            s c 0 ;
            0 0 1 ] ;
```

2) Symétrie orthogonale d'axe $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$

```
function S=matSymOx
   S=[1 0 0 ;0 -1 0 ;0 0 1] ;
```

3) Changement d'échelle

```
function M=matChEch(kx,ky)
   M =[ kx 0 0 ; 0 ky 0 ; 0 0 1 ] ;
```

Exercice 9.5.2

1) On définit la matrice L des points A, B, C, D, E, F, A de la ligne polygonale que l'on construit

```
» L=[1 4 4 2 2 1 1 ;1 1 2 2 5 5 1] ;
» axis equal ; hold on
» plot(L(1, :),L(2, :),'k')
```

On calcule ensuite la matrice T de la composée $t_{\overrightarrow{OI}} \circ R_{(O,\theta)} \circ t_{\overrightarrow{IO}}$ (cf § 9.2.4.3), en utilisant les fonctions de l'exercice 9.5.1

```
» I=[1 ;0] ;
» T=matTrans(I)* matRotO(3*pi/4)*matTrans(I)
T =
-0.7071 -0.7071 0.2929
0.7071 -0.7071 0.7071
      0        0        1.0000
```

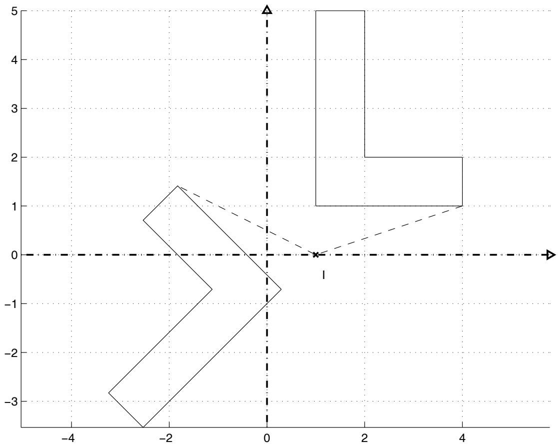
On multiplie par cette matrice T la matrice en coordonnées homogènes de la ligne polygonale, et on transforme le résultat en coordonnées cartésiennes, ceci en utilisant les fonctions *cart2Homog* et *homog2Cart* (voir paragraphe 9.2.1.3).

```
» L1= homog2Cart(T*cart2Homog(L))
L1 =
-1.1213 -3.2426 -3.9497 -2.5355 -4.6569 -3.9497 -1.1213
0.7071 2.8284 2.1213 0.7071 -1.4142 -2.1213 0.7071
» plot(L1(1, :),L1(2, :),'k')
```

On complète la figure en dessinant le repère, le point I, et en matérialisant l'angle de la rotation.

```
» dessineRepere ; grid on
» plot(I(1),I(2),'x','LineWidth',1.5)
» Angle =[L( :,2) I L1( :,2)] ;
» plot(Angle(1, :),Angle(2, :),'- -')
» gtext('I')
```

1)



2) Pour effectuer la symétrie $S_{(O,\overrightarrow{u})}$ par rapport à l'axe $(O,\,\overrightarrow{u})$, on peut effectuer :

- une rotation de centre O et d'angle $-\alpha$ qui amène l'axe $(O,\,\overrightarrow{u})$ sur l'axe $\left(O,\,\overrightarrow{i}\right)$,

- la symétrie orthogonale s d'axe $\left(O,\,\overrightarrow{i}\right)$,

- la rotation de centre O et d'angle α qui ramène l'axe $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ sur l'axe $(O, \overrightarrow{u})$.

D'où $S_{\left(O,\overrightarrow{u}\right)} = R_{(O,\alpha)} \circ s \circ R_{(O,-\alpha)}$.

3) On effectue les calculs dans le cas $\alpha = \pi/3$

```
» S=matRotO(pi/3)*matSymOx*matRotO(-pi/3)
S =
-0.5000 0.8660 0
0.8660 0.5000 0
0        0      1.0000
» L2=homog2Cart(S*cart2Homog(L))
L2 =
0.3660 -1.1340 -0.2679 0.7321 3.3301 3.8301 0.3660
1.3660 3.9641 4.4641 2.7321 4.2321 3.3660 1.3660
```

On dessine la figure $(ABCDEF)$ de départ et son image par la symétrie.

```
» clf ; axis equal ;hold on
» plot(L(1, :),L(2, :),'k')
» plot(L2(1, :),L2(2, :),'k')
```

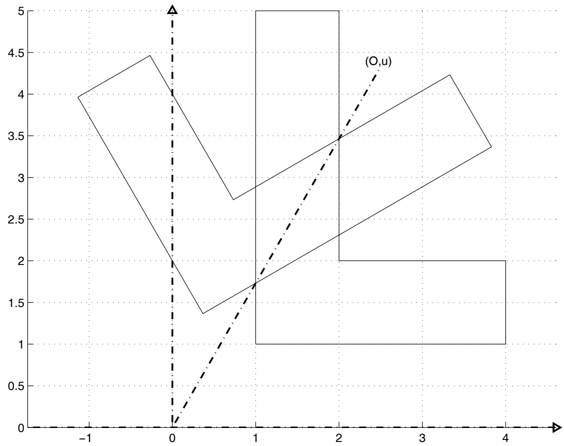
On représente aussi l'axe de symétrie, en choisissant deux points de cet axe : l'origine O du repère, et le point M tel que

$$\overrightarrow{OM} = 5.\overrightarrow{u},$$

soit

$$M\begin{pmatrix}5.\cos(\pi/3)\\5.\sin(\pi/3)\end{pmatrix}.$$

```
» O=[0 ;0] ;M=[5*cos(pi/3) ;5*sin(pi/3)] ;
» plot([O(1) M(1)],[O(2) M(2)],'-.','LineWidth',1.5)
» dessineRepere ;grid on
» gtext('(O,u)')
```



Exercice 9.5.3

1) a) On construit la matrice M de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, M^{-1} matrice de la transformation réciproque que l'on compare à la matrice M_1 de la translation de vecteur $-\overrightarrow{v}$.

```
» syms a b real ; v=[a ;b] ;
» M=matTrans(v) ;
» Mmoins1=M^(-1)
Mmoins1 =
   [ 1, 0, -a]
   [ 0, 1, -b]
   [ 0, 0, 1]
» M1=matTrans(-v)
M1 =
   [ 1, 0, -a]
   [ 0, 1, -b]
   [ 0, 0, 1]
```

Ce qui montre que $M_1 = M^{-1}$, d'où

$$(t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$$

b) On procède de même pour comparer les matrices de $\left[R_{(0,\theta)}\right]^{-1}$ et de $R_{(0,-\theta)}$.

```
» syms theta
» M=matRotO(theta) ;
» Mrecip=simplify(M^(-1))
Mrecip =
   [ cos(theta), sin(theta), 0]
   [ -sin(theta), cos(theta), 0]
   [ 0,              0,         1]
» Mopp=matRotO(-theta)
Mopp =
   [ cos(theta), sin(theta), 0]
   [ -sin(theta), cos(theta), 0]
   [ 0,                  0,     1]
```

2) On a vu que

$$R_{(I,\theta)} = t_{\overrightarrow{OI}} \circ R_{(O,\theta)} \circ t_{\overrightarrow{IO}},$$

donc

$$\begin{aligned}\left[R_{(I,\theta)}\right]^{-1} &= \left[t_{\overrightarrow{IO}}\right]^{-1} \circ \left[R_{(O,\theta)}\right]^{-1} \circ \left[t_{\overrightarrow{OI}}\right]^{-1} \\ &= t_{\overrightarrow{OI}} \circ R_{(O-,\theta)} \circ t_{\overrightarrow{IO}}.\end{aligned}$$

On le vérifie avec *Matlab*

```
» syms xI yI ; I=[xI ; yI] ;
» M=matTrans(I)* matRotO(theta)*matTrans(-I) ;
» Mrecip=simplify(matTrans(I)* matRotO(-theta)*matTrans(-I))
Mrecip =
[ cos(theta),    sin(theta),    -cos(theta)*xI-sin(theta)*yI+xI]
[ -sin(theta),    cos(theta),    sin(theta)*xI-cos(theta)*yI+yI]
[ 0,                0,              1]
» Verif = simplify(M^(-1))
Verif =
[ cos(theta),    sin(theta),    xI-sin(theta)*yI-cos(theta)*xI]
[ -sin(theta),    cos(theta),    -cos(theta)*yI+yI+sin(theta)*xI]
[ 0,                0,              1]
```

Exercice 9.5.4

1) On applique successivement :

- le changement d'échelle de centre O, de rapports $k = (b-a)/x_{MAX}$ dans la direction $\left(O_u, \overrightarrow{i_u}\right)$ et $l = (c-d)/y_{MAX}$ dans la direction $\left(O_u, \overrightarrow{j_u}\right)$ qui transforme le repère $\left(O_u, \overrightarrow{i_u}, \overrightarrow{j_u}\right)$ en $\left(O_u, \overrightarrow{i_e}, \overrightarrow{j_e}\right)$.

- la translation de vecteur $\overrightarrow{O_uO_e}$.

2) D'où la matrice M permettant de passer du repère utilisateur au repère écran, et les formules permettant de passer du repère écran au repère utilisateur :

```
» syms a b c d xMAX yMAX
» k=(b-a)/xMAX ; l =(c-d)/yMAX ;
» MchEch=[k 0 0 ; ...
             0 l 0 ; ...
             0 0 1] ;
» Mtrans=[1 0 a ; ...
          0 1 d ;...
          0 0 1] ;
» M =Mtrans * MchEch
M =
   [ (b-a)/xMAX, 0,           a]
   [ 0,          (c-d)/yMAX, d]
   [ 0,          0,           1]
```

et les formules de changement de repère sont donc

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b-a}{x_{MAX}} & 0 & a \\ 0 & \dfrac{c-d}{y_{MAX}} & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{b-a}{x_{MAX}} x_e + a \\ \dfrac{c-d}{y_{MAX}} y_e + d \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Avec les valeurs numériques données :

```
» M = sym(subs(M,{a, b, c, d,xMAX, yMAX},{-6,2,-3,1,640,480}))
M =
   [ 1/80, 0, -6]
   [ 0, -1/120, 1]
   [ 0, 0, 1]
» coordUtilisateur=M*[400 ;200 ;1]
coordUtilisateur =
   [ -1]
   [ -2/3]
   [ 1]
```

b) On utilise la matrice inverse de M pour obtenir les coordonnées "écran" en fonction des coordonnées "utilisateur" :

```
» Mmoins1=M^(-1)
Mmoins1 =
   [ 80, 0, 480]
   [ 0, -120, 120]
   [ 0, 0, 1]
» coordEcranOu=Mmoins1*[0;0;1]
coordEcranOu =
   [ 480]
   [ 120]
   [ 1]
» coordEcran2=Mmoins1*[-1;-2;1]
coordEcran2 =
   [ 400]
   [ 360]
   [ 1]
```

Exercice 9.5.5

1) On définit les points A, B, C, D, E, F, et on vérifie que les deux faces $ABCD$ et $CDEF$ sont des rectangles :

```
» A=[-1;0;1]; B=[1;0;1];C=[1;1;3];
» D=[-1;1;3];E=[-1;2;0];F=[1;2;0];
» B-A
ans =
2
0
0
» C-D
ans =
2
0
0
» dot(B-A,D-A)
ans =
0
```

Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$. On procède de même pour la face $CDEF$:

```
»F-E
ans =
2
0
0
»dot(C-D,E-D)
ans =
0
```

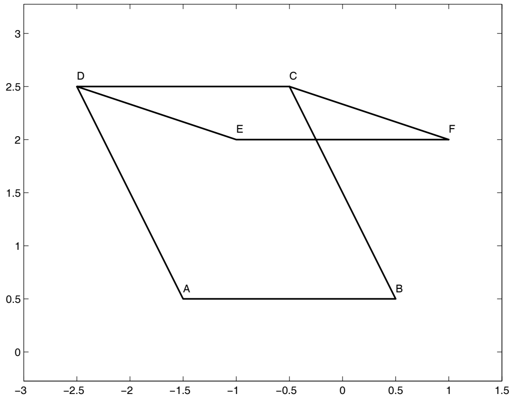
2) Pour construire toutes les lignes de la figure, on définit la matrice correspondant à la suite de points $DABCDEFG$. On définit également la matrice de la projection parallèle qu'on multiplie par la matrice des coordonnées homogènes de la suite de points.

```
» Fig=[D A B C D E F C] ;
» MatProjPar=[1 0 -1/2 0 ; 0 1 1/2 0 ; 0 0 0 0 ; 0 0 0 1] ;
» FigProjHom=MatProjPar*cart2Homog(Fig) ;
» FigProjCart=homog2Cart(FigProjHom)
-2.5000 -1.5000 0.5000 -0.5000 -2.5000 -1.0000 1.0000 -0.5000
2.5000 0.5000 0.5000 2.5000 2.5000 2.0000 2.0000 2.5000
0       0       0       0       0       0       0       0
```

On peut alors construire, dans le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la suite des projetés, en marquant le nom des sommets grâce à la commande *text* :

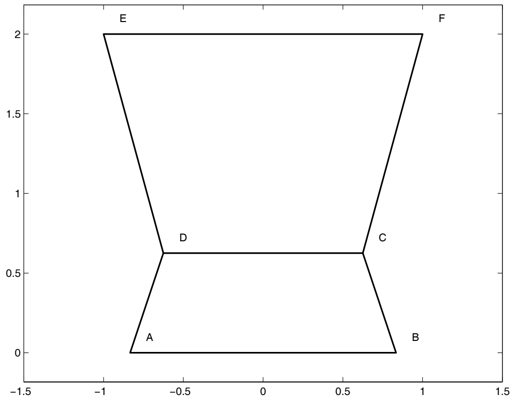
```
» clf
» plot(FigProjCart(1, :),FigProjCart(2, :),'k','LineWidth',1.5)
» axis ([-3 1.5 0 3]) ;axis equal
» nomSommets='DABCDEFC' ;
» h=0.1 ;
» for i=2 :7,
   text(FigProjCart(1,i),FigProjCart(2,i)+h,nomSommets(i))
end
```

On obtient



3) Pour construire l'image de cette figure par la projection perspective , on effectue des traitements analogues, en utilisant cette fois-ci la matrice de la projection perspective.

```
» c=-5 ;
» MatProjPers=[-c 0 0 0 ;0 -c 0 0 ; 0 0 0 0 ;0 0 1 -c] ;
» FigProjHom=MatProjPers*cart2Homog(Fig) ;
» FigProjCart=homog2Cart(FigProjHom)
FigProjCart =
-0.6250 -0.8333 0.8333 0.6250 -0.6250 -1.0000 1.0000 0.6250
0.6250 0        0      0.6250 0.6250 2.0000 2.0000 0.6250
0       0       0      0      0      0      0      0
» clf
» plot(FigProjCart(1, :),FigProjCart(2, :),'k','LineWidth',1.5)
» axis([-1.5 1.5 -0.5 2.5]) ; axis equal
» for i=2 :7,
   text(FigProjCart(1,i)+h,FigProjCart(2,i)+h,nomSommets(i))
end
```



On remarque sur cet exemple que la projection parallèle a conservé le parallélisme, et a transformé les deux faces rectanglaires en parallélogrammes. Par contre, les images par la projection perspective de (AD) et (BC) ne sont plus des droites parallèles, de même que les images de (DE) et (CF) .

Exercice 9.5.6

Première partie :
1) La rotation de l'espace r_1, d'axe $\left(O,\,\overrightarrow{k}\right)$, d'angle

$$\left(\widehat{\overrightarrow{ON'},\,\overrightarrow{j}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{ON'},\,\overrightarrow{i}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{i},\,\overrightarrow{j}}\right)=\frac{\pi}{2}-\theta$$

transforme la demi-droite $\left[O,\overrightarrow{ON''}\right)$ en la demi-droite $\left[O,\,\overrightarrow{j}\right)$. Elle transforme le plan vertical contenant N

$$\left(O,\overrightarrow{ON'},\,\overrightarrow{k}\right)$$

en $\left(O,\,\overrightarrow{j},\,\overrightarrow{k}\right)$, et le point N en un point N'' de $\left(O,\,\overrightarrow{j},\,\overrightarrow{k}\right)$ tel que

$$ON''=ON=r$$

et

$$\left(\widehat{\overrightarrow{ON''},\,\overrightarrow{k}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\,\overrightarrow{k}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\,\overrightarrow{u}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{k}}\right)=\frac{\pi}{2}-\varphi.$$

2) Il suffit donc d'utiliser la rotation de l'espace r_2, d'axe $\left(O,\,\overrightarrow{i}\right)$, et d'angle $\pi/2-\varphi$ pour transformer la demi-droite $\left[O,\overrightarrow{ON'''}\right)$ en la demi-droite $\left[O,\,\overrightarrow{k}\right)$.

3) L'image de la demi-droite $\left[O, \overrightarrow{ON'}\right)$ par la composée

$$f = r_2 \circ r_1$$

est l'image de la demi-droite $\left[O, \overrightarrow{ON'''}\right)$ par r_2, c'est donc la demi-droite $\left[O, \overrightarrow{k}\right)$. Le plan P passe par O et est perpendiculaire à $\left(O, \overrightarrow{ON}\right)$. Par propriété des rotations, son image par f passe par

$$f(O) = r_2\left(r_1\left(O\right)\right) = O,$$

et est perpendiculaire à l'image de $\left(O, \overrightarrow{ON}\right)$, c'est-à-dire à $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$. L'image du plan P est donc le plan de coordonnées $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Enfin puisque $\left[O, \overrightarrow{ON}\right)$ a pour image $\left[O, \overrightarrow{k}\right)$, le point N a pour image le point C de la demi-droite $\left[O, \overrightarrow{k}\right)$ tel que

$$OC = ON.$$

C est donc défini par $\overrightarrow{OC} = r.\overrightarrow{k}$.

4) En notant F, R_1, R_2 les matrices respectives de f, r_1, r_2, on a

$$F = R_2.R_1.$$

Les matrices R_1 et R_2 ont été données au paragraphe 9.3.2.2, et on a :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & 0 & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule avec *Matlab* les matrices R_1, R_2 et F.

```
» syms theta phi r
» PI = sym('pi')
» a = PI/2-theta ;
» R1 = [cos(a) -sin(a) 0 0 ;sin(a) cos(a) 0 0 ; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1]
R1 =
[ sin(theta), -cos(theta), 0, 0]
[ cos(theta), sin(theta), 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
```

```
» a = PI/2- phi ;
» R2= [1 0 0 0 ; 0 cos(a) -sin(a) 0 ; 0 sin(a) cos(a) 0 ;0 0 0 1 ]
R2 =
[ 1, 0, 0, 0]
[ 0, sin(phi), -cos(phi), 0]
[ 0, cos(phi), sin(phi), 0]
[ 0, 0, 0, 1]
» F = simplify(R2 * R1)
F =
[ sin(theta), -cos(theta), 0, 0]
[ sin(phi)*cos(theta), sin(phi)*sin(theta), -cos(phi), 0]
[ cos(phi)*cos(theta), cos(phi)*sin(theta), sin(phi), 0]
[ 0, 0, 0, 1]
```

Ainsi

$$F = \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ \sin\varphi.\cos\theta & \sin\varphi.\sin\theta & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) On calcule les coordonnées cartésiennes de N en utilisant *sph2cart*, puis les coordonnées homogènes de N et celles de $C = f(N)$.

```
» [x, y, z]=sph2cart(theta,phi,r) ;
» NHomog=[x ;y ;z ;1]
NHomog =
[ r*cos(phi)*cos(theta)]
[ r*cos(phi)*sin(theta)]
[ r*sin(phi)]
[ 1]
```

```
» CHomog =simplify(F*NHomog)
CHomog =
[ 0]
[ 0]
[ r]
[ 1]
```

On a bien $C \in \left[O, \overrightarrow{k}\right)$.

Deuxième partie

On définit par leurs coordonnées les huit sommets du cube, et on définit *Cube*, suite de 16 points permettant de tracer toutes les arêtes. On applique ensuite la méthode présentée au paragraphe 9.4.2 : pour obtenir l'image du cube par f, on multiplie par F la matrice *Cube*, convertie en coordonnées homogènes.

```
» A1=[0 ;0 ;0] ;A2=[1 ;0 ;0] ;A3=[1 ;1 ; ;0] ;A4=[0 ;1 ;0] ;
» B1=[0 ;0 ;1] ;B2=[1 ;0 ;1] ;B3=[1 ;1 ; ;1] ;B4=[0 ;1 ;1] ;
» Cube=[A1 A2 B2 A2 A3 B3 A3 A4 B4 A4 A1 B1 B2 B3 B4 B1] ;
» imageCube= F*cart2Homog(Cube) ;
```

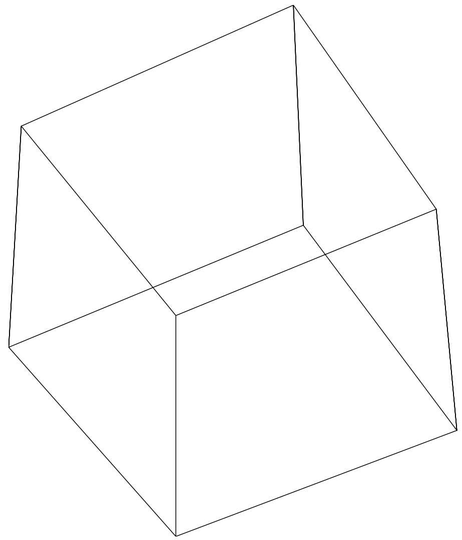
Puis on multiplie le résultat obtenu par la matrice P_0 de la projection perspective sur $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, et on convertit le résultat en coordonnées cartésiennes.

```
» P0 = [-r 0 0 0 ; ...
        0 -r 0 0 ; ...
        0 0 0 0 ; ...
        0 0 1 -r] ;
» projeteCube=homog2Cart(P0*imageCube) ;
```

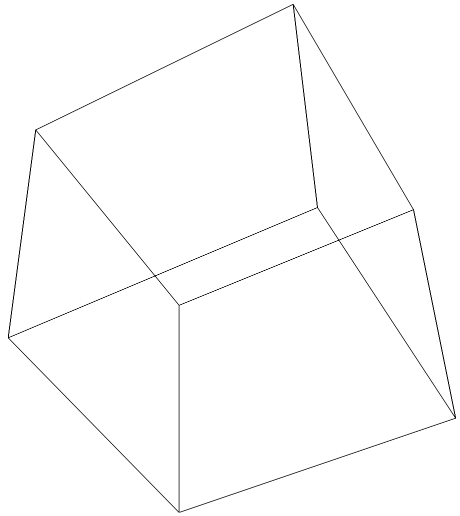
Pour effectuer les dessins, on remplace r, θ, φ par les valeurs données dans l'énoncé.

```
» projeteCube1=double(subs(projeteCube,{r,theta,phi},{10,pi/3,pi/4})) ;
» figure(1) ;clf
» plot(projeteCube1(1, :),projeteCube1(2, :))
» axis equal ;axis off ;title('r=10')
» projeteCube2=double(subs(projeteCube,{r,theta,phi},{5,pi/3,pi/4})) ;
» figure(2) ;clf
» plot(projeteCube2(1, :),projeteCube2(2, :))
» axis equal ; axis off ;title('r=5')
```

r=10



r=5



L'effet de perspective est accentué lorsque r diminue (l'observateur se rapproche de la figure).

Bibliographie

[AST 88] J-D. ASTIER, B. BOUCHON, P. FAURE, "Mathématiques BTS secteur tertiaire", Nathan, 1988.

[AUD 83] M-N. AUDIGIER ET AL., "Mathématiques TC", *collection N. Dimathème*, Didier, Paris, 1983.

[CAL 70] B. CALVO, J. DOYEN, A. CALVO, F. BOSCHET, "Exercices d'algèbre, 1er cycle universitaire, 1ère année préparation aux grandes écoles", Collection U, Armand Colin, Paris, 1970.

[CHA 91] D. CHARLOT, A. DROGUET, "Précis de mathématiques", *HEC option économie, Algèbre*, Bréal, 1991.

[FOL 95] J. FOLEY, A. VAN DAM, S. K. FEINER, "Introduction à l'infographie", Addison-Wesley, Paris, 1995.

[LAR 96] C. LARCHER, M. PRIENTE, J.-C. ROY, "L'essentiel du cours, 300 exercices commentés et résolus", Techniplus, 1996.

[LIE 88] T. LIEBLING, H. ROTHLISBERGER, "Infographie et applications", Masson, Paris, 1988.

[PLA 87] R. A. PLASTOCK, G. KALLEY, "Infographie Cours et problèmes", McGraw-Hill, Paris, 1987.

[QUE 64] M. QUEYSANNE, "Algèbre, 1er cycle scientifique, préparation aux grandes écoles", Armand Colin, Paris, 1964.

Index

V

W

Z