Intégration

par **Danièle LINO**
Ancienne élève de l'École normale supérieure de Sèvres
Agrégée de mathématiques
Professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri-IV

et **Bernard RANDÉ**
Ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud
Docteur en mathématiques
Agrégé de mathématiques
Professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis

L'intégrale a été naturellement introduite en mathématiques pour calculer des longueurs, des aires ou des volumes, en d'autres termes pour ***mesurer.***

*Par exemple, pour calculer la distance parcourue par un mobile sur sa trajectoire, on intégrera sa vitesse (algébrique). D'emblée, l'intégrale d'une fonction peut s'interpréter comme l'accroissement de l'une de ses primitives. Pendant deux siècles, si les techniques de calcul des intégrales se sont améliorées, les objets intégrés sont restés de même nature : applications analytiques essentiellement, puis, au début du XIX^e^ siècle, continues (**Cauchy**). Simultanément, ce même Cauchy tente de donner un sens à l'intégrale d'une fonction non bornée, ou bien définie sur un intervalle qui n'est pas un segment : cette notion correspond à celle d'intégrale impropre. De cette époque (**Fourier**) date la notation*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

*Avec le développement de l'analyse harmonique, d'une part, et la nécessité de donner un statut précis aux opérations de l'analyse, d'autre part, des tentatives nombreuses visent alors à définir l'intégrale de fonctions appartenant à une classe assez large et à en déterminer les propriétés : citons **Dirichlet,** qui cherche à généraliser la notion d'intégrale impropre, et surtout **Riemann,** qui définit sur une certaine classe de fonctions, les fonctions **intégrables au sens de Riemann,** une intégrale restée très classique. Le point de départ est le même que chez Cauchy, si ce n'est que la fonction à intégrer n'est pas a priori supposée continue, ni même **assez régulière.** De fait, ce qui détermine le caractère intégrable de la fonction, c'est la seule convergence du procédé d'intégration. En réalité échappent à l'intégration de Riemann les fonctions trop irrégulières, trop grandes ou bien définies sur des ensembles trop compliqués ou non bornés.*

*La fin du XIX^e^ siècle voit le développement des notions les plus générales de fonction et, avec lui, le goût pour des outils dont le champ d'application est le plus vaste possible. On cherche à intégrer des fonctions éventuellement très irrégulières. De cette époque date l'intégrale supérieure de **Darboux,** qui n'est pas sans rapport avec **l'intégrale de Lebesgue.***

***Lebesgue** part de la constatation suivante : Riemann découpe **l'intervalle de départ** en petits intervalles I_k, centrés en x_k, et postule que l'intégrale de la fonction f est proche de celle de la **fonction en escalier**, égale à $f(x_k)$ sur I_k. Les limitations de l'intégrale de Riemann sont inhérentes à ce présupposé. En réalité, il est beaucoup plus efficace de découper **l'ensemble d'arrivée** (la droite numérique) en petits intervalles J_k centrés en y_k, de calculer la mesure μ_k de l'ensemble des x tels que f(x) appartienne à J_k, et de postuler que l'intégrale de f est proche de la somme pondérée $\sum_k y_k \mu_k$; ainsi, si f prend la valeur 7 sur un ensemble de mesure 3 et la valeur 2 sur un ensemble de mesure 5, son intégrale sera égale à $3 \times 7 + 5 \times 2 = 31$: peu importe, en fait, la façon dont sont répartis au départ les points en lesquels f prend les valeurs 7 et 2.*

*Le problème devient alors celui-ci : comment mesurer des ensembles ? L'intégrale s'en déduira. On revient ainsi aux sources historiques de l'intégrale. La théorie initiée par Lebesgue est à la fois celle de **l'intégrale de Lebesgue** et celle de **la mesure de Lebesgue.***

*Cette théorie et ses améliorations possèdent une généralité et une efficacité suffisantes, qui pourraient paraître même plus que suffisantes si l'on se limitait à la simple étude des fonctions, qui atteignait au début de ce siècle un haut degré de sophistication ; mais elle trouve, dans la théorie moderne des **probabilités**, ainsi que dans le cadre de **l'analyse fonctionnelle** et de ses nombreuses applications (distributions, par exemple), une place éminente, qui rend justice à son extraordinaire généralité.*

*Dans la suite, nous allons présenter **l'intégrale des applications réglées** sur un segment de la droite numérique. Légèrement moins générale que l'intégrale de Riemann, elle est suffisante pour beaucoup d'applications. Elle est d'ailleurs utile pour la construction de l'intégrale de Lebesgue. Nous donnons ensuite* *une extension élémentaire qui conduit à la notion* ***d'intégrale impropre.*** *Puis, nous introduisons l'intégrale de Lebesgue et énonçons les résultats qui en constituent à la fois l'originalité et la force.*

On verra que la construction des intégrales considérées a fait l'objet de détails qui pourraient sembler superfétatoires. Une raison majeure en est la suivante : il est très difficile de manipuler les objets intégrés qui, dans le cas de l'intégrale de Lebesgue, ne sont pas des applications au sens strict, sans les avoir au moins une fois construits. Seuls ceux qui ont déjà longuement manipulé l'intégrale de Lebesgue pourraient à la rigueur s'en passer. Néanmoins, à partir du paragraphe 2.4.2 les preuves ne sont, le plus souvent, qu'évoquées. De fait, à ce stade, elles ne présentent pas de difficulté majeure, si l'on excepte le paragraphe 2.7, consacré aux ***intégrales multiples.***

Quelques exemples de calculs explicites font l'objet d'un dernier paragraphe, qui ne traite pas des calculs numériques d'intégrales, dont les méthodes sont évoquées ailleurs.

Notations et symboles

Symbole	Désignation
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\overline{\mathbb{R}}$	Ensemble $\mathbb{R}$ auquel on a ajouté deux points : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\left.\begin{matrix}\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{E}\end{matrix}\right\}$	Espaces vectoriels normés de dimensions finies
$\mathscr{C}_c$	Ensemble des applications continues à support compact de **E** dans $\mathbb{R}$
$\Vert \cdot \Vert$	Norme sur un espace
I ou J	Intervalle
I	Intégrale à calculer
$\mu_*(f)$	Intégrale inférieure d'une application f
$\mu^*(f)$	Intégrale supérieure d'une application f
$\Diamond$	Signale le début et la fin d'un passage formant une suite logique (preuve)
K	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ indifféremment
$\Vert \cdot \Vert_\infty$	Norme uniforme sur un espace d'applications bornées

1. Présentation élémentaire de l'intégrale

Dans la suite, ***F*** est un espace **vectoriel réel ou complexe** de dimension **finie** (notée, le cas échéant, *p*). Lorsque $\boldsymbol{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on le note $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}$. L'espace ***F*** est muni d'une **norme** $\Vert \cdot \Vert$, quelconque ; le théorème de **l'équivalence des normes** assure que les résultats obtenus ne dépendent pas de la norme particulière choisie. Dans le cas de ***K***, on utilise la valeur absolue ou le module.

1.1 Construction de l'intégrale d'une application réglée

Nous considérons dans ce paragraphe un segment $[a, b]$, avec $a < b$.

1.1.1 Classes d'applications définies sur un segment

Subdivisions d'un segment

On appelle **subdivision** de $[a, b]$ une famille $\sigma = (a_i)_{i \in [0,n]}$ de points de $[a, b]$, rangés de façon strictement croissante, et tels que $a_0 = a$, $a_n = b$. L'ensemble $I(\sigma)$ des points a_i est donc un ensemble à $n + 1$ éléments de $[a, b]$, appelé **image** de la subdivision. Réciproquement, un sous-ensemble fini de $[a, b]$ contenant a et b est l'image d'une subdivision et d'une seule : il suffit d'indexer les éléments de cet ensemble de façon strictement croissante.

Les intervalles $]a_i, a_{i+1}[$, pour $i \in [0, n-1]$, sont appelés intervalles (ouverts) de la subdivision. On parle de la même façon des intervalles fermés de la subdivision. Le réel $\max_{i \in [0, n-1]}(a_{i+1} - a_i)$ est appelé **pas** de la subdivision. Lorsque tous les intervalles de la subdivision ont même longueur, la subdivision est appelée **subdivision régulière**. Le pas de la subdivision est alors égal à $\dfrac{b-a}{n}$.

On peut comparer deux subdivisions σ_1 et σ_2 de la façon suivante. On dit que σ_1 est plus fine que σ_2 lorsque $I(\sigma_1)$ contient $I(\sigma_2)$. Cela signifie que σ_1 a obtenue à partir de σ_2 en lui ajoutant des points (en la *raffinant*). On remarque que, étant donné un nombre fini de subdivisions, il existe toujours une subdivision qui est plus fine que chacune d'entre elles, à savoir celle dont l'image est la réunion des images des subdivisions données.

Applications en escalier

Définition. Soit *f* une application de $[a, b]$ dans **F.** On dit que *f* est **en escalier** lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{i \in [0,n]}$ de $[a, b]$ telle que *f* soit constante sur chacun des intervalles ouverts de la subdivision. Une telle subdivision est dite **adaptée** à *f*.

Une application en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs ; en effet, si $\sigma = (a_i)_{i \in [0,n]}$ est adaptée à *f*, notons f_i la valeur constante de *f* sur $]a_i, a_j + 1[$. Il est clair que :

$$f([a, b]) \subset \{f_i\}_{i \in [0, n-1]} \cup \{f(a_i)\}_{i \in [0, n]}.$$

En particulier, une application en escalier est toujours bornée sur $[a, b]$.

On note aussi que, si *f* est en escalier et si σ est adaptée à *f*, toute subdivision plus fine que σ est adaptée à *f*.

Exemple : L'application $x \mapsto E(x)$ (partie entière) est en escalier sur tout segment (figure 1).

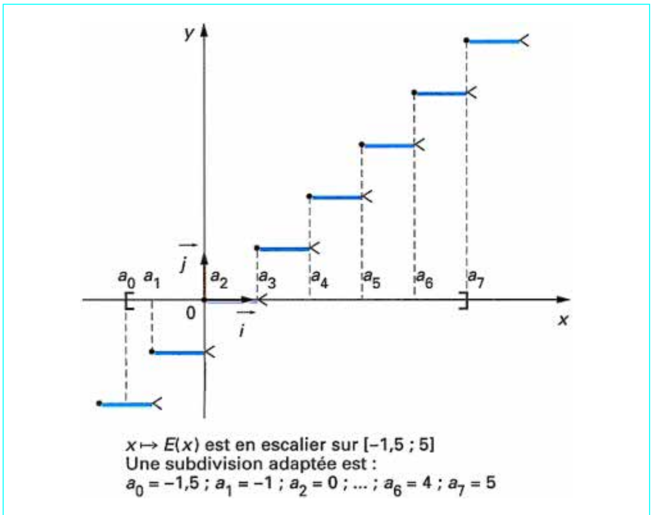

Figure 1 – Exemple d'une application en escalier sur tout segment

Notons $\mathcal{E}([a, b], \boldsymbol{F})$ l'ensemble des applications en escalier sur $[a, b]$, à valeurs dans $\boldsymbol{F}$. Les principales propriétés de $\mathcal{E}([a, b], \boldsymbol{F})$ sont résumées ci-dessous.

Proposition 1

(**1**) $\mathcal{E}([a, b], \boldsymbol{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a, b], \boldsymbol{F})$, espace vectoriel des applications bornées de $[a, b]$, à valeurs dans $\boldsymbol{F}$.

(**2**) $\mathcal{E}([a, b], \boldsymbol{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{B}([a, b], \boldsymbol{K})$.

(**3**) Si f et g sont dans $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont dans $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$.

(**4**) Si f est dans $\mathcal{E}([a, b], \boldsymbol{F})$, $\|f\|$ est dans $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$.

◊ **Preuve.** À titre d'exemple, prouvons (**1**). Nous avons déjà remarqué que $\mathcal{E}([a, b], \boldsymbol{F})$ est inclus dans $\mathcal{B}([a, b], \boldsymbol{F})$. L'application nulle est en escalier. Soit f et g dans $\mathcal{E}([a, b], \boldsymbol{F})$, et λ et μ deux scalaires. Si σ_1 est adaptée à f et σ_2 est adaptée à g, soit σ plus fine que σ_1 et σ_2 ; σ est adaptée à la fois à f et à g. Par conséquent, $\lambda f + \mu g$ est constante sur les intervalles ouverts de la subdivision σ, ce qui entraîne qu'elle est en escalier. ◊

Applications continues par morceaux

Définition. Soit f une application de $[a, b]$ dans $\boldsymbol{F}$. On dit que f est **continue par morceaux** lorsqu'il existe une subdivision de $[a, b]$ telle que f soit continue sur chacun des intervalles ouverts de la subdivision, admette une limite à droite en a, admette une limite à gauche en b, et admette une limite à droite et à gauche en les autres points de la subdivision. Une telle subdivision est dite **adaptée** à f.

Lorsqu'en un point différent d'une borne de $[a, b]$ une application admet une limite à droite et une limite à gauche, on dit que ce point est un point de **discontinuité de première espèce**. Si le point est a, on suppose, pour appliquer cette terminologie, que l'application admet une limite à droite en a, et on introduit une définition analogue en b. En fait, cette terminologie masque le fait qu'un point de discontinuité de première espèce peut être un point de continuité : cette situation se produit lorsque la limite à droite, la limite à gauche et la valeur au point sont égales.

On note que, si f est continue par morceaux et si σ est adaptée à f, toute subdivision plus fine que σ est adaptée à f.

Exemple : la figure **2** fournit le graphe d'une application continue par morceaux de [0,2] dans $\mathbb{R}$.

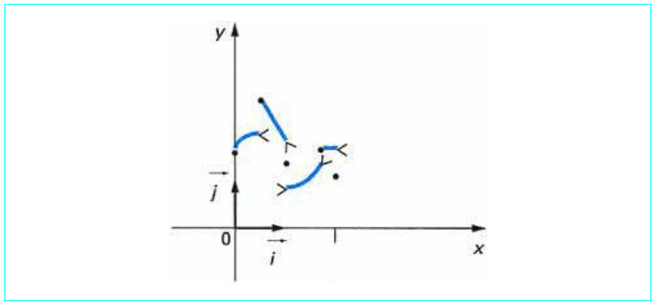

Figure 2 – Graphe d'une application continue par morceaux sur [0,2]

Notons $\mathcal{C}\,\mathrm{pm}([a, b], \boldsymbol{F})$ l'ensemble des applications continues par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs dans $\boldsymbol{F}$. Les éléments de $\mathcal{C}\,\mathrm{pm}([a, b], \boldsymbol{F})$ sont caractérisés de différentes façons par la proposition suivante.

Proposition 2

Soit f une application de $[a, b]$ dans $\boldsymbol{F}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(**1**) *f est continue par morceaux.*

(**2**) *f est somme d'une application continue et d'une application en escalier.*

(**3**) *f est continue sauf sur un ensemble fini, en les points duquel elle admet une discontinuité de première espèce.*

En utilisant la proposition **2**, on obtient sans difficulté la proposition **3**.

Proposition 3

(**1**) $\mathcal{C}\,\mathrm{pm}([a, b], \boldsymbol{F})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{B}([a, b], \boldsymbol{F})$.

(**2**) $\mathcal{C}\mathrm{pm}([a, b], \boldsymbol{K})$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{B}([a, b], \boldsymbol{K})$.

(**3**) *Si f et g sont dans* $\mathcal{C}\,\mathrm{pm}([a, b], \mathbb{R})$, $\max(f, g)$ *et* $\min(f, g)$ *sont dans* $\mathcal{C}\,\mathrm{pm}([a, b], \mathbb{R})$.

(**4**) *Si f est dans* $\mathcal{C}\mathrm{pm}([a, b], \boldsymbol{F})$, $\|f\|$ *est dans* $\mathcal{C}\,\mathrm{pm}([a, b], \mathbb{R})$.

Résumons la situation : dans $\mathcal{B}([a, b], \boldsymbol{F})$, nous disposons des sous-espaces vectoriels $\mathcal{C}([a, b], \boldsymbol{F})$ (formé des applications continues), $\mathcal{E}([a, b], \boldsymbol{F})$, et de la somme $\mathcal{C}\,\mathrm{pm}([a, b], \boldsymbol{F})$ de ces deux espaces vectoriels. Par ailleurs, nous pouvons munir $\mathcal{B}([a, b], \boldsymbol{F})$ de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Nous savons qu'alors $\mathcal{B}([a, b], \boldsymbol{F})$ est un espace vectoriel normé **complet** et que $\mathcal{C}([a, b], \boldsymbol{F})$ est un sous-espace vectoriel fermé du précédent. L'espace vectoriel $\mathcal{E}([a, b], \boldsymbol{F})$, quant à lui, n'est pas complet, ce qui motive la définition suivante.

Définition. L'adhérence de $\mathcal{E}([a, b], \boldsymbol{F})$ dans $\mathcal{B}([a, b], \boldsymbol{F})$ pour la norme de la convergence uniforme est notée $\mathcal{R}([a, b], \boldsymbol{F})$. Les applications qui appartiennent à $\mathcal{R}([a, b], \boldsymbol{F})$ sont appelées applications réglées.

En d'autres termes, une **application réglée** est, par définition, **limite uniforme d'applications en escalier**. Les applications réglées ne nous intéressent pas pour elles-mêmes, mais parce qu'elles fournissent un cadre agréable pour présenter élémentairement la notion d'intégrale. De plus, comme nous allons le constater, les applications continues par morceaux sont réglées ; cela assure que le cadre offert est assez général pour de nombreuses mises en œuvre.

Proposition 4

$\mathscr{C}$ pm ([a, b], $\boldsymbol{F}$) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{R}$ ([a, b], $\boldsymbol{F}$).

◊ **Preuve**. Une application continue par morceaux étant somme d'une application continue et d'une application en escalier, il suffit évidemment de montrer qu'une application continue f est réglée. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue sur $[a, b]$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout couple (x, y) d'éléments de $[a, b]$ vérifiant $|x - y| \leqslant \eta$, alors $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$. Considérons une subdivision $\sigma = (a_i)_{i \in [0,n]}$ de pas inférieur ou égal à η, et ϕ l'application qui prend la valeur $f(a_i)$ sur l'intervalle $[a_i, a_{i+1}[$, avec la condition supplémentaire que $\phi(b) = f(b)$. Soit x dans $[a, b[$. x appartient à l'un des intervalles semi-ouverts $[a_i, a_{i+1}[$. D'après le choix de η, on a $\|f(x) - f(a_i)\| \leqslant \varepsilon$. Donc $\|f(x) - \phi(x_i)\| \leqslant \varepsilon$. Cette inégalité étant vraie aussi pour $x = b$, on obtient finalement $\|f - \phi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Le résultat est ainsi prouvé. ◊

1.1.2 Intégrale d'une application en escalier

Définition

Soit f une application en escalier, $\sigma = (a_i)_{i \in [0,n]}$ une subdivision adaptée à f, et f_i la valeur constante de f sur $]a_i, a_{i+1}[$. Considérons l'élément $\int(f, \sigma)$ de $\boldsymbol{F}$ égal à $\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)f_i$. Il ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie. En effet, si σ' est une autre subdivision adaptée, on peut considérer une subdivision σ'' plus fine que σ et σ'. Si l'on montre que $\int(f, \sigma) = \int(f, \sigma'')$, le résultat sera prouvé puisque, en procédant de façon identique, on montrerait que $\int(f, \sigma') = \int(f, \sigma'')$.

Posons $\sigma'' = (b_j)_{j \in [0,\, p]}$. Puisque l'image de σ'' contient celle de σ, on peut trouver une suite d'entiers

$$0 = j_0 < j_1 < \dots < j_{n-1} < j_n = p$$

telle que :

$$a = a_0 = b_0 < b_1 < \dots < b_{j1-1} < a_1 = b_{j1} < b_{j1+1} < \dots$$
$$\dots < b_{p-1} < b_p = a_n = b$$

La valeur constante de f sur $]b_j, b_{j+1}[$ est notée f''_j. On a alors :

$$\int(f, \sigma'') = \sum_{j=0}^{p-1}(b_{j+1} - b_j)f''_j = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=j_i}^{j_{i+1}-1}(b_{j+1} - b_j)f''_j$$

Mais, si $j \in [j_i, j_{i+1} - 1]$, on a $f''_j = f_i$. Ainsi :

$$\int(f, \sigma'') = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \sum_{j=j_i}^{j_{i+1}-1}(b_{j+1} - b_j) = \sum_{i=0}^{n-1}(b_{j_{i+1}} - b_{j_i})f_i$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)f_i = \int(f, \sigma)$$

Puisque $\int(f, \sigma)$ ne dépend finalement que de f, nous pouvons légitimement poser la définition suivante.

Définition. Soit f une application en escalier, $\sigma = (a_i)_{i \in [0,\, n]}$ une subdivision adaptée à f et f_i la valeur constante de f sur $]a_i, a_{i+1}[$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a, b]$ la quantité $\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)f_i$.

On la note $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Notation. Dans l'écriture $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, la lettre t n'a pas de sens particulier et peut être remplacée par toute autre. Elle est utile principalement pour appliquer mécaniquement un certain nombre de règles de calcul.

1er exemple. Si f est une application nulle sauf sur un sous-ensemble fini de $[a, b]$, elle est en escalier (une subdivision lui est adaptée dès qu'elle contient l'ensemble des points où f n'est pas nulle). On a alors $\int_a^b f = 0$.

2e exemple. Si f est constante sur $[a, b]$, on a $\int_a^b f = (b - a)C$, où C est la valeur constante de f.

Propriétés

La proposition **5** résume les principales propriétés de l'intégrale sur l'ensemble des applications en escalier. Les preuves, faciles, ne sont pas données.

Proposition 5

(1) ***Linéarité***. *L'application* $\int_a^b : \mathcal{E}([a, b], \boldsymbol{F}) \to \boldsymbol{F}$ *est linéaire.*

$$f \mapsto \int_a^b f$$

(2) ***Positivité***. *Si* $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ *est à valeurs positives ou nulles,* $\int_a^b f$ *est positive ou nulle.*

(3) ***Croissance***. *Si* f *et* g *sont dans* $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$*, et si* $f \leqslant g$*, alors :*

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$

(4) ***Inégalité triangulaire***. *Si* $f \in \mathcal{E}([a, b], \boldsymbol{F})$*, alors :*

$$\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$$

(5) ***Majoration uniforme***. *Si* $f \in \mathcal{E}([a, b], \boldsymbol{F})$*, alors :*

$$\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant (b - a)\|f\|_\infty$$

(6) ***Relation de Chasles***. *Si* $f \in \mathcal{E}([a, b], \boldsymbol{F})$*, et si* $a < c < b$*, alors :*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

1.1.3 Intégrale d'une application réglée

Une application réglée f est limite uniforme d'une suite (ϕ_n) d'applications en escalier. Une telle suite, qui n'est pas unique, est appelée **suite approchante**.

Définition

Introduisons d'abord le lemme suivant.

Lemme. Soit $f \in \mathcal{R}([a, b], \boldsymbol{F})$, (ϕ_n) et (ψ_n) deux suites approchantes de f. Les suites $\left(\int_a^b \phi_n\right)$ et $\left(\int_a^b \psi_n\right)$ convergent dans $\boldsymbol{F}$ et ont même limite.

◊ **Preuve.** Puisque (ϕ_n) et (ψ_n) convergent uniformément vers f, la suite de leurs différences $(\phi_n - \psi_n)$ converge uniformément vers 0. D'après la proposition **5** (***5***), on a :

$$\left\| \int_a^b (\phi_n - \psi_n) \right\| \leqslant (b-a) \|(\phi_n - \psi_n)\|_\infty$$

La quantité majorante tendant vers 0, on voit qu'il suffit de montrer que $\left(\int_a^b \phi_n\right)$ admet une limite dans $\boldsymbol{F}$. On va, pour ce faire, montrer qu'il s'agit d'une suite de Cauchy. On a :

$$\left\| \int_a^b (\phi_n - \phi_p) \right\| \leqslant (b-a) \|(\phi_n - \phi_p)\|_\infty$$

Mais la suite (ϕ_n) est elle-même de Cauchy pour la norme uniforme. La quantité majorante est donc inférieure à ε pour n et p assez grands, ce qui conclut. ◊

Nous pouvons donc poser la définition suivante.

Définition. Soit $f \in \mathcal{R}([a, b], \boldsymbol{F})$, (ϕ_n) une suite approchante de f. La limite de la suite $\left(\int_a^b \phi_n\right)$ est appelée **intégrale** de f sur $[a, b]$. On la note $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Cette définition n'entre pas en conflit avec celle déjà posée lorsque f est une application en escalier. En effet, dans ce cas, la suite dont tous les termes sont égaux à f est une suite approchante, ce qui fournit bien la limite voulue.

Propriétés

Nous allons étendre aux applications réglées les propriétés de l'intégrale que nous savions déjà vérifiées par les applications en escalier.

Proposition 6

(***1***) ***Linéarité***. *L'application* $\int_a^b : \mathcal{R}([a, b], \boldsymbol{F}) \to \boldsymbol{F}$ *est linéaire.*

$$f \mapsto \int_a^b f$$

(***2***) ***Positivité.*** *Si* $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ *est à valeurs positives ou nulles,* $\int_a^b f$ *est positive ou nulle.*

(***3***) ***Croissance.*** *Si f et g sont dans* $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ *et si* $f \leqslant g$*, alors :*

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$

(***4***) ***Inégalité triangulaire.*** *Si* $f \in \mathcal{R}([a, b], \boldsymbol{F})$*, alors :*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$$

(***5***) ***Majoration uniforme***. *Si* $f \in \mathcal{R}([a, b], \boldsymbol{F})$*, alors :*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$$

(***6***) ***Relation de Chasles***. *Si* $f \in \mathcal{R}([a, b], \boldsymbol{F})$ *et si* $a < c < b$*, alors :*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(***7***) ***Intégration composante par composante***. *Soit* $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^p)$. *On pose :*

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$$

de sorte que $f_1, \ldots, f_p$ *sont les applications composantes de f. Chacune des applications* f_i *est dans* $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$. *De plus :*

$$\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_p\right)$$

◊ **Preuve.** Nous ne démontrons, à titre d'exemples, que les propriétés (***1***), (***2***) et (***3***).

(***1***) Si f et g sont dans $\mathcal{R}([a, b], \boldsymbol{F})$, considérons (ϕ_n) une suite approchante de f et (ψ_n) une suite approchante de g. On voit que $(\lambda\phi_n + \mu\psi_n)$ est une suite approchante de $\lambda f + \mu g$. Donc :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lim \int_a^b (\lambda\phi_n + \mu\psi_n)$$

$$= \lim \left(\lambda \int_a^b \phi_n + \mu \int_a^b \psi_n\right) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

(***2***) Soit f une fonction positive de $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ et (f_n) une suite approchante. Pour tout x dans $[a, b]$, on a :

$$f(x) - \phi_n(x) \leqslant |f(x) - \phi_n(x)| \leqslant \|f - \phi_n\|_\infty .$$

Donc :

$$\phi_n(x) \geqslant f(x) - \|f - \phi_n\|_\infty \geqslant -\|f - \phi_n\|_\infty$$

Par intégration de cette inégalité (entre applications en escalier), on obtient $\int_a^b \phi_n(t)\mathrm{d}t \geqslant -(b-a)\|f - \phi_n\|_\infty$.

Par passage à la limite, il vient $\int_a^b f \geqslant 0$.

(***3***) On applique alors **6** (***2***), puis **6** (***1***), à $f - g$. ◊

Remarque 1. Si f et g sont deux applications réglées qui ne diffèrent que sur un ensemble fini, elles ont même intégrale. En effet, la différence $f - g$ est en escalier et d'intégrale nulle. On exprime souvent ce fait en disant que l'on ne change pas la valeur de l'intégrale en modifiant l'application sur un ensemble fini.

Remarque 2. La propriété **6** (***3***) consiste à *intégrer les inégalités* entre applications.

Remarque 3. La propriété **6** (***5***) exprime que le vecteur $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ a une norme inférieure à la norme uniforme de f sur $[a, b]$. Ce vecteur est appelé **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$.

Proposition 7

Soit (f_n) une suite d'applications réglées, convergeant uniformément vers f. Alors :

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

◊ **Preuve**. Remarquons que f est réglée, puisque l'ensemble des applications réglées est fermé pour la convergence uniforme. De plus :

$$\left\| \int_a^b (f_n - f) \right\| \leqslant (b-a) \| f_n - f \|_\infty$$

ce qui assure le résultat. ◊

Cas des applications continues à valeurs réelles

Les applications continues sur $[a, b]$ étant réglées, on peut définir leur intégrale. L'importance de ce cas particulier justifie que l'on énonce à leur sujet quelques propriétés supplémentaires.

Proposition 8

(**1**) ***Égalité de la moyenne***. *Si f est dans $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$, alors :*

$$\exists\, u \in [a, b] \int_a^b f = (b-a) f(u)$$

(**2**) ***Propriété de séparation***. *Si f est dans $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$, et à valeurs positives, alors :*

$$\int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0$$

◊ **Preuve.**

(**1**) Soit M et m le maximum et le minimum de f sur $[a, b]$. On a, d'après la croissance de l'intégrale, $M(b-a) \geqslant \int_a^b f \geqslant m(b-a)$. La valeur moyenne de f étant comprise entre m et M, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'elle est de la forme $f(u)$.

(**2**) Si f n'est pas nulle, il existe un point de $[a, b]$ en lequel f prend une valeur strictement positive. Par continuité de f, il existe un segment $[c, d]$, avec $a < c < d < b$, sur lequel f est strictement positive. Or, grâce à la relation de Chasles on a :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f$$

L'intégrale du milieu est strictement positive d'après (**1**), et les deux extrêmes sont positives ou nulles, ce qui assure une contradiction. ◊

1.2 Formule fondamentale du calcul intégral

1.2.1 Intégrale dépendant d'une borne

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ayant au moins deux points. La notion d'application réglée sur I n'a, en général, pas de sens ; on dira qu'une application f est **localement réglée** sur I lorsque sa restriction à tout segment inclus dans I est réglée. Bien entendu, si I est déjà un segment, cette notion correspond à celle d'application réglée. Par exemple, une application continue sur $\mathbb{R}$ est localement réglée sur $\mathbb{R}$, puisque sa restriction à tout segment est continue.

Lorsque a et b sont des points de I, trois cas peuvent se produire.

Premier cas : $a < b$. On note alors $\int_a^b f$ (ou $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$) l'intégrale sur $[a, b]$ de la restriction de f à $[a, b]$, ce qui a bien un sens, puisque cette restriction est réglée sur $[a, b]$.

Deuxième cas : $a = b$. On pose $\int_a^b f = 0$.

Troisième cas : $a > b$. On pose $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Ces définitions permettent sans difficulté de généraliser la relation de Chasles.

Proposition 9

Soit f une application localement réglée sur I, a, b et c des points de I. On a :

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

L'application des résultats précédents à cette situation plus générale ne pose pas de difficultés particulières, à ceci près que certaines inégalités peuvent être inversées lorsque $a > b$. Par exemple, si f est positive sur I, et si $a > b$, on aura $\int_a^b f \leqslant 0$.

Soit a un point fixé de I. On peut, pour tout x de I, poser $F_a(x) = \int_a^x f$. Cette application est dite intégrale (de f) **dépendant de la borne** du haut. Elle dépend aussi de l'origine fixée a. Si b est un autre point de I, on a immédiatement, à l'aide de la relation de Chasles :

$$F_b(x) - F_a(x) = \int_b^a f$$

En d'autres termes, les applications F_a et F_b ne diffèrent que d'une constante.

Proposition 10

(**1**) *L'application F_a est continue sur I.*

(**2**) *Si f est continue en x, alors F_a est dérivable en x et $F'_a(x) = f(x)$.*

(**3**) *Si f est à valeurs réelles positives, alors F_a est croissante.*

◊ **Preuve**. Remarquons préalablement que :

$$F_a(x+h) - F_a(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(**1**) Soit x fixé dans I et $[c, d]$ un segment voisinage de x dans I ; f est bornée sur $[c, d]$ par M. Si donc $x + h$ est dans $[c, d]$:

$$\| F_a(x+h) - F_a(x) \| = \left\| \int_x^{x+h} f \right\| \leqslant M|h|$$

Le résultat en découle aussitôt.

(**2**) Posons :

$$\delta(h) = \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,\mathrm{d}t$$

Remarquons au passage la transformation, évidente, qui nous a permis d'écrite $hf(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}t$.

Puisque f est continue en x, on peut trouver, pour $\varepsilon > 0$ donné, un intervalle, V, voisinage de x dans I tel que, si t appartient à V, on ait $\| f(x) - f(t) \| \leqslant \varepsilon$. Pour $x + h$ dans V, le segment $[x, x + h]$ est inclus dans V et, par conséquent, l'inégalité précédente s'applique à tous les t du segment. Par intégration de cette inégalité, on obtient :

$$\|\delta(h)\| \leqslant \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \|f(t) - f(x)\| \mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon$$

Cela exprime que $\delta(h)$ tend vers 0 avec h, ce que l'on voulait prouver.

(*3*) Cela résulte immédiatement de l'expression intégrale de $F_a(x+h) - F_a(x)$. ◊

On peut interpréter ce résultat de la manière suivante.

Théorème 1. Soit f une application continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbf{F}$. Alors f admet des primitives, c'est-à-dire qu'il existe des applications dérivables dont la dérivée es égale à f. De plus, on connaît de telles primitives : les applications F_a, où a appartient à I. Enfin, toutes ces primitives sont obtenue à partir de l'une d'entre elles en lui ajoutant une constante.

Le théorème précédent contient deux résultats de nature différente. L'existence de primitives résulte de la construction de l'intégrale d'une application continue. Le fait que deux primitives diffèrent d'une constante découle essentiellement du théorème de **Rolle**. Nous renvoyons donc sur ce point à la partie consacrée au calcule différentiel dans ce traité.

On remarque aussi que seul le cas des applications continues est évoqué ici. Le problème de la primitivation des applications quelconques (qui n'a pas toujours de réponse positive) ne sera pas abordé.

1.2.2 Formule fondamentale

Le calcul explicite des intégrales s'appuie souvent sur le résultat suivant.

Théorème 2. Soit f une application continue sur I, et a et b deux points de I. Si F est une primitive de f, on a :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

◊ **Preuve**. Puisque F est une primitive de f, il existe une constante c telle que $F = F_a + c$. Or $\int_a^b f = F_a(b) - F_a(a)$. Donc $\left(\int_a^b f = F(b) - F(a)\right)$. ◊

Dans la pratique, il faut déterminer une primitive de f, et cela sans tomber dans le cercle vicieux de la définir par une intégrale.

Exemple 1 : calcul de $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} \mathrm{d}x$:

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 x^{2n} \frac{(1+x^2)}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1}$$

et $\quad I_0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

D'où $\quad I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{2k-1} + (-1)^n \frac{\pi}{4}$

Exemple 2 : calcul de $\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$

$$\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = [\ln(\ln x)]_e^{e^2} = \ln\left(\frac{\ln e^2}{\ln e}\right)$$

$$\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln 2$$

Exemple 3 : calcul de $I = \int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}$

C'est l'intégrale d'une fonction continue sur [–1, 1].

$$I = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \quad \text{(parité de la fonction)}$$

Or :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x^2}$$

Notons que $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} \mathrm{d}x$ mais que chacune des deux intégrales $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \mathrm{d}x$ et $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \mathrm{d}x$ est divergente.

On écrit donc :

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_\varepsilon^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \mathrm{d}x - \int_\varepsilon^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \mathrm{d}x\right] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon .$$

— Calcul de $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \mathrm{d}x$ sur]0, 1]. On pose $x = \sinh u$ soit $u = \operatorname{arsinh} x$:

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \mathrm{d}x = \int \frac{\cosh^2 u}{\sinh^2 u} \mathrm{d}u$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sinh^2 u} + 1\right) \mathrm{d}u = -\coth u + u + C$$

d'où :

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \operatorname{arsinh} x + C$$

— Calcul de $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ sur $]0, 1]$. On pose $v = \arcsin x$ soit $x = \sin v$:

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 v}{\sin^2 v}\,\mathrm{d}v = \int \left(\frac{1}{\sin^2 v} - 1\right)\mathrm{d}v$$

$$= \cot v - v + C$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C$$

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = (-\sqrt{2} + \operatorname{arsinh} 1 + \arcsin 1)$$

$$-\left(\frac{-2\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2} + \sqrt{1-\varepsilon^2}} + \operatorname{arsinh}\varepsilon + \arcsin\varepsilon\right)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_{\varepsilon} = -\sqrt{2} + \operatorname{arsinh} 1 + \arcsin 1$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{2} + \operatorname{arsinh} 1 + \arcsin 1$$

$$= -\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{2}$$

En applicant le théorème **2** à $f = F'$, on obtient le théorème **3**.

Théorème 3 (formule fondamentale du calcul intégral). Soit f une application continûment dérivable sur I, et a et b deux points de I. Alors :

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a)$$

Une généralisation du théorème aux applications continûment dérivables par morceaux peut être utile dans la pratique.

Définition. Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbf{F}$. On dit que f est continûment dérivable par morceaux, ou encore **de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux**, lorsqu'il existe une subdivision de $[a, b]$ telle que f soit continûment dérivable sur chacun des intervalles ouverts de la subdivision, et telle que f et f' admettent chacune une limite à droite en a, une limite à gauche en b, ainsi que des limites à droite et à gauche en les autres points de la subdivision. Une telle subdivision est dite adaptée à f.

Exemple : La figure **3** fournit le graphe d'une application de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur [0, 1], à valeurs réelles.

Considérons une application f de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et $(a_i)_{i \in [0,\, n]}$ une subdivision adaptée à f. Par définition, sa restriction à $]a_i, a_{i+1}[$ est prolongeable en une application (notée f_i) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$. Cela équivaut à dire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ privé de ses points de subdivision et que sa dérivée admet en les points de subdivision des limites à droite et à gauche, avec la restriction que, en a, elle admet seulement une limite à droite et, en b, une limite à gauche. La dérivée f' est donc définie, sauf sur l'ensemble des points de subdivision. En ces points a_i, on lui attribue une valeur arbitraire et, d'ailleurs, sans incidence sur la valeur de $\int_a^b f'$. On a alors le résultat suivant :

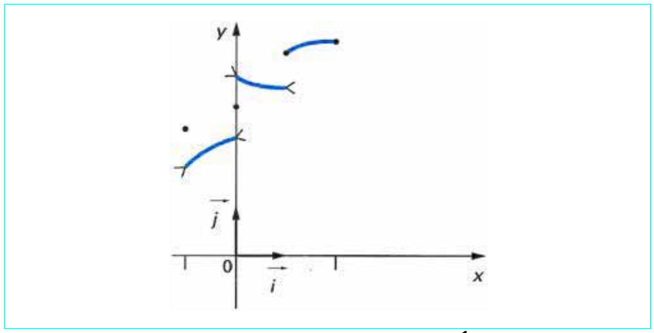

Figure 3 – Graphe d'une application de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur [– 1, 2] non continue

Proposition 11

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ et qui, de plus, est continue. On a :

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)\,.$$

◊ **Preuve**

En effet :

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_i+1} f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_i+1} f_i'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} (f_i(a_{i+1}) - f_i(a_i)) = f(b) - f(a)$$

car f_i et f_{i+1} coïncident en a_i. ◊

Remarque. Lorsque f est supposée de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$, sans être nécessairement continue, on dispose de l'égalité :

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} (f_i(a_{i+1}) - f_i(a_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(a_{i+1}^-) - f(a_i^+))$$

lorsque $f(a_i^+)$ désigne la limite à droite de f en a_i et $f(a_i^-)$ désigne sa limite à gauche.

1.3 Techniques de calcul d'intégrales

1.3.1 Intégration par parties

Proposition 12

Soit f et g deux applications continûment dérivables sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$, a et b des points de I. Alors :

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g$$

◊ **Preuve**

Puisque $(fg)' = f'g + fg'$, on a aussi :

$$\int_a^b (f'g + fg') = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

d'après le théorème **3**. Le résultat en découle immédiatement. ◊

Notation. La quantité $f(b)g(b) - f(a)g(a)$ peut être interprétée comme l'accroissement de fg entre a et b. On la note souvent $[fg]_a^b$.

Lorsque f et g sont continûment dérivables par morceaux et continues sur le segment $[a, b]$, la formule précédente reste valide, les dérivées f et g aux points d'une subdivision adaptée à ces applications étant définies arbitrairement.

Exemple 4 : calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Soit f la fonction 2π périodique définie par $x \mapsto x^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

Le calcul des cœfficients de Fourier de f donne :

$b_n = 0$ (la fonction est paire) ;

Pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} t^2 \cos nt\,dt \\ &= \left[\frac{t^2 \sin nt}{\pi n}\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi} t \sin nt\,dt \\ &= 0 + \frac{2}{\pi n^2}[t \cos nt]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\,dt \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\pi \cos n\pi = \frac{4(-1)^n}{n^2} \text{ et } a_0 = \frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

Puisque f est somme de sa série de Fourier, on obtient pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_1^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$ et, pour $x = \pi$, $\frac{2\pi^2}{6} = \sum_1^{+\infty} \frac{4}{n^2}$.

D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exemple 5 : Calcul des intégrales de Wallis et application au calcul de l'équivalent de Stirling de $n!$.

— Pour $n \in \mathbb{N}$ on appelle $n^{\text{ième}}$ intégrale de Wallis, l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$$

(par le changement de variable $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$).

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \sin t\,dt$$

On intègre par parties en posant $u(t) = \sin^{(n+1)} t$ et $v(t) = -\cos t$.

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[-\sin^{n+1} t \cos t\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^2 t\,dt \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,(1 - \sin^2 t)\,dt = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

d'où $I_{n+2} = \frac{(n+1)}{(n+2)} I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

Par récurrence on obtient :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{(2p+1)} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

— Calcul de l'équivalent de Stirling de $n!$

On veut prouver $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$.

On pose $u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}\, n^n e^{-n}}$ et l'on se propose de prouver que u_n admet une limite strictement positive λ.

Soit $S_n = -\ln u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n - \ln n!$

S_n apparaît comme somme partielle de la série de terme général $v_k = S_k - S_{k-1}$ pour $k \geqslant 2$ et $v_1 = S_1$:

$$v_k = -\left(k - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - 1 = 0\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

La série $\sum v_k$ est convergente, donc la suite (S_n) admet une limite finie ℓ et $u_n = (e^{-S_n})$ admet la limite $\lambda = e^{-\ell}$.

On se propose de calculer λ en utilisant les intégrales de Wallis.

On a, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^{n+2} t \leqslant \sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$, ce qui donne $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

On obtient $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$ avec $\lim_{+\infty} \frac{I_{n+2}}{I_n} = 1$,

car $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

On déduit $\lim_{+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

Or $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!\pi}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Avec $n! \sim \lambda n^{n+1/2} e^{-n}$, on déduit $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \sim \frac{\lambda^2}{2\pi}$.

Comme $\lim_{+\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$, on déduit $\lambda = \sqrt{2\pi}$.

On a prouvé :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

Dans la pratique, il est commode d'utiliser **la notation de Leibniz** suivante. L'intégrale est écrite :

$$\int_a^b f\,dg$$

ce qui signifie que $g'(t)dt$ est remplacé par dg. On intègre le dg en g et on dérive le f en df.

Cela fournit :

$$\int_a^b f\,dg = [fg]_a^b - \int_a^b g\,df$$

Si l'on a à calculer une intégrale du type $\int_a^b \phi$, le premier travail consiste à mettre ϕ sous forme d'un produit de deux applications, dont l'une admet une primitive simple. Il est en général possible de le faire de plusieurs manières. Le choix est déterminé par la possibilité de calculer la seconde intégrale.

1.3.2 Changement de variable

Proposition 13

Soit f une application continue sur I, à valeurs dans ***F****, a et b des points de I. Soit ϕ une application continûment dérivable sur un intervalle J, à valeurs dans I, c et d des points de J tels que* $\phi(c) = a$, $\phi(d) = b$. Alors :

$$\int_a^b f = \int_c^d f \circ \phi \cdot \phi'$$

◊ **Preuve**

Puisque $(f \circ \phi)' = f' \circ \phi \cdot \phi'$, le résultat découle du théorème **3**. ◊

La notation de Leibniz est commode là aussi. On cherche à transformer $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. On pose le changement de variable $t = \phi(u)$. Alors $\mathrm{d}t = \phi'(u)\mathrm{d}u$. L'intégrande $f(t)\mathrm{d}t$ est transformé en $f(\phi(u))\phi'(u)\mathrm{d}(u)$. Lorsque u vaut c, t vaut a ; de même, lorsque u vaut d, t vaut b. On pourra, pour appuyer cette transformation, écrire :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{t=a}^{t=b} f(t)\mathrm{d}t$$

Il n'est pas *a priori* utile que ϕ soit bijective. En d'autres termes, c et d pourraient n'être pas uniques. Néanmoins, dans les applications, l'intégrale à traiter ne se présente pas toujours sous la forme voulue pour appliquer la proposition **13**. Soit, par exemple, l'intégrale $\int_c^d (f \circ \phi)(u)\mathrm{d}u$. Pour la transformer, nous sommes tentés de poser $t = \phi(u)$. Cela impose d'introduire l'application réciproque ψ de ϕ, pour autant qu'elle existe, et de poser en fait, conformément à la proposition **13**, $u = \psi(t)$.

Exemple 6 : invariance par translation, applications aux fonctions périodiques.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et $u \in \mathbb{R}$:

$$\int_{a-u}^{b-u} f(x+u)\mathrm{d}x = \int_a^b f(v)\mathrm{d}v \text{ en posant } v = x + u.$$

Pour f fonction périodique de période T sur $\mathbb{R}$, on a pour a et $b \in \mathbb{R}$:

$$\int_{a+T}^{b+T} f(v)\mathrm{d}v = \int_a^b f(v)\mathrm{d}v$$

et
$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a+T}^T f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x + \left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x\right]$$
$$= \int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$$

D'où, pour une fonction T-périodique :

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x \text{ ne dépend pas de } a$$

Exemple 7 : intervalle symétrique par rapport à l'origine.

Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$.

On a $\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x = \int_0^{-a} f(x)\mathrm{d}x$ par le changement de variable $x \to -x$.

D'où $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a (f(x) + f(-x))\mathrm{d}x$.

En particulier :

si f est paire $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;

si f est impaire $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Exemple 8 : calcul de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

On pose $x = \sin\theta$ avec $\theta \in [0,\pi/2]$ et $x \in [0,1]$:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\mathrm{d}\theta$$
$$= \left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Soit :
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

1.4 Notion d'intégrale impropre

Bien que la notion d'**intégrale impropre** ne relève pas toujours strictement du domaine de l'intégration, elle y est suffisamment liée pour trouver sa place ici. De plus, cette notion élémentaire intervient fréquemment dans les applications.

1.4.1 Généralités

■ **Cas d'un intervalle $[o, \alpha[$**

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, et toutes les applications considérées seront localement réglées sur I et à valeurs dans ***F***. On suppose dans un premier temps, que $I = [o, \alpha[$, où o est un réel fini quelconque et où α est un réel strictement plus grand que o, soit $+\infty$. Si a est dans I, l'application F_a est définie comme dans le paragraphe 1.2.1 par $F_a(x) = \int_a^x f$. Ainsi, F_a est une application continue de I dans ***F***.

Définition. On dit que l'intégrale $\int_a^\alpha f$ est **convergente** (ou encore est bien définie, ou existe) lorsque $F_a(x)$ admet une limite lorsque x tend vers α en restant dans I. Cette limite est alors notée $\int_a^\alpha f$. On l'appelle **intégrale impropre** (ou généralisée) de f entre a et α.

Lorsque l'intégrale $\int_a^\alpha f$ n'est pas convergente, on dit qu'elle est **divergente**.

Le symbole $\int_a^\alpha f$ ne désigne donc un objet mathématique que lorsque l'intégrale est convergente. Tant que l'on ignore la convergence de l'intégrale, on doit éviter d'utiliser ce symbole autrement que comme une périphrase.

Remarque 1. Soit b un autre élément de I. La relation de Chasles nous fournit :

$$F_b(x) = F_a(x) + \int_b^a f$$

L'existence d'une limite pour F_b équivaut donc à l'existence de cette limite pour F_b. En d'autres termes, on ne change pas la *nature* de l'intégrale, lorsque l'on change la borne du bas. Dans la pratique, on fera un choix qui simplifie l'étude.

En outre, si $\int_a^\alpha f$ converge, on obtient, par passage à la limite dans l'égalité ci-dessus :

$$\int_b^\alpha f = \int_a^\alpha f + \int_b^a f$$

Remarque 2. Supposons $\int_a^\alpha f$ convergente. D'après la remarque **1**, pour tout x dans I, l'intégrale $\int_a^\alpha f$ converge. Cette quantité (qui en réalité dépend de x) est appelée **reste de l'intégrale**. On dispose de l'égalité :

$$\int_x^\alpha f = \int_a^\alpha f - \int_a^x f$$

toujours grâce à la remarque **1**. Lorsque x tend vers α, on constate que la différence de droite tend vers 0. On exprime cela en disant que le reste d'une intégrale convergente tend vers 0.

Les propriétés élémentaires de l'intégrale impropre sont celles de l'intégrale. Nous les citons sans démonstration, car elles s'obtiennent toutes par un passage à la limite. Celles qui ne sont pas explicitement citées ne sont, en général, pas valides, ou seront étudiées ultérieurement.

Proposition 14

(1) *L'ensemble des applications dont l'intégrale impropre entre a et α converge forme un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications localement réglées sur I à valeurs dans* **F**. *De plus, l'application $f \mapsto \int_a^\alpha f$ est linéaire sur cet espace vectoriel.*

(2) *Si f est à valeurs réelles positives et si l'intégrale impropre $\int_a^\alpha f$ converge, alors $\int_a^\alpha f \geqslant 0$.*

Si de plus f est continue sur I, cette dernière intégrale n'est nulle qui si f est nulle sur $[a, \alpha[$.

(3) *Si f et g sont continûment dérivables sur I, à valeurs dans* **K**, *et si deux des trois quantités écrites ci-dessous existent, la troisième existe aussi. De plus :*

$$\int_a^\alpha fg' = \lim_{x \to \alpha} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^\alpha f'g$$

(4) *Soit une application continue, à valeurs dans F. Soit ϕ une application continûment dérivable et bijective de $[c, \gamma[$ sur $[a, \alpha[$. Alors :*

$$\int_a^\alpha f = \int_c^\gamma f \circ \phi \cdot \phi'$$

(5) *Pour f à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $f_1, ..., f_p$ sont les applications composantes de f. La convergence de l'intégrale $\int_a^\alpha f$ équivaut à la convergence de toutes les intégrales $\int_a^\alpha f_i$. De plus, lorsque cette condition est réalisée :*

$$\int_a^\alpha f = \int_a^\alpha f_1, \ldots, \int_a^\alpha f_p$$

Cas général

Lorsque I est un intervalle de la forme $]\alpha, o]$, les définitions sont tout à fait analogues. Lorsque I est de la forme $]\alpha, \beta[$, on dit que l'intégrale $\int_a^\beta f$ converge lorsqu'il existe o dans I tel que, séparément, les intégrales $\int_\alpha^0 f$ et $\int_0^\beta f$ convergent. On vérifie alors que cette propriété est satisfaite par n'importe quel point o de I. La valeur de l'intégrale impropre $\int_a^\beta f$ est, par définition, égale à $\int_\alpha^0 f + \int_0^\beta f$. On vérifie que cette quantité est indépendante du choix de o.

On introduit alors les conventions faites dans le paragraphe 1.2. Par exemple, $\int_\alpha^\beta f$ est égal, par convention, à $-\int_\alpha^\beta f$. On dispose alors de la relation de Chasles généralisée :

$$\forall (x, y, z) \in [\alpha, \beta]^3 \int_x^z f = \int_x^y f + \int_y^z f$$

Exemple 9 : calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$.

Il s'agit d'une intégrale impropre en 1.
Par intégration par parties, on a pour $\alpha \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_0^\alpha \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx \\ &= \left[\ln(1-x^2)\left(\frac{-1}{x}\right)\right]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{2}{1-x^2} dx \\ &= -\frac{\ln(1-\alpha^2)}{\alpha} - \int_0^\alpha \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= [\ln(1-\alpha)]\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - [\ln(1+\alpha)]\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Donc $\lim_{\alpha \to 1} I_\alpha = -2\ln 2$:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx = -2\ln 2$$

Exemple 10 : calcul de $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\mathrm{d}x$.

Il s'agit d'une intégrale impropre en $\pi/2$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\mathrm{d}u \text{ par le changement de variable } u = \frac{\pi}{2} - x \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin v)\mathrm{d}v \text{ par le changement de variable } v = \pi - u \end{aligned}$$

Par sommation :

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \ln(\sin x)\mathrm{d}x.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2 \end{aligned}$$

Par changement de variable $2x = u$, on obtient :

$$2I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln 2 = I - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

D'où $\quad I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

Exemple 11 : existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$ pour $o < a < b$.

On choisit $0 < x$.

$$I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{x}\mathrm{d}x - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$$

Dans la première intégrale, on pose $t = ax$, dans la seconde $t = bx$:

$$I(x) = \int_{aX}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \int_{bX}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$$

Comme $\quad e^{-bX}\ln\frac{b}{a} = e^{-bX}\int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$

$$\leqslant e^{-aX}\int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{d}t}{t} = e^{-aX}\ln\frac{b}{a}$$

On a : $\quad \lim_{X \to 0^+} \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \ln\frac{b}{a}$

On a prouvé l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$ dont la valeur est $\ln\frac{b}{a}$.

1.4.2 Critères de convergence

Dans ce paragraphe, nous considérons un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si, par exemple, $I = [o, \alpha[$, nous noterons abusivement $\int_I f$ l'intégrale impropre $\int_0^{\alpha} f$, lorsqu'elle converge. Néanmoins, cette notation ne doit pas masquer le fait que $\int_I f$ peut ne pas être assimilable à une intégrale de Lebesgue, telle que la paragraphe 2 l'introduira.

Dans la pratique, il est important de pouvoir décider si une intégrale converge ou non. Nous nous appuierons, d'une part, sur la définition elle-même et, d'autre part, sur le théorème d'absolue convergence.

Théorème 4 et définition. Si f est localement réglée sur I et si $\int \|f\|$ converge, alors $\int_I f$ converge. On dit alors que cette intégrale est **absolument convergente**.

◊ **Preuve**

Il n'est pas restrictif de supposer que $I = [o, \alpha[$. Si $o \leqslant y \leqslant x < \alpha$, on a :

$$\|F_a(x) - F_a(y)\| = \left\|\int_y^x f\right\| \leqslant \int_y^x \|f\|$$

D'après la condition nécessaire du critère de Cauchy, la quantité majorante est inférieure à ε pour x et y assez porches de α. La condition suffisante de ce même critère entraîne que l'application F_a admet une limite en α, ce qui signifie que l'intégrale $\int_0^{\alpha} f$ converge. ◊

Le théorème précédent ne donne qu'une condition suffisante de convergence. Remarquons au passage que, en cas d'absolue convergence, on dispose de l'inégalité :

$$\left\|\int_I f\right\| \leqslant \int_I \|f\|$$

La terminologie **absolue convergence** s'explique par le fait que, lorsque, $\boldsymbol{F} = \mathbb{R}$, on suppose la convergence de l'intégrale de la valeur absolue de f.

Le théorème qui précède permet souvent de ramener la preuve de la convergence d'une intégrale à celle de la convergence de l'intégrale d'une application positive.

Proposition 15

Soit f une application localement réglée sur I, à valeurs réelles positives, où $I = [o, \alpha[$.

(1) *Pour que l'intégrale* $\int_0^{\alpha} f$ *converge, il faut et il suffit que* F_o *soit majorée sur I.*

Dans ce cas, $\int_0^{x} f$ *tend en croissant vers* $\int_0^{\alpha} f$ *quant x tend vers α.*

(2) *Si l'intégrale* $\int_0^{\alpha} f$ *diverge, alors* $\int_0^{x} f$ *tend en croissant vers* $+\infty$*, quand x tend vers α.*

◊ **Preuve**

Puisque f est positive, F_o et croissante. La proposition résulte donc des résultats relatifs aux applications croissantes.◊

Dans la pratique, f peut n'être positive qu'au voisinage de α. La proposition **15** s'applique alors, puisque l'on peut changer la borne du bas sans changer la nature de l'intégrale. Bien entendu, on dispose d'énoncés analogues lorsque $I =]\alpha, o]$ et aussi lorsque f est négative au voisinage de α.

Dans les propositions qui suivent, toutes les applications considérées sont supposées localement réglées sur I.

Proposition 16

Si $0 \leqslant f \leqslant g$ *sur* $I = [\alpha, o[$, *alors :*

(1) *la convergence de* $\int_0^\alpha g$ *entraîne celle de* $\int_0^\alpha f$ *;*

(2) *la divergence de* $\int_0^\alpha f$ *entraîne celle de* $\int_0^\alpha g$.

◊ **Preuve**

(1) On a $\int_0^x f \leqslant \int_0^\alpha g$; la deuxième intégrale étant majorée d'après la proposition **15**, il en va de même de la première. La proposition **15** à nouveau permet de conclure.

(2) n'est pas rien d'autre que la contraposée de **(1)**.◊

Dans la pratique, on utilise souvent un critère d'absolue convergence. Voici comment. Supposons que f et g soient telles que $\|f\| \leqslant g$ (ce qui n'est réalisé que lorsque g est à valeurs réelles positives). Il suffit d'ailleurs que cette inégalité soit vraie au voisinage de α. Supposons en outre que $\int_0^\alpha g$ converge. La proposition **16** entraînera que l'intégrale de $\|f\|$ est convergente, donc que celle de f est absolument convergente. Pour que la condition précédente soit satisfaite, il suffit en réalité que $f = O(g)$, ce qui signifie que, pour une certaine constante K, $\|f\| \leqslant Kg$ au voisinage de α. *A fortiori* suffit-il que $f = o(g)$ (ce qui signifie que f est négligeable devant g).

Résumons ces critères pratiques.

Proposition 17

(1) *Si l'intégrale de g est absolument convergente et si* $f = O(g)$ *ou* $f = o(g)$, *alors l'intégrale de f est absolument convergente.*

(2) *Si g est à valeurs réelles et de signe constant au voisinage de* α, *si f est à valeurs réelles, si* $f \sim g$, *alors les intégrales de f et de g sont de même nature.*

Bien entendu, pour pouvoir concrètement appliquer ce qui précède, il est bon de disposer d'une famille d'applications positives dont l'intégrale a une nature connue. Le tableau **1** répond à la question.

Tableau 1 – Nature de l'intégrale de quelques fonctions classiques

Au voisinage de...	la fonction...	lorsque les paramètres vérifient...	a une intégrale...
$+\infty$	$\dfrac{1}{t^\alpha}$	$\alpha > 1$	convergente
$+\infty$	$\dfrac{1}{t^\alpha}$	$\alpha \leqslant 1$	divergente
$+\infty$	$e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	convergente
$+\infty$	$e^{-\lambda t}$	$\lambda \leqslant 0$	divergente
$+\infty$	$\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$	$\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)	convergente
$+\infty$	$\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$	$\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 1$)	divergente
$a \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\lvert t-a\rvert^\alpha}$	$\alpha < 1$	convergente
$a \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\lvert t-a\rvert^\alpha}$	$\alpha \geqslant 1$	divergente

Plan d'étude de l'absolue convergence

● On commence par décomposer l'intervalle I sur lequel on intègre la fonction f en la réunion d'un nombre fini de sous-intervalles J de la forme $[o, \alpha[$ ou $]\alpha, o]$, tels que f soit localement réglée sur J.

● Supposons par exemple $J = [o, \alpha[$. On étudie le comportement de f au voisinage de α grâce à l'emploi des relations de comparaison O, o, ou $\sim$. Si l'on parvient à majorer $\|f\|$ par une application de référence dont l'intégrale converge, on peut affirmer que l'intégrale $\int_I f$ est absolument convergente. Si ce n'est pas possible, cela peut signifier que l'intégrale est convergente, mais non absolument. Il est possible aussi que l'on puisse montrer que $\int_I f$ est divergente, tout au moins lorsque f est à valeurs réelles et de signe constant au voisinage de α. Si f est à valeurs vectorielles, on peut essayer de montrer que l'une des applications composantes de f est divergente, ce qui suffirait à assurer que $\int_I f$ est elle aussi divergente.

● Au terme de cette étude, si l'on a montré que, pour tous les J, $\int_J f$ est convergente, on est assuré que $\int_I f$ l'est aussi.

Si, au contraire, l'une des intégrales $\int_J f$ diverge, alors $\int_I f$ diverge elle aussi.

Dans le cas où un critère d'absolue convergence ne suffit pas, il faut avoir recours à d'autres techniques qui sont évoquées dans certains des exemples ci-dessous.

1er exemple. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge, car $0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$ pour $t \geqslant 1$, et $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge d'après le tableau précédent.

2e exemple. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$ converge, car $t^2 e^{-\sqrt{t}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ ce qui signifie que $e^{-\sqrt{t}} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, et $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\,dt$ converge d'après le tableau précédent.

3e exemple. L'intégrale $\int_{-1}^{1} \dfrac{dt}{t}$ diverge, car l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{dt}{t}$ diverge.

4^e exemple. considérons l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$. Puisque $t \mapsto \sin t$ est prolongeable par continuité en 0 (en lui attribuant la valeur 1), elle est localement réglée sur $[0,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on ne parvient pas à montrer l'absolue convergence. On effectue alors une intégration par parties :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} \mathrm{d}t$$

L'accroissement $\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x$ admet la limite cos 1 en $+\infty$. La seconde intégrale est, elle, absolument convergente, du fait que $\frac{\cos t}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ce qui implique l'existence d'une limite à $\int_1^x \frac{\cos t}{t^2} \mathrm{d}t$.

Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge.

5^e exemple. considérons l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin t^2 \mathrm{d}t$. Puisque $t \mapsto \sin t^2$ est continue sur $[0,+\infty[$, elle est localement réglée sur $[0,+\infty[$. En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{u}$, qui est bien un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $[1,+\infty[$ sur lui-même, nous sommes ramenés à l'étude de la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u$. La convergence de cette dernière intégrale se montre comme dans l'exemple **4**, par une intégration par parties.

On montrerait de même la convergence de $\int_0^{+\infty} \cos t^2 \mathrm{d}t$. Il en résulte que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} \mathrm{d}t$ converge elle aussi (intégrale de Fresnel.)

La valeur de cette intégrale est calculée dans le paragraphe 2.7.2.

1.5 Fonctions définies par une intégrale

1.5.1 Cas de l'intégrale d'une application réglée

Nous considérons à présent une application f de deux variables :

$$f : [a, b] \times X \to \boldsymbol{F}$$
$$(t,x) \mapsto f(t,x)$$

Si, pour chaque x dans X, qui est un espace métrique quelconque, muni de la distance d, $t \mapsto f(t, x)$ est réglée (elle sera continue dans la réalité des résultats qui vont suivre), on peut parler de l'intégrale $\int_a^b f(t, x)\mathrm{d}t$, qui dépend de x, et définit ainsi une application ϕ de X dans $\boldsymbol{F}$, par l'égalité :

$$\phi(x) = \int_a^b f(t, x)\mathrm{d}t$$

On dit que ϕ est une **intégrale dépendant du paramètre** x. À la différence de ce que nous avons rencontré dans le paragraphe 1.2.1, x est situé sous le signe $\int$ et non en borne. L'idée essentielle est que la régularité de f par rapport à x détermine essentiellement la régularité de ϕ.

Proposition 18

(1) Continuité sous le signe $\int$. *Si f est continue sur $[a, b] \times X$, alors ϕ est continue sur X.*

(2) Continuité par rapport à la borne et au paramètre sous le signe $\int$. *Si f est continue sur $[a, b] \times X$, posons :*

$$\forall (x, y) \in X \times [a, b] \quad \psi(x, y) = \int_a^y f(t, x)\mathrm{d}t$$

Alors ψ est continue sur $X \times [a, b]$.

◊ **Preuve**

(1) Soit x un point de X. Admettons un instant que X soit compact ; f est alors uniformément continue sur $[a, b] \times X$, qui est lui aussi compact. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, si (x, t) et (x', t') sont distants de moins de η, $\|f(t', x') - f(t, x)\| \leqslant \varepsilon$. Si $d(x, x') \leqslant \eta$, on a donc, pour tout t dans $[a, b]$, $\|f(t, x') - f(t, x)\| \leqslant \varepsilon$. Par intégration de cette inégalité, on obtient $\|\phi(x') - \phi(x)\| \leqslant \varepsilon$. Cela prouve la continuité de ϕ sur X.

Mais un résultat élémentaire de topologie assure que la continuité d'une application sur tout compact d'un espace métrique entraîne sa continuité sur cet espace métrique. Le résultat est ainsi prouvé.

(2) Effectuons le changement de variable $t = a + u(y - a)$. Il vient :

$$\psi(x, y) = \int_0^1 (y - a) f(a + u(y - a), x)\mathrm{d}u = \int_0^1 g((x, y), t)\mathrm{d}t$$

L'application $((x, y), t) \mapsto g((x, y), t)$ étant manifestement continue sur $(X \times [a, b]) \times [a, b]$, on peut appliquer **(1)**. ◊

On montre de même la proposition **19**.

Proposition 19

Dérivation sous le signe $\int$. *On suppose que X est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a, b] \times X$ et qu'elle admet sur $[a, b] \times X$ une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x, qui est elle-même continue sur $[a, b] \times X$.* Alors, ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur X. De plus :

$$\phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\mathrm{d}t$$

Plus généralement, si f admet sur $[a, b] \times X$ des dérivées partielles $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ par rapport à x, continues sur $[a, b] \times X$, pour $k \in [0, n]$, ϕ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur X, et l'on peut dériver n fois sous le signe $\int$.

Exemple 12 : calcul de $I(a) = \int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos t + a^2)\mathrm{d}t$ pour $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

On remarque que $I(-a) = I(a)$. On fait le calcul pour $a \geqslant 0$:

$$I(a) = \int_0^{\pi} F(a, t)\mathrm{d}t \text{ avec } F(a, t) = \ln(1-2a\cos t + a^2)$$

où $F \in \mathscr{C}^0((\mathbb{R} - \{1, -1\}) \times [0, \pi])$

et $\dfrac{\partial F}{\partial x} \in \mathscr{C}^0((\mathbb{R} - \{1, -1\}) \times [0, \pi])$

$$I'(a) = \int_0^{\pi} \frac{\partial F}{\partial a}(a, t)\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^{\pi} \frac{a - \cos t}{1 - 2a\cos t + a^2}\mathrm{d}t$$

Or : $a - \cos t = \dfrac{1}{2a}(1 - 2a\cos t + a^2) - \dfrac{a^2+1}{2a} + a$

Donc $\dfrac{a - \cos t}{1 - 2a\cos t + a^2} = \dfrac{1}{2a} + \dfrac{a^2-1}{2a} - \dfrac{1}{1 - 2a\cos t + a^2}$

Par conséquent :

$$I'(a) = \frac{\pi}{a} + \frac{a^2-1}{a}\int_0^{\pi} \frac{1}{1-2a\cos t + a^2}\mathrm{d}t$$

On pose :

$$u = \tan\frac{t}{2}$$

et :

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1-2a\cos t + a^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}u}{u^2(1+a)^2 + (1-a)^2}$$

$$= \frac{2}{(1-a)^2}\left[\arctan\left(u\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{(1-a^2)}\,\varepsilon\,\frac{\pi}{2}$$

où ε est le signe de $1 - a^2$.

$I'(a) = \dfrac{\pi}{a} - \varepsilon\dfrac{\pi}{a}$.

Si $0 \leqslant a < 1$, $I'(a) = 0$

d'où $I(a) = \int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos t + a^2)\mathrm{d}t = I(0) = 0$

Si $a > 1$, $I'(a) = \dfrac{2\pi}{a}$ et $I(a) = 2\pi\ln(a) + C$

Or $I(a) - 2\pi\ln(a) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - \dfrac{2\cos t}{a} + \dfrac{1}{a^2}\right)\mathrm{d}t$ dont la limite en $+\infty$ vaut 0, d'où $I(a) = 2\pi\ln a$.

Conclusion
$I(a) = 0$ si $|a| < 1$
$I(a) = 2\pi\ln|a|$ si $|a| > 1$

1.5.2 Cas des intégrales impropres

Nous considérons à présent une application f de deux variables :

$$f : [o, \alpha[\, \times X \to \boldsymbol{F}$$
$$(t, x) \mapsto f(t, x)$$

On suppose que, pour chaque x dans X, $t \mapsto f(t, x)$ est localement réglée, et que l'intégrale $\int_0^{\alpha} f(t, x)\mathrm{d}t$, qui et impropre, converge ; on définit ainsi une application ϕ de X dans $\boldsymbol{F}$, par l'égalité :

$$\phi(x) = \int_0^{\alpha} f(t, x)\mathrm{d}t$$

On dit que ϕ est une intégrale impropre dépendant du paramètre x. Dans ce cas, l'étude de ϕ peut davantage relever de celle des suites ou séries d'applications que de l'intégration proprement dite.

1.6 Intégrale d'une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^n$

Ce paragraphe nous sera principalement utile pour l'étude de l'intégrale de Lebesgue.

Soit $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^n$. Une application continue de $\boldsymbol{E}$ dans $\mathbb{R}$ est dite à **support compact** lorsqu'il existe un pavé $P = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ en dehors duquel f est nulle. Pour la lisibilité ultérieure, on se limite à $n = 2$, sans que cela amoindrisse en quoi que ce soit la généralité. On notera $\mathscr{C}_c$ l'ensemble des applications continues à support compact de $\boldsymbol{E}$ dans $\mathbb{R}$.

D'après la proposition **18**, l'application $t_2 \mapsto \int_{a_1}^{b_1} f(t_1, t_2)\mathrm{d}t_1$ est continue sur $[a_2, b_2]$. Rien n'interdit de considérer l'intégrale de cette application sur $[a_2, b_2]$, égale à :

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(t_1, t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$

Lemme. Sous les hypothèses ci-dessus, on a l'égalité :

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(t_1, t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(t_1, t_2)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1$$

◊ **Preuve**.

Introduisons l'application dépendant de la borne :

$$\psi(x_2) = \int_{a_2}^{x_2}\int_{a_1}^{b_1} f(t_1, t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$

Par dérivation, puisque $t_2 \mapsto \int_{a_1}^{b_1} f(t_1, t_2)\mathrm{d}t_1$ est continue, on obtient :

$$\psi'(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} f(t_1, x_2)\mathrm{d}t_1$$

D'un autre côté, posons :

$$\phi(x_2) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{x_2} f(t_1, t_2)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1$$

On peut cette fois appliquer une dérivation sous le signe $\int$, qui conduit à :

$$\phi'(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} f(t_1, x_2)\mathrm{d}t_1$$

Ainsi, $\psi - \phi$ est constante. Pour $x_2 = a_2$, cette application est nulle. Donc $\phi(b_2) = \psi(b_2)$, ce que l'on voulait prouver. ◊

Il résulte de ce qui précède que l'interversion des indices 1 et 2 conduit à la même valeur d'intégrale. Il n'est pas ambigu de noter $\int_P f$ cette valeur commune. Puisque f est nulle en dehors de P, il est tentant de la noter aussi $\int_E f$, ce qui n'est légitime qu'après vérification du fait que ce nombre ne dépend pas du pavé P choisi.

Ainsi, nous avons pu définir l'intégrale sur $\mathbb{R}^n$ d'une application continue à support compact.

On la notera $\int_E f$, ou encore $\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(t_1, \dots, t_n) \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n$.

Il est extrêmement aisé de vérifier que l'application $f \mapsto \int_E f$ vérifie, sur l'espace vectoriel des applications continues à support compact, la liste des propriétés résumées ci-dessous.

Proposition 20

(*1*) ***Linéarité***. L'application $\int_E : \mathscr{C}_c \to \mathbb{R}$ est linéaire.

$$f \mapsto \int_a^b f$$

(*2*) ***Positivité***. *Si $f \in \mathscr{C}_c$ est à valeurs positives ou nulles, $\int_E f$ est positive ou nulle.*

(*3*) ***Croissance***. *Si f et g sont dans $\mathscr{C}_c$, et si $f \leqslant g$, alors :*

$$\int_E f \leqslant \int_E g$$

(*4*) ***Inégalité triangulaire***. *Si $f \in \mathscr{C}_c$, alors :*

$$\left| \int_E f \right| \leqslant \int_E |f|$$

(*5*) ***Majoration uniforme***. *Si $f \in \mathscr{C}_c$ et si f est nulle en dehors du pavé $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, alors :*

$$\left| \int_E f \right| \leqslant \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \|f\|_\infty$$

2. Intégrale de Lebesgue

2.1 Préliminaires

2.1.1 Droite numérique achevée

On notera dans la suite $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$, auquel on a ajouté deux points, notés respectivement $-\infty$ et $+\infty$. On munit $\overline{\mathbb{R}}$ de la relation d'ordre qui prolonge celle de $\mathbb{R}$, avec la condition supplémentaire que $-\infty$ est plus petit que tout autre élément (y compris $+\infty$) et $+\infty$ plus grand que tout autre élément. Cet ensemble ordonné est appelé **droite numérique achevée**. On munit aussi $\overline{\mathbb{R}}$ d'une topologie qui prolonge celle de $\mathbb{R}$, de telle façon qu'une suite (y_n) d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tende vers $+\infty$ lorsque :

$$\forall \rho \in \mathbb{R} \quad \exists N \ \forall n \quad n \geqslant N \Rightarrow y_n \geqslant \rho$$

On constate que, lorsque les éléments y_n sont réels, cette propriété coïncide avec le fait que (y_n) tende vers $+\infty$ au sens usuel.

On introduit une définition analogue relative aux suites tendant vers $-\infty$.

On constate facilement qu'**un sous-ensemble non vide** A de $\overline{\mathbb{R}}$ **admet toujours une borne supérieure** : car, ou bien cet ensemble admet un majorant réel, et alors il admet une borne supérieure réelle, ou bien il n'admet pas de majorant réel, et $+\infty$ fait l'affaire. On notera sup A cette borne supérieure. De même, inf A est bien définie (borne inférieure de A).

Dans la pratique, pour montrer que sup $A \geqslant s$, il suffit de montrer la propriété suivante : quel que soit le réel $m < s$, il existe a dans A tel que $a > m$.

L'un des intérêts de $\overline{\mathbb{R}}$ est le suivant : **toute suite croissante d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une limite** (dans $\overline{\mathbb{R}}$). En effet, si $(u_n)_n$ est une telle suite, on introduit $\lambda = \sup\{u_n\}_n$, qui existe d'après ce qui précède, et on prouve sans difficulté que (u_n) converge vers λ. On notera de manière condensée $u_n \nearrow \lambda$ cette situation. Bien entendu, on aura alors $\lambda \geqslant u_n$ pour tout n.

Plus généralement, soit (f_n) une suite d'applications, définie sur un ensemble A et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On dit que cette suite est croissante lorsque, pour tout x dans A, la suite $(f_n(x))$ est croissante. Cette suite admet une limite, que l'on note $f(x)$. On a ainsi défini une application f, de A dans $\overline{\mathbb{R}}$, que l'on note naturellement f. Cette situation sera abrégée en $f_n \nearrow f$, ce qui se lit : la suite d'applications (f_n) **converge simplement et en croissant vers *f***.

Les résultats et les notations analogues s'étendent sans difficulté au cas décroissant.

On ne peut pas prolonger complètement à $\overline{\mathbb{R}}$ les opérations algébriques de $\mathbb{R}$. Néanmoins, on peut le faire partiellement. Par exemple, il est naturel de poser $a \times (+\infty) = +\infty$ lorsque $a > 0$. En revanche, quel sens donner à $0 \times (+\infty)$? En fait, notre objectif permet de répondre à la question. Si une fonction vaut 0 sur un ensemble de mesure infinie, son intégrale sur cet ensemble vaudra intuitivement quand même 0. On posera donc $0 \times (+\infty) = 0$.

En ce qui concerne l'addition, on posera, là encore naturellement, $a + (+\infty) = +\infty$ lorsque $a \neq -\infty$. Que se passera-t-il si une fonction prend la valeur $+\infty$ sur un ensemble de mesure 1, et $-\infty$ sur un ensemble de mesure 2 ? On aurait plutôt tendance à lui attribuer l'intégrale $-\infty$ donc poser $(+\infty) + (-\infty) = -\infty$. Mais si les rôles joués par 1 et 2 étaient renversés, on devrait attribuer à la somme précédente la valeur $+\infty$. En d'autres termes, aucune définition cohérente n'est possible. Nous n'en poserons donc pas.

2.1.2 Applications continues à support compact

Dans la suite de ce paragraphe, la lettre $\boldsymbol{E}$ désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Définition. Soit f une application de $\boldsymbol{E}$ vers $\mathbb{R}$. On appelle **support** de f l'adhérence de l'ensemble des réels x tel que $f(x)$ soit non nul. On note supp (f) cet ensemble.

1er exemple. Si f_1 est l'application qui vaut 0 en dehors de]0, 1[et qui prend la valeur $x(1-x)$ en l'élément x de]0,1[, l'ensemble des points en lesquels f_1 ne s'annule pas est l'intervalle]0,1[. Son support est l'adhérence de]0,1[, c'est-à-dire [0,1].

2e exemple. Si f_2 est l'application « sin », le support de f_2 est l'adhérence de $\mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

C'est donc l'ensemble $\mathbb{R}$.

Le support d'une application est toujours un fermé de $\mathbb{R}$. Il est donc compact si, et seulement si, il est borné.

On notera $\mathscr{C}_c$ l'ensemble des applications continues de $\boldsymbol{E}$ vers $\mathbb{R}$ dont le support est compact. Si f est une application continue sur

$\boldsymbol{E}$, il revient au même de dire qu'elle est dans $\mathscr{C}_c$ ou qu'il existe un pavé $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ en dehors duquel elle est nulle.

L'application f_1 du premier exemple est dans $\mathscr{C}_c$, mais pas l'application f_2 du deuxième exemple.

On vérifie aisément que $\mathscr{C}_c$ est une sous-algèbre de l'ensemble $\mathscr{C}(\boldsymbol{E}, \mathbb{R})$.

On utilisera aussi le fait que, si f et g sont dans $\mathscr{C}_c$, les applications min (f, g) et max (f, g) sont dans $\mathscr{C}_c$.

Soit f un élément de $\mathscr{C}_c$. Son intégrale sur $\boldsymbol{E}$ est bien définie (cf. § 1.6). Plutôt que $\int_{\boldsymbol{E}} f$, on la notera $\mu(f)$.

Le théorème qui suit, connu sous le nom de théorème de **Dini**, nous sera utile par la suite.

Théorème 5. Soit (f_n) une suite croissante d'applications continues à support compact, convergeant simplement vers une application f de $\mathscr{C}_c$. La convergence de (f_n) vers f est en fait uniforme. De plus, $\mu(f_n) \nearrow \mu(f)$.

◊ **Preuve**

Puisque $f \geqslant f_n \geqslant f_0$, on voit que toutes les f_n sont nulles en dehors de la réunion du support de f et de celui de f_0. Appelant X un pavé contenant cet ensemble, on voit qu'il suffit de montrer la convergence uniforme sur X. Posons $g_n = f - f_n$. Cette fois, la suite (g_n) décroît vers l'application nulle.

Soit $\varepsilon > 0$ et $X_n = \{x \in X \quad g_n(x) \geqslant \varepsilon\}$; X_n est un fermé de X car g_n est continue. Si $p \geqslant n$, et si $x \in X_p$, on aura :

$$\varepsilon \leqslant g_p(x) \leqslant g_n(x) \Rightarrow x \in X_n$$

Il en résulte que $X_p \subset X_n$. Les X_p constituent donc une suite décroissante de fermés dans le compact X. Mais, si x appartient à tous les X_n, on aura $g_n(x) \geqslant \varepsilon$ pour tout n, ce qui contredit le fait que $(g_n(x))$ tend vers 0. En d'autres termes, l'intersection des X_n est vide : cela entraîne (d'après un résultat sur la compacité) que l'un au moins des X_n est vide. Notons le X_N. Si $n \geqslant N$, X_n est vide lui aussi. Nous avons ainsi prouvé que, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$ et pour tout x de X, $g_n(x) < \varepsilon$. Cela exprime exactement le fait que (g_n) converge uniformément vers 0 sur X.

Notons $v = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ si $X = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$. Nous savons, grâce à la proposition **20**, que :

$$|\mu(g_n)| = \left|\int_X g_n\right| \leqslant v \|g_n\|_\infty$$

Cette inégalité entraîne la convergence vers 0 de la suite $\mu(g_n)$. Finalement, $\mu(f_n) \nearrow \mu(f)$. ◊

2.2 Intégrale supérieure, intégrale inférieure d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$

2.2.1 La classe $\mathscr{I}$

Soit f une application de $\boldsymbol{E}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On dit qu'elle vérifie la propriété $\mathscr{P}_i$ lorsqu'il existe une suite croissante d'applications continues à support compact telle que :

$$\forall x \in \boldsymbol{E} \quad f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$$

Conformément aux notations du paragraphe 2.1, on note $f_n \nearrow f$ cette situation, qui s'exprime en disant que la suite (f_n) converge simplement et en croissant vers f.

Une telle suite (f_n), qui n'est pas unique, est dite **suite associée à** $\boldsymbol{f}$.

On notera $\mathscr{I}$ l'ensemble des applications vérifiant la propriété $\mathscr{P}_i$.

Remarque. Pour qu'une application f appartienne à $\mathscr{I}$, il est nécessaire qu'elle soit minorée par une application continue à support compact, par exemple f_0. Puisque f_0 est minorée, f doit l'être aussi. De plus, f_0 est nulle en dehors d'un certain pavé ; f doit donc être positive en dehors de ce pavé. Cela nous donne des exemples d'applications qui ne sont à coup sûr pas dans $\mathscr{I}$; l'application constante égale à – 1 ou encore l'application qui vaut tan x sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et 0 en dehors, sont dans ce cas.

1^er exemple. Toute application f continue à support compact est dans $\mathscr{I}$: la suite (f_n), avec $f_n = f$ pour chaque n, est en effet associée à f.

2^e exemple. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ constante égale à 1. Définissons f_n (figure **4**) : dès que $n + 1 \geqslant |x|$, on a $f_n(x) = 1$. Donc $f_n \nearrow f$. Ainsi, f appartient à $\mathscr{I}$.

Si, à présent, g est l'application constante égale à $+\infty$, on pose $g_n = nf_n$. On constante alors que $g_n \nearrow g$. Donc g appartient à $\mathscr{I}$.

Le premier exemple montre que $\mathscr{I}$ contient $\mathscr{C}_c$ et le deuxième que cette inclusion est stricte.

3^e exemple. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, qui prend la valeur 0 sur $]-\infty, 0[$ et en chaque point de l'ensemble $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{p}, \ldots\right\}$, et qui prend ailleurs la valeur 1.

Définissons f_n comme suit. Considérons q_n le plus grand des entiers q tel que $q(q+1) \leqslant \frac{n}{2}$.

Sur chacun des segments $\left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \ldots, \left[\frac{1}{q_n + 1}, \frac{1}{q_n}\right]$, on définit f_n comme étant affine en trois morceaux, les morceaux correspondant aux segments $\left[\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n}, \frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right]$. On constate que la construction est possible car $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{2}{n} \cdot f_n$ est nulle ailleurs (figure **5**).

On constate que $f_n \nearrow f$, donc que f appartient à $\mathscr{I}$. Un élément de $\mathscr{I}$ peut donc parfaitement avoir une infinité de points de discontinuité.

Proposition 21

(1) *Si f, g sont dans $\mathscr{I}$, alors $f + g$ est dans $\mathscr{I}$.*

(2) *Si f est dans $\mathscr{I}$, est si $\lambda > 0$, alors λf est dans $\mathscr{I}$.*

(3) *Si f, g sont dans $\mathscr{I}$, alors max (f, g) et min (f, g) sont dans $\mathscr{I}$.*

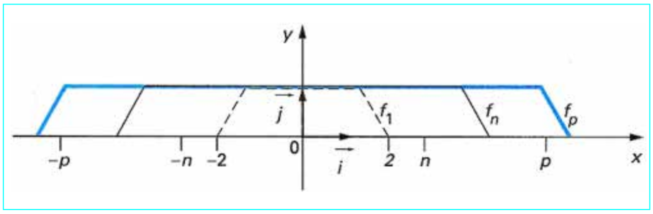

Figure 4 – Suite f_n associée à f (2^e^ exemple)

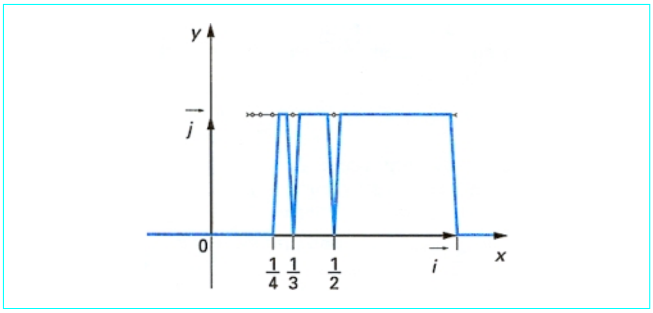

Figure 5 – Définition de f_n (3^e^ exemple)

(4) *Si (f_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{I}$, alors* lim f_n *est dans $\mathcal{I}$.*

◊ **Preuve**

(1) Si (f_n) et (g_n) sont associées respectivement à f et g, alors $(f_n + g_n)$ est associée à $f + g$.

(2) Si (f_n) est associée à f, alors (λf_n) est associée à λf.

(3) Si (f_n) et (g_n) sont associées respectivement à f et g, posons $h_n = \max(f_n, g_n)$. Alors (h_n) est associée à $\max(f, g)$. La preuve est identique en ce qui concerne le minimum.

(4) Notons f la limite de la suite (f_n).

Pour chaque n, soit $(g_{n,m})_m$ une suite associée à f_n. Posons :

$$h_n = \max_{p,q \leqslant n} g_{p,q}$$

h_n est bien continue à support compact. De plus, la suite (h_n) est croissante. Montrons à présent que, pour chaque x dans $\boldsymbol{E}$, $(h_n(x))$ tend vers $f(x)$.

Soit $A < f(x)$. Puisque $(f_n(x))$ tend vers $f(x)$, il existe p tel que $f_p(x) > A$. Puisque $(g_{p,m}(x))_m$ tend vers $f_p(x)$, il existe q tel que $g_{p,q}(x) > A$. Ainsi, pour $N = \max(p, q)$, $h_N(x) > A$. Donc $\lim h_n(x) > A$. Comme cela est vrai pour tout $A < f(x)$, on en déduit que $\lim h_n(x) \geqslant f(x)$.

D'un autre côté, on a manifestement $g_{p,q}(x) \leqslant f_p(x) \leqslant f(x)$ lorsque $p \leqslant n$ et $q \leqslant n$. Donc $h_n(x) \leqslant f(x)$ et, par conséquent, $\lim h_n(x) \leqslant f(x)$.

Finalement, la suite (h_n) est bien une suite d'applications continues à support compact tendant simplement et en croissant vers f. ◊

Soit, à présent, f dans $\mathcal{I}$, et (f_n) une suite associée. Parler de l'intégrale $\mu(f_n)$ a un sens, puisque chaque f_n est continue à support compact. La suite de réels $(\mu(f_n))$ est alors croissante et admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Le lemme suivant nous assure que cette limite ne dépend que de f (et pas de la suite associée (f_n)).

Lemme. Si (f_n) et (g_n) sont deux suites associées à f, alors :

$$\lim \mu(f_n) = \lim \mu(g_n)$$

◊ **Preuve**

• Première étape : f appartient à $\mathcal{C}_c$.

La proposition **21** nous affirme que, dans ce cas, $\mu(f_n) \to \mu(f)$.

• Deuxième étape : cas général

Soit g une application continue à support compact telle que $g \leqslant f$. L'application $\min(f_n, g)$ est continue à support compact.

La suite $(\min(f_n, g))$ est manifestement croissante. Enfin, pour x dans $\boldsymbol{E}$, $\min(f_n(x), g(x)) \to \min(f(x), g(x)) = g(x)$. Ainsi, la suite $(\min(f_n, g))$ est associée à g. D'après la première étape, $\mu(\min(f_n, g)) \to \mu(g)$.

De l'inégalité $\min(f_n, g) \leqslant f_n$, on déduit $\mu(\min(f_n, g)) \leqslant \mu(f_n)$. Passant à la limite dans cette inégalité, on obtient $\mu(g) \leqslant \lim(\mu(f_n))$.

On peut en particulier appliquer l'inégalité précédente à $g = g_m$, où m est un entier quelconque.

On obtient :

$$\mu(g_m) \leqslant \lim(\mu(f_n))$$

En faisant tendre m vers $+\infty$ dans cette inégalité, on obtient :

$$\lim(\mu(g_m)) \leqslant \lim(\mu(f_n))$$

Comme les rôles joués par les deux suites sont symétriques, on en déduit bien l'égalité souhaitée. ◊

Ce lemme nous autorise à poser la définition suivante.

Définition. Soit f dans $\mathcal{I}$. On appelle **intégrale supérieure** de f, et l'on note $\mu^*(f)$, la limite commune, dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, à toutes les suites $(\mu(f_n))$, lorsque (f_n) est une suite quelconque associée à f.

Reprenons les exemples précédents.

1^er^ exemple. Si f est continue à support compact, on a $\mu^*(f) = \mu(f)$.

2^e^ exemple. Si $f = 1$ et si (f_n) est la suite associée que l'on a construite, on constate que $\mu(f_n) \geqslant 2n$, donc que $\lim \mu(f_n) = +\infty$. Ainsi, $\mu^*(f_n) = +\infty$.

3^e^ exemple. Avec les notations utilisées dans cet exemple, on voit que $1 \geqslant \mu(f_n) \geqslant 1 - \dfrac{1}{q_n + 1} - \dfrac{2q_n}{n}$. Ainsi, $\mu^*(f) = 1$.

Aux propriétés de stabilité de $\mathcal{I}$ énoncées dans la proposition **21** correspondent des propriétés opératoires de μ^*, que nous allons énoncer à présent.

Proposition 22

(1) *Si f, g sont dans $\mathcal{I}$, alors $\mu^*(f + g) = \mu^*(f) + \mu^*(g)$.*

(2) *Si f est dans $\mathcal{I}$ et si $\lambda > 0$, alors $\mu^*(\lambda f) = \lambda \mu^*(f)$.*

(3) *Si f, g sont dans $\mathcal{I}$ et si $f \leqslant g$, alors $\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g)$.*

(4) *Si (f_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{I}$, alors* $\lim \mu^*(f_n) = \mu^*(\lim f_n)$.

◊ **Preuve**

(1) et **(2)** se démontrent en suivant la construction effectuée dans la proposition **21**.

(3) Si (f_n) et (g_n) sont associées respectivement à f et g, posons $h_n = \max(f_n, g_n)$. Alors (h_n) est associée à $\max(f, g) = g$. Puisque $f_n \leqslant h_n$, on a aussi $\mu f_n \leqslant \mu h_n$. Par passage à la limite, $\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g)$.

(4) Pour chaque n, soit $(g_{n,m})_m$ une suite associée à f_n. Posons $f = \lim f_n$. Puisque $f_n \leqslant f$, on a, d'après **(3)**, $\mu^*(f_n) \leqslant \mu^*(f)$. Par passage à la limite, on obtient déjà l'inégalité $\lim \mu^*(f_n) \leqslant \mu^*(f)$. Reste à prouver l'inégalité inverse.

Posons pour cela :

$$h_n = \max_{p,q \leqslant n} g_{p,q}$$

Nous avons déjà constaté (proposition 21) que (h_n) est une suite associée à f. En outre, pour chaque $p, q \leqslant n$, on a $g_{p,q} \leqslant f_p \leqslant f_n$. Il en résulte que $h_n \leqslant f_n$. Donc $\mu(h_n) = \mu^*(h_n) \leqslant \mu^*(f_n)$ d'après (3). Passant à la limite, on obtient $\mu^*(f) \leqslant \lim \mu^*(f_n)$, ce qui est le résultat attendu. ◊

Tout ce qui a été fait relativement à la classe $\mathcal{I}$ et à μ^* s'applique de façon symétrique, en remplaçant *croissant* par *décroissant*. Précisément, notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications de $\boldsymbol{E}$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ telles que $-f$ appartienne à $\mathcal{I}$. On posera, pour f dans $\mathcal{S}$, $\mu_*(f) = -\mu^*(-f)$. Cet élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est appelé **intégrale inférieure** de f. On obtient aussitôt la proposition suivante.

Proposition 23

(*1*) *Si f, g sont dans $\mathcal{S}$, alors $f+g$ est dans $\mathcal{S}$. De plus,* $\mu_*(f+g) = \mu_*(f) + \mu_*(g)$.

(*2*) *Si f est dans $\mathcal{S}$ et si $\lambda > 0$, alors λf est dans $\mathcal{S}$. De plus,* $\mu_*(\lambda f) = \lambda\mu_*(f)$.

(*3*) *Si f, g sont dans $\mathcal{S}$, alors* $\min(f, g)$ *est dans $\mathcal{S}$. De plus, si* $f \leqslant g$, alors $\mu_*(f) \leqslant \mu_*(g)$.

(*4*) *Si (f_n) est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{S}$, alors* $\lim f_n$ *est dans $\mathcal{S}$. De plus,* $\lim \mu_*(f_n) = \mu_*(\lim f_n)$.

2.2.2 Intégrale supérieure, intégrale inférieure d'une application à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$

Soit f une application de $\boldsymbol{E}$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, ce que l'on abrégera en soit *f une application*. On note $\mathcal{I}(f)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{I}$ qui sont supérieurs ou égaux à f. Cet ensemble $\mathcal{I}(f)$ est certainement non vide, puisque l'application (constante) $+\infty$ y appartient. On peut poser à bon droit la définition suivante.

Définition. On appelle **intégrale supérieure** d'une application f, et l'on note $\mu^*(f)$, l'élément de $\bar{\mathbb{R}}$ défini par l'égalité :

$$\mu^*(f) = \inf_{g \in \mathcal{I}(f)} \mu^*(g)$$

$\mu^*(f)$ peut être égal à $+\infty$ où à $-\infty$. On remarque que, dans le cas particulier où f appartient à la classe $\mathcal{I}$, on a $f \in \mathcal{I}(f)$. Il en résulte que $\inf_{g \in \mathcal{I}(f)} \mu^*(g) = \mu^*(f)$, où ce dernier symbole est compris au sens du paragraphe 2.2.1. Il n'y a donc pas de conflit entre la nouvelle définition, qui vise une application quelconque, et l'ancienne, qui ne visait que les éléments de la classe $\mathcal{I}$. Néanmoins, en étendant la définition de μ^* aux applications parfaitement arbitraires, on affaiblit les propriétés de μ^*.

Proposition 24

Soit f et g des applications.

(*1*) *Si* $f \leqslant g$, alors $\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g)$.

(*2*) *Si* $\lambda > 0$, *alors* $\mu^*(\lambda f) = \lambda\mu^*(f)$.

(*3*) *Si $f+g$ et $\mu^*(f) + \mu^*(g)$ sont bien définies, alors* $\mu^*(f+g) \leqslant \mu^*(f) + \mu^*(g)$.

◊ **Preuve**

Seul l'énoncé (***3***) mérite que l'on s'y arrête ; rappelons que $f+g$ n'est définie que lorsque, pour chaque valeur de x, $f(x)$ et $g(x)$ ne sont pas des infinis opposés.

Fixons $\rho > \mu^*(f)$ et $\delta > \mu^*(g)$. Par définition, il existe $f_1 \in \mathcal{I}(f)$ et $g_1 \in \mathcal{I}(g)$ telles que $\rho \geqslant \mu^*(f_1)$ et $\delta \geqslant \mu^*(g_1)$. Puisque $f_1 + g_1$ appartient clairement à $\mathcal{I}(f+g)$. On obtient :

$$\mu^*(f_1) + \mu^*(g_1) = \mu^*(f_1 + g_1) \geqslant \mu^*(f+g)$$

Par conséquent, $\rho + \delta \geqslant \mu^*(f+g)$. En passant à l'infimum sur ρ, puis sur δ, on obtient l'inégalité souhaitée.◊

Voici à présent un premier résultat central, dit de **limite monotone**. Nous nous appuyons sur un lemme.

Lemme. Soit (f_n) une suite croissante d'applications. On suppose que, pour tout n, $\mu^*(f_n)$ n'est pas infini.

Soit (ε_n) une suite de réels strictement positifs.

Il existe alors une suite croissante (g_n) d'éléments de $\mathcal{I}$ telle que :

(a) $\forall n \quad f_n \leqslant g_n$; (b) $\forall n \ \mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_n$

◊**Preuve**

Nous raisonnons par récurrence sur n, en supposant l'existence de $g_0 \leqslant g_1 \leqslant \ldots \leqslant g_{n-1}$ vérifiant (a) et (b). Le résultat est clair pour $n = 0$. Par définition, on peut trouver un élément h_n de $\mathcal{I}$ tel que $f_n \leqslant h_n$ et $\mu^*(h_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \varepsilon_n$. Posons $g_n = \max(g_{n-1}, h_n)$ et vérifions que (g_n) répond aux conditions exigées. Il s'agit bien d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{I}$. Puisque $f_n \leqslant h_n \leqslant g_n$, la propriété ($a$) est réalisée. Par ailleurs, on a :

$$g_n = \max(g_{n-1}, h_n) = g_{n-1} + h_n - \min(g_{n-1}, h_n)$$

Ecrite sous la forme $g_n + \min(g_{n-1}, h_n) = g_{n-1} + h_n$, cette égalité fournit, grâce à la proposition **22** :

$$\mu^*(g_n) + \mu^*(\min(g_{n-1}, h_n)) = \mu^*(g_{n-1}) + \mu^*(h_n) \qquad \textbf{(1)}$$

Or $\min(g_{n-1}, h_n) \geqslant \min(g_{n-1}, f_n) \geqslant \min(g_{n-1}, f_{n-1}) = f_{n-1}$.

Donc $\mu^*(\min(g_{n-1}, h_n)) \geqslant \mu^*(f_{n-1})$. Substituée dans l'égalité (1), cette inégalité conduit à :

$$\mu^*(g_{n-1}) + \mu^*(h_n) \geqslant \mu^*(g_n) + \mu^*(f_{n-1})$$

À présent, l'hypothèse de récurrence assure que :

$$\mu^*(g_{n-1}) \leqslant \mu^*(f_{n-1}) + \varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_{n-1}.$$

Il en découle :

$$\mu^*(f_{n-1}) + \varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_{n-1} + \mu^*(h_n) \geqslant \mu^*(g_n) + \mu^*(f_{n-1})$$

puis $\quad \varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_{n-1} + \mu^*(h_n) \geqslant \mu^*(g_n)$

En majorant $\mu^*(h_n)$ par $\mu^*(f_n) + \varepsilon_n$, on obtient le résultat souhaité. ◊

Théorème 6. Si (f_n) est une suite croissante d'applications, et si la suite $\mu^*(f_n)$ n'est pas constante égale à $-\infty$, alors :

$$\lim \mu^*(f_n) = \mu^*(\lim f_n)$$

◊**Preuve**

Posons $f = \lim f_n$ et $\ell = \lim \mu^*(f_n)$. Puisque $f_n \leqslant f$ pour tout n, on a déjà $\ell \leqslant \mu^*(f)$. Il suffit de montrer l'inégalité inverse, qui d'ailleurs est évidente si $\ell = +\infty$. On peut donc supposer que $\ell < +\infty$. D'un autre côté, il existe un indice N tel que $\mu^*(f_N) > -\infty$. On a par conséquent $\ell > -\infty$ et, pour tout $n \geqslant N$, $\mu^*(f_n) > -\infty$. Il n'est pas restrictif de supposer que $N = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

On aura alors $\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{k+1}} = \varepsilon$.

On applique le lemme, qui donne l'existence d'une suite (g_n) d'éléments de $\mathscr{I}$, croissante, telle que $\mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \varepsilon$. Notons $g = \lim g_n$. Grâce à la proposition **22 (*4*)**, on obtient, puisque la suite (g_n) est croissante :

$$\mu^*(g) \leqslant \ell + \varepsilon .$$

Comme $f_n \leqslant g_n$ on aura aussi $f \leqslant g$, puis $\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g)$. Ainsi, on obtient $\mu^*(f) \leqslant \ell + \varepsilon$. Cette inégalité étant réalisée pour tout $\varepsilon > 0$, elle conduit au résultat cherché $\mu^*(f) \leqslant \ell$. ◊

Il est utile de donner une version de ce théorème dans le cadre des séries d'applications. Soit $\sum u_n$ une série d'applications positives. En appliquant le théorème **6** à ses sommes partielles, on obtient immédiatement :

$$\mu^*\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(u_n)$$

Nous définissons à présent l'**intégrale inférieure** d'une application *f*, notée $\mu_*(f)$, par l'égalité $\mu_*(f) = -\mu^*(-f)$. La proposition et le théorème suivants découlent immédiatement des énoncés relatifs à μ^*. On constatera des changements dans les énoncés.

Proposition 25

Soit f et g des applications.

(*1*) *Si $f \leqslant g$, alors $\mu_*(f) \leqslant \mu_*(g)$.*

(*2*) *Si $\lambda > 0$, alors $\mu_*(\lambda f) = \lambda \mu_*(f)$.*

(*3*) *Si $f + g$ et $\mu_*(f) + \mu_*(g)$ sont bien définies, alors $\mu_*(f+g) \geqslant \mu_*(f) + \mu_*(g)$.*

Théorème 7. Si (f_n) est une suite décroissante d'applications, et si la suite $\mu_*(f_n)$ n'est pas constante égale à $+\infty$, alors :

$$\lim \mu_*(f_n) = \mu_*(\lim f_n)$$

En outre, on peut toujours comparer $\mu_*(f)$ et $\mu^*(f)$.

Proposition 26

Pour toute application f, on a :

$$\mu^*(f) \geqslant \mu_*(f)$$

◊Preuve

Soit g dans $\mathscr{I}(f)$ et h dans $\mathscr{I}(-f)$. Des inégalités $g \geqslant f$ et $h \geqslant -f$, on déduit $g + h \geqslant 0$ (il faut tout de même remarquer que $g + h$ est bien définie, comme somme de deux éléments de $\mathscr{I}$). Il résulte de la proposition **24** que $0 \leqslant \mu^*(g+h) \leqslant \mu^*(g) + \mu^*(h)$. Donc $\mu^*(g) + \mu^*(h) \geqslant 0$. En passant tout d'abord à l'infimum sur *g*, on obtient $\mu^*(f) + \mu^*(h) \geqslant 0$. En passant ensuite à l'infimum sur *h*, on obtient $\mu^*(f) + \mu^*(-f) \geqslant 0$, ce qui donne par définition de $\mu_*(f)$ le résultat. ◊

Soit *A* un sous-ensemble de ***E***. On appelle **mesure extérieure** de *A* le nombre $\mu^*(\chi_A)$, où χ_A désigne la **fonction caractéristique** de *A*, c'est-à-dire l'application qui vaut 1 sur *A* et 0 sur son complémentaire. On notera plus simplement $\mu^*(A)$ ce nombre. De même, la **mesure intérieure** de *A*, notée $\mu_*(A)$, est égale à $\mu_*(\chi_A)$. Les mesures extérieure et intérieure d'un ensemble sont toujours **positives** ou **nulles** ; la première est supérieure (au sens large) à la seconde.

1^er^ exemple. Dans $\mathbb{R}$, soit $A =]a, b[$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. On peut trouver une suite (f_n) d'applications de $\mathscr{C}_c$ telle que $f_n \nearrow \chi_A$, avec $(\mu(f_n))$ tendant vers $b - a$ (figure 6). Il en résulte, grâce au théorème **7**, que $\mu^*(A) = b - a$. De même, grâce à la suite (g_n), on a $\mu_*(A) = b - a$. On montre de façon identique qu'un segment $[a,b]$ a des mesures extérieure et intérieure égales à $b - a$. En particulier, un point est de mesure extérieure nulle.

2^e^ exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $A =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$, avec $-\infty < a_1 < b_1 < +\infty$ et $-\infty < a_2 < b_2 < +\infty$. Si l'on note $f_{n,1}$ et $f_{n,2}$ des applications construites comme ci-dessus relativement à $]a_1, b_1[$ et $]a_2, b_2[$, posons $\phi_n(x_1, x_2) = f_{n,1}(x_1)\, f_{n,2}(x_2)$. La suite (ϕ_n) tend simplement et en croissant vers χ_A. De plus, un calcul facile montre que $\mu(\phi_n)$ tend vers $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$. Donc $\mu^*(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$. Le résultat est le même pour $\mu_*(A)$. De façon générale, dans un espace de dimension finie quelconque, la mesure d'un pavé est le produit des longueurs de ses côtés.

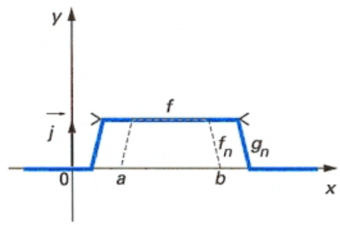

Figure 6 – Suites (f_n) et (g_n) (1^er^ exemple)

Les propriétés de la mesure extérieure résultent de celles de l'intégrale supérieure. Par exemple, si $A \subset B$, alors $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$. Le résultat sur les séries de fonctions positives entraîne de son côté que la mesure extérieure d'une réunion finie ou dénombrable d'ensembles est inférieure ou égale à la somme des mesures extérieures des ensembles.

2.3 Fonctions négligeables

Avant de définir complètement la notion d'intégrale, il est nécessaire de définir ce que sont les applications... **d'intégrale nulle**. Cette exigence peut paraître contradictoire. En réalité, pour une application positive, il est naturel de dire qu'elle est **d'intégrale nulle** lorsque son **intégrale supérieure l'est**. On peut en donner une définition plus générale.

Définition. On dit qu'une application *f* est **négligeable** lorsque $\mu^*(|f|) = 0$. On dit qu'un ensemble est **négligeable** lorsque sa mesure extérieure est nulle.

Voici quelques propriétés simples liées à cette notion.

Proposition 27

(*1*) *Soit f et g des applications. Si f est négligeable et si $|g| \leqslant |f|$, alors g est négligeable. De même, un sous-ensemble d'un ensemble négligeable est négligeable.*

(*2*) *Soit f une application négligeable. Alors, si $\lambda \neq 0$, λf est négligeable.*

(*3*) *Soit (f_n) une suite d'applications négligeables. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est négligeable.*

(*4*) *Soit (A_n) une suite d'ensembles négligeables. Alors la réunion des A_n est négligeable.*

(5) *Soit f une application ; f est négligeable si, et seulement si, l'ensemble des points où f n'est pas nulle est négligeable.*

◊ **Preuve**

Nous montrons **(5)**. Notons A_n l'ensemble des points x tels que $|f(x)| \geqslant \frac{1}{n+1}$, g_n sa fonction caractéristique, et A l'ensemble des x en lesquels f ne s'annule pas. On sait que $|f(x)| \neq 0$ si, et seulement si, il existe n tel que $|f(x)| \geqslant \frac{1}{n+1}$. Donc :

$$A = \bigcup_n A_n$$

Supposons d'abord f négligeable, c'est-à-dire $\mu^*(|f|) = 0$. Pour chaque n, $|f| \geqslant \frac{1}{n+1} g_n$, comme on le voit en séparant le cas où x est dans A_n de celui où il n'y est pas. Il en résulte que $\mu^*(|f|) \geqslant \frac{1}{n+1} \mu^*(g_n)$, puis que $\mu^*(g_n) = 0$. Donc A_n est négligeable, et la réunion des A_n aussi d'après **(4)**.

Supposons réciproquement que A est négligeable ; soit g la fonction caractéristique de A. On sait donc que $\mu^*(g) = 0$. Si x n'appartient pas à A, $g(x) = 0$, donc $ng(x) = 0$, donc la suite $(ng(x))$ tend (en croissant) vers 0. Si x appartient à A, $ng(x) = n$, donc $(ng(x))$ tend en croissant vers $+\infty$. Il en résulte que $\lim ng \geqslant |f|$. D'après le théorème **6**, $\mu^*(\lim ng) = \lim \mu^*(ng) = 0$. Comme $\mu^*(\lim ng) \geqslant \mu^*(|f|)$, le résultat est prouvé. ◊

1^er^ exemple. Un point étant de mesure nulle, on voit (proposition **27** (**4**)) qu'un ensemble fini ou dénombrable est négligeable. Par exemple, l'ensemble des nombres rationnels est négligeable.

2^e^ exemple (figure **7**). Si $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^n$, avec $n \geqslant 2$, soit A l'image d'un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$. Supposons d'abord l'arc paramétré par :

$$\phi : [a,b] \to \boldsymbol{E}$$
$$t \mapsto \phi(t)$$

Notons $M = \|f'\|_\infty$. Considérons une subdivision régulière $(a_i)_{i \in [0,m]}$ de $[a, b]$. Soit $t \in [a, b]$. Il existe un i tel que $t \in [a_i, a_{i+1}]$. Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\|f(t) - f(a_i)\| \leqslant M|t - a_i| \leqslant M\frac{b-a}{m} = \rho$$

La norme n'a pas été spécifiée. Prenons la norme *canonique* sur $\boldsymbol{E}$, celle pour laquelle la boule unité est $[-1,1]^n$. Si $t \in [a_i, a_{i+1}]$, on a vu que $f(t)$ appartient au pavé P_i de centre $f(a_i)$ et de côté 2ρ.

Par conséquent, $A = f([a,b]) \subset \bigcup_{i=0}^{m-1} P_i$. Il en résulte :

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} \mu^*(P_i) \leqslant m(2\rho)^n = \frac{(2M(b-a))^n}{m^{n-1}}$$

Comme $n \geqslant 2$, on voit, en faisant tendre m vers $+\infty$, que $\mu^*(A) = 0$.

Dans le cas général où $[a, b]$ est remplacé par un intervalle quelconque, on part de la constatation facile que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est une réunion dénombrable de segments, pour parvenir à la conclusion que tout arc de classe $\mathscr{C}^1$ est négligeable.

On montrerait de façon similaire que tout morceau de surface de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geqslant 3$, est négligeable.

Désormais, étant donné une propriété $\mathscr{P}$ quelconque de domaine D (ce qui signifie que, pour x dans D, on sait ce que veulent dire les expressions $\mathscr{P}(x)$ est vraie et $\mathscr{P}(x)$ est fausse), on dira que **la propriété $\mathscr{P}$ est vraie presque partout** lorsque l'ensemble des points x tels que $\mathscr{P}(x)$ est fausse est négligeable. On dira, de façon synonyme, que $\mathscr{P}(x)$ **est vraie pour presque tout** x. Ainsi, la propriété ***x* est irrationnel** est vraie presque partout, car l'ensemble des x qui ne sont pas irrationnels, autrement dit les rationnels, est négligeable.

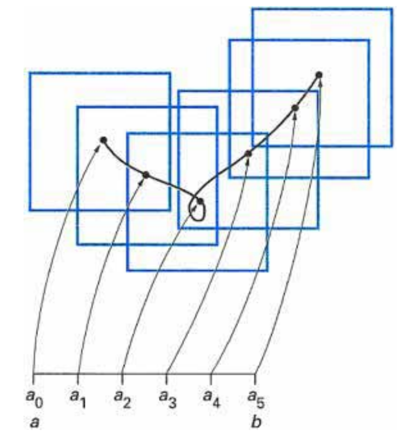

Figure 7 – Inclusion d'un arc $\mathscr{C}^1$ dans une réunion de carrés (2^e^ exemple)

Très souvent, on sera confronté à la situation suivante : soit f une fonction de $\boldsymbol{E}$ dans $\mathbb{R}$. **Fonction**, par opposition à **application**, signifie que f n'est définie que sur un sous-ensemble de $\boldsymbol{E}$, appelé **domaine de définition de *f***. On dira que f est définie presque partout lorsque le complémentaire dans $\boldsymbol{E}$ de son domaine de définition est de mesure nulle.

Par exemple, la fonction $1/\sin x$ est définie sauf sur un ensemble dénombrable, donc est définie presque partout.

Toute la théorie de l'intégration repose sur le fait que les ensembles négligeables peuvent être... négligés, tout au moins lorsqu'il s'agit de l'étude d'intégrales.

Proposition 28

Si f et g sont deux applications qui sont égales presque partout, elles ont même intégrale supérieure.

◊ **Preuve**

Soit N l'ensemble des x tels que $f(x) \neq g(x)$. Posons $h = \max(f,g)$. On a alors $h \geqslant g$ et $h = g = f$ en dehors de N.

Soit k égale à $+\infty$ sur N et égale à 0 ailleurs. D'après la proposition **27**, k est négligeable. Si $v \in \mathscr{I}(f)$, $v + k$ est bien définie sur $\boldsymbol{E}$. De plus, $h \leqslant v + k$. Par conséquent :

$$\mu^*(h) \leqslant \mu^*(v + k) \leqslant \mu^*(v) + \mu^*(k) = \mu^*(v)$$

Il en résulte que $\mu^*(h) \leqslant \mu^*(f)$. Comme $h \geqslant f$, on a aussi l'inégalité inverse, donc l'égalité. La symétrie des rôles joués par f et g montre l'égalité cherchée. ◊

2.4 Fonctions intégrables

2.4.1 Intégrabilité

À partir de maintenant, on utilise le terme *fonction* pour désigner une fonction définie presque partout sur $\boldsymbol{E}$. On pourra la prolonger de façon arbitraire sur le complémentaire de son domaine de définition, par exemple par 0. On pourrait aussi bien la prolonger en lui attribuant la valeur $+\infty$. Cela ne changera pas, en tout état de cause, son intégrale.

Définition. Soit f une fonction. On dit qu'elle est **intégrable** (sous-entendu sur $\boldsymbol{E}$) lorsque les deux nombres $\mu^*(f)$ et $\mu_*(f)$ sont finis et égaux. On appelle **intégrale** de f cette valeur commune, que l'on note $\mu(f)$.

On remarque que, comme prévu, deux applications f et g ne différant que sur un ensemble de mesure nulle sont simultanément intégrables ou non intégrables et que, en cas d'intégrabilité, leurs intégrales sont égales.

Lemme. Soit f une application telle que $\mu^*(f) < +\infty$. Alors $f(x) < +\infty$ pour presque tout x.

◊ **Preuve**

Il existe $g \in \mathscr{I}(f)$ telle que $\mu^*(g) < +\infty$. Puisque g majore f, il suffit de montrer le résultat pour g. Comme élément de $\mathscr{I}$, g est minoré par un élément h de $\mathscr{C}_c$. Soit $k = g - h$; k est alors positive et, en outre, $\mu^*(k) < +\infty$. Notons A l'ensemble des x tels que $k(x) = +\infty$, et χ_A la fonction caractéristique de A. Pour tout n, on a $k \geqslant n\chi_A$ et, par conséquent, $\mu^*(k) \geqslant n\mu^*(\chi_A)$.

Il en résulte que $\mu^*(\chi_A) \leqslant \frac{1}{n}\mu^*(k)$ pour tout n. Faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\mu^*(\chi_A) = 0$, ce qui assure que A est négligeable. Mais A est aussi l'ensemble des x tels que $g(x) = +\infty$ puisque h est partout finie. La preuve est ainsi complète. ◊

Proposition 29

Si f est intégrable, f est finie presque partout.

◊ **Preuve**

Si f est intégrable, $\mu^*(f) < +\infty$, donc $f(x) < +\infty$ pour presque tout x d'après le lemme précédent. On a aussi $\mu_*(f) > -\infty$, donc $\mu^*(-f) < +\infty$. Il en résulte que $-f(x) < +\infty$ pour presque tout x. Comme la réunion de deux ensembles négligeables est négligeable, le résultat est maintenant clair. ◊

La proposition **29** assure qu'une application intégrable est finie presque partout (ce qui ne veut pas dire bornée) ; il en résulte qu'il n'est pas restrictif, quitte à la modifier sur l'ensemble de mesure nulle où elle est infinie, de la supposer **finie partout**, hypothèse que l'on fera souvent tacitement.

Notation. Lorsque $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}$, on emploie volontiers l'une des notations :

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Lorsque $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^n$, on utilise l'une des notations suivantes :

$$\mu(f) = \int_{\boldsymbol{E}} f = \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \ldots, t_n)\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, \ldots, t_n)\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n$$

Exemple. Si f est dans $\mathscr{C}_c$, à support inclus dans le pavé P, nous avons vu que $\mu^*(f)$ est égale à son intégrale $\int_P f$, telle qu'elle a été définie dans le paragraphe 1. Puisque $-f$ est aussi dans $\mathscr{C}_c$, $\mu_*(f)$ est, elle aussi, égale à $\int_P f$. Il en résulte qu'une application continue à support compact est intégrable et que son intégrale (de Lebesgue) est égale à son intégrale élémentaire.

Proposition 30

Soit f une fonction. Les deux propriétés ci-dessous sont équivalentes :

(1) *f est intégrable ;*

(2) *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une application u, continue à support compact, telle que* $\mu^*(|f - u|) \leqslant \varepsilon$.

◊ **Preuve**

• **(1)** ⇒ **(2)**. Il existe g dans $\mathscr{I}$ telle que $f \leqslant g$ et $\mu^*(g) \leqslant \mu^*(f) + \varepsilon$; on a utilisé ici la finitude de $\mu^*(f)$. De façon analogue, il existe h dans $\mathscr{S}$ telle que $h \leqslant f$ et $\mu_*(f) \leqslant \mu_*(h) + \varepsilon$.

Par ailleurs, il existe u dans $\mathscr{C}_c$ telle que $u \leqslant g$ et $\mu^*(g) \leqslant \mu(u) + \varepsilon$. Ainsi :

$$|f - u| \leqslant |f - g| + |g - u| \leqslant g - h + g - u$$

Appliquons la proposition **24** à cette inégalité. On obtient :

$$\mu^*(|f - u|) \leqslant \mu^*(g - h) + \mu^*(g - u)$$

Mais $\mu^*(g - h) \leqslant \mu^*(g) + \mu^*(-h) = \mu^*(g) - \mu_*(h) \leqslant 2\varepsilon$ et, de même, $\mu^*(g - u) \leqslant \mu^*(g) + \mu^*(-u) = \mu^*(g) - \mu(u) \leqslant \varepsilon$. On a donc $\mu^*(|f - u|) \leqslant 3\varepsilon$, ce qui suffit pour conclure.

• **(2)** ⇒ **(1)** se prouve de façon analogue.◊

La proposition **30** peut s'exprimer en disant que la condition nécessaire et suffisante pour que f soit intégrable est qu'il existe une suite (f_n) d'applications continues à support compact telle que $(\mu^*(|f - f_n|))$ tende vers 0.

2.4.2 Propriétés de l'intégrale

Nous notons $L^1(\boldsymbol{E})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $\boldsymbol{E}$. Conformément à ce qui a été dit dans le paragraphe 2.3, on pourra librement remplacer une application par une application qui lui est égale presque partout.

Proposition 31

(1) ***Linéarité***. *$L^1(\boldsymbol{E})$ est un espace vectoriel ; l'application $f \mapsto \mu(f)$ est linéaire sur $L^1(\boldsymbol{E})$.*

(2) ***Inégalité triangulaire***. *f est dans $L^1(\boldsymbol{E})$ si, et seulement si $||f||$* est *dans $L^1(\boldsymbol{E})$*. De plus, on a alors :

$$|\mu(f)| \leqslant \mu(|f|)$$

(3) ***Positivité***. *Si f est dans $L^1(\boldsymbol{E})$et si f est à valeurs positives,* $\mu(f) \geqslant 0$.

(4) ***Croissance***. *Si f et g sont dans $L^1(\boldsymbol{E})$ et si $f \leqslant g$, alors* $\mu(f) \leqslant \mu(g)$.

Les preuves ne sont pas proposées, mais reposent toutes sur les propriétés conjointes de μ^* et μ_*, prouvées dans le paragraphe 2.2.2.

2.4.3 Critères d'intégrabilité

Ce paragraphe contient un certain nombre de résultats qui n'auront pour nous qu'un rôle transitoire.

Lemme. Soit (f_n) une suite de fonctions **intégrables**.

(1) On suppose $f_n \nearrow f$. Alors :

(a) f est intégrable si, et seulement si, $\lim \mu(f_n) < +\infty$.

(b) Si la condition précédente est réalisée, on a $\mu(f_n) = \lim \mu(f_n)$.

(2) si (f_n) converge presque partout vers f, s'il existe une fonction positive g telle que $\mu^*(g) < +\infty$ et telle que, pour tout n, $|f_n| \leqslant g$ presque partout, alors :

$$\mu(f_n) \to \mu(f)$$

Dans la suite nous utiliserons l'axiome de Solovay, dont l'emploi permet de simplifier certains énoncés.

Axiome. Soit f une fonction. Il existe une suite (f_n) de fonctions intégrables convergeant presque partout vers f et telle que, de plus, pour tout n, $|f_n| \leqslant |f|$

Proposition 32

Soit f une fonction. Les propriétés ci-dessous sont équivalentes :

(1) $\mu^*(|f|) < +\infty$.

(2) *f est intégrable.*

(3) *$|f|$ est majorée presque partout par une fonction intégrable.*

◊**Preuve**

- **(1)** ⇒ **(2)** Cela résulte du lemme **(2)** (appliqué avec $f = g$).
- **(2)** ⇒ **(3)** Il suffit de majorer $|f|$ par elle-même.
- **(3)** ⇒ **(1)** Cela provient de la croissance de μ^*. ◊

2.4.4 Cas des fonctions positives

En appliquant la proposition **32** à une fonction positive, on obtient immédiatement le cas particulier suivant.

Proposition 33

Soit f une fonction positive. Les propriétés ci-dessous sont équivalentes :

(1) $\mu^*(f) < +\infty$.

(2) *f est intégrable.*

Il en résulte que, si f est positive, ou bien $\mu^*(f) = +\infty$, ou bien $\mu^*(f)$ est un réel (positif) ; dans ce dernier cas, f est intégrable et $\mu^*(f) = \int_E f$. Pour cette raison, et **uniquement dans le cas d'une fonction positive**, on s'autorise la notation $\int_E f = +\infty$ lorsque $\mu^*(f) = +\infty$. Avec cette convention, $\int_E f$ est toujours définie et toujours égale à $\mu^*(f)$. Le critère d'intégrabilité d'une fonction **positive** devient :

$$\int_E f < +\infty$$

Plus généralement, un critère d'intégrabilité d'une fonction **quelconque** s'écrit :

$$\int_E |f| < +\infty$$

2.5 Théorèmes fonctionnels

Ce paragraphe présente les outils qui font le principal intérêt de l'intégrale de Lebesgue.

2.5.1 Théorèmes d'interversion

Théorème 8 (de convergence monotone). Soit (f_n) une suite croissante d'applications positives. Alors :

$$\lim \int_E f_n = \int_E \lim f_n$$

Dans le même ordre d'idées, nous avons le résultat suivant relatif aux séries de fonctions.

Proposition 34

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions positives. On a :

$$\int_E \sum f_n = \sum \int_E f_n$$

En particulier, si $\sum \int_E f_n < +\infty$, la fonction $\sum f_n$ est intégrable, d'intégrale la somme de la série précédente.

Exemple 13 : calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ à l'aide d'une série.

Il s'agit d'une intégrale de Lebesgue convergente.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} te^{-t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}\right) dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(n+1)t} dt$$

On peut intervertir les signes $\int$ et $\sum$ car il s'agit de fonctions positives et l'on obtient :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

D'où $$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^2}{6}$$

Le théorème de convergence monotone présente une restriction importante : le fait que la suite (f_n) soit croissante. Le théorème suivant fournit un critère plus commode.

Théorème 9 (de convergence dominée). Soit (f_n) une suite de fonctions. On suppose qu'il existe une fonction g, intégrable, telle que, pour tout n, $|f_n| \leqslant |g|$. Alors :

$$\lim \int_E f_n = \int_E \lim f_n$$

Remarquons que la fonction $\lim f_n$ est évidemment intégrable, puisque sa valeur absolue est majorée par g.

2.5.2 Théorèmes fonctionnels

On peut aisément déduire des résultats énoncés dans le paragraphe 2.5 les théorèmes suivants, relatifs aux intégrales dépendant d'un paramètre. Nous utilisons des notations identiques à celles du paragraphe 1.5.1.

Soit f une fonction de deux variables :

$$f : \boldsymbol{E} \times X \to \mathbb{R}$$
$$(t, x) \mapsto f(t, x)$$

X est un espace métrique quelconque, muni de la distance d.

On ne suppose pas nécessairement que f est définie partout sur $\boldsymbol{E} \times X$. On appelle domaine de définition de $x \mapsto f(t, x)$ l'ensemble des x tels que $t \mapsto f(t, x)$ soit définie presque partout sur $\boldsymbol{E}$.

Soit g une fonction **intégrable** sur $\boldsymbol{E}$.

Pour chaque x dans le domaine de définition de f, on suppose la **condition de domination** : $|f(t, x)| \leqslant g(t)$. On peut alors parler de l'intégrale $\int_E f(t, x)\mathrm{d}t$, qui dépend de x et définit ainsi une fonction ϕ de X dans $\mathbb{R}$, par l'égalité :

$$\phi(x) = \int_E f(t, x)\mathrm{d}t$$

Théorème 10 (passage à la limite sous le signe $\int$). On suppose que f vérifie la condition de domination ci-dessus.

(1) On se donne un point x_0 de X. On suppose que x_0 est dans l'adhérence du domaine de définition de la fonction $x \mapsto f(t, x)$.

Si, pour presque tout t dans $\boldsymbol{E}$, $f(t,x)$ admet la limite $\ell(t)$ lorsque $x \to x_0$, alors ℓ est intégrable, et :

$$\lim_{x \to x_0} \phi(x) = \int_E \ell(t)\mathrm{d}t$$

(2) On suppose que x_0 est dans le domaine de définition de la fonction $x \mapsto f(t, x)$ et que, pour presque tout t dans $\boldsymbol{E}$, $x \mapsto f(t, x)$ est continue en x_0. Alors ϕ est aussi continue en x_0.

On a, de même, la proposition suivante.

Proposition 35

Dérivation sous le signe $\int$. *On suppose ici que X est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que x_0 est dans le domaine de définition de $x \mapsto f(t, x)$. On suppose que f admet, pour presque tout t dans $\boldsymbol{E}$, une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ définie sur un voisinage de x_0 et que cette dérivée partielle vérifie la condition de domination. ϕ est alors dérivable en x_0. De plus :*

$$\phi'(x_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)\mathrm{d}t$$

Plus généralement, pour pouvoir dériver k fois sous le signe $\int$, il suffira de savoir que les dérivées partielles d'ordre 1 à k satisfont à une condition de domination.

Exemple 14 : existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^2}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

Existence : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ est continue :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$
$$= \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$

$\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ donne $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

Lien entre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1 - \cos t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$$

Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$.

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}_+$; par le théorème de dérivation de Lebesgue, on obtient :

$$g''(x) = \int_0^{+\infty} \sin^2 t\,\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t \text{ pour } x \in \mathbb{R}_+^*$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (1 - \cos 2t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \cos 2t\,\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{+\infty} \cos 2t\,\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin 2t}{2}\mathrm{e}^{-xt}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x\sin 2t}{2}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$$
$$= \left[-\frac{x\cos 2t}{4}\mathrm{e}^{-xt}\right]_0^{+\infty} - \frac{x^2}{4}\int_0^{+\infty} \cos 2t\,\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$$

Donc $\left(1 + \dfrac{x^2}{4}\right)\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos 2t\,\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \dfrac{x}{4}$.

Ainsi $g''(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{x}{2(4 + x^2)}$

Puis $g'(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + C_1$

Faisant tendre x vers $+\infty$, et en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on voit que, d'un côté, $g'(x) \to 0$.

Comme $\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$, on obtient facilement $C_1 = 0$. Primitivons à nouveau :

$$g(x) = \frac{1}{2}(x\ln x - x) - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^2+4}$$

La dernière primitive se calcule comme suit :

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^2+4} = x - 4\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} = x - 2\arctan\frac{x}{2}.$$

Finalement :

$$g(x) = \frac{1}{2}x\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \arctan\frac{x}{2} + C_2.$$

C_2 s'obtient à nouveau en faisant tendre x vers $+\infty$.

Il vient : $C_2 = \frac{\pi}{2}$. D'où :

$$\forall x > 0 \quad g(x) = \frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) - \arctan\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

La valeur cherchée s'obtient en faisant tendre x vers 0 ; on obtient :

$$g(0) = \frac{\pi}{2}$$

Finalement :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Exemple 15 :

Calcul de $\int_0^{+\infty}\cos x\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x$.

On pose :

$$f(t) = \int_0^{+\infty}\cos x\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+$$

$$= \int_0^{+\infty}F(x,t)\,\mathrm{d}x$$

$$f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}F(x,t)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi}\cos x\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x$$

Comme somme d'une série vérifiant le critère spécial des séries alternées, on établit la continuité de f sur $\mathbb{R}_+$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, par théorème de dérivation de Lebesgue, on obtient :

$$f'(t) = -\int_0^{+\infty}\cos x(1-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^{+\infty}\cos x\,\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty}\cos x\,\mathrm{e}^{-x(t+1)}\mathrm{d}x$$

Par double intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\cos x\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x = \frac{t}{1+t^2}$$

D'où $f'(t) = -\frac{t}{1+t^2} + \frac{t+1}{1+(t+1)^2}$

$$f(t) = \frac{1}{2}\ln(1+(t+1)^2) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + K$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+(t+1)^2}{1+t^2} + K.$$

or $\lim\limits_{+\infty} f = 0$; donc $K = 0$.

Finalement :

$$f(t) = \int_0^{+\infty}\cos x\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\frac{t^2+2t+2}{t^2+1}$$

On a $$\int_0^{+\infty}\cos x\,\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2$$

Exemple 16 : calcul de $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$

On introduit $I(t) = \int_0^{+\infty}\frac{\arctan tx}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}F(t,x)\,\mathrm{d}x$

D'après le théorème de dérivation de Lebesgue :

$$I'(t) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}x \text{ sur } \mathbb{R}_+ = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+t^2x^2)}\,\mathrm{d}x$$

Pour $t^2 \neq 1$, on obtient :

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+t^2x^2)} = \frac{1}{(1-t^2)}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{t^2}{1+t^2x^2}\right)$$

donc :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+t^2x^2)} = \frac{1}{1-t^2}[\arctan x - t\arctan(tx)]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2(1+t)}$$

et, par continuité, le résultat est vrai pour $t = 1$.

$I(t) = \frac{\pi}{2}\ln(1+t) + C$ sur $\mathbb{R}_+$.

Or $I(0) = 0$ donne $C = 0$.

On obtient $I(t) = \int_0^{+\infty}\frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln(1+t)$

En particulier, $I(1) = \frac{\pi}{2}\ln 2$

On intègre par parties :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{(\arctan x)^2}{x}\right]_0^{+\infty}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$$

On obtient $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \pi\ln 2$

2.5.3 Intégrale sur un sous-ensemble

Soit A un sous-ensemble de $\boldsymbol{E}$. L'application χ_A est la fonction caractéristique de A, qui vaut 1 sur A et 0 en dehors. Comme elle est positive, on peut toujours parler de son intégrale (finie ou infinie).

Définition. On appelle **mesure** d'un sous-ensemble A de $\boldsymbol{E}$ l'intégrale de la fonction caractéristique de A. On note $\mu(A)$ cette mesure. Si $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}$, on parle parfois de la longueur de A, de son aire lorsque $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^2$, de son volume lorsque $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^3$.

Proposition 36

(*1*) Si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

(*2*) *Si (A_n) est une suite d'ensembles ayant des intersections deux à deux de mesure nulle, alors :*

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$$

Soit A un sous-ensemble de $\boldsymbol{E}$. Lorsque f est une fonction définie sur A et non pas sur $\boldsymbol{E}$, on prolonge canoniquement f par 0 en dehors de A. Si l'application ainsi prolongée est intégrable sur A, on notera $\int_A f$ son intégrale. Si f est positive, on utilisera aussi cette notation lorsque f n'est pas intégrable (§ 2.4.4), ce qui a un sens, car l'application prolongée reste positive.

Réciproquement, soit f définie sur $\boldsymbol{E}$ et A un sous-ensemble de $\boldsymbol{E}$. Si $f\chi_A$ est intégrable, la valeur de $\int_{\boldsymbol{E}} f\chi_A$ est égale à $\int_A f$, car $f\chi_A$ est égale à f sur A et à 0 en dehors. On dira alors que f est **intégrable sur** A.

Si $f = 1$, on peut appliquer ce qui précède. La valeur $\int_A 1 = \int_{\boldsymbol{E}} \chi_A$ n'est rien d'autre que la mesure de A.

En particulier, si f est intégrable sur A, f est intégrable sur tout sous-ensemble B de A, car $|f\chi_B| \leqslant |f\chi_A|$.

Avec ces notations, on peut paraphraser les théorèmes d'interversion et les théorèmes fonctionnels, en remplaçant systématiquement $\boldsymbol{E}$ par un sous-ensemble A de $\boldsymbol{E}$. On obtient aussi les résultats suivants.

Proposition 37

(*1*) ***Relation de Chasles.***

Si (A_n) est une suite d'ensembles ayant des intersections deux à deux de mesure nulle et si f est intégrable sur $A = \bigcup_n A_n$, alors :

$$\int_A f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f$$

(*2*) ***Majoration uniforme.***

Soit f une fonction. Alors :

$$\int_A |f| \leqslant \mu(A) \|f\|_\infty$$

Remarque. Dans l'alinéa **(2)**, par exception, $\|f\|_\infty$ peut être infini.

2.6 Lien avec l'intégrale élémentaire sur $\mathbb{R}$

Dans ce paragraphe, nous faisons le lien entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale telle qu'elle a été présentée dans le paragraphe 1.

On sait déjà qu'une application f continue à support compact est intégrable au sens de Lebesgue et que son intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ coïncide avec l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ introduite précédemment.

Si f est la fonction caractéristique de $[a, b]$, considérons l'application f_n égale à f sur $[a, b]$, égale à 0 en dehors de $\left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right]$, affine sur chacun des deux segments restants, de façon telle que f_n soit continue. Manifestement, f_n est continue à support compact, et $|f_n|$ est majorée par $|f_1|$. De plus, la suite (f_n) converge simplement vers l'application $\tilde{f}$, qui prolonge f par 0 en dehors de $[a, b]$. Le théorème de **convergence dominée** de Lebesgue implique alors que $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n\right)$ tend vers $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f} = \int_{[a,b]} f$. D'un autre côté, un calcul direct montre que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n\right)$ tend vers $\int_a^b f$. Il en résulte que $\int_b^a f = \int_{[a,b]} f$. L'intégrale de Lebesgue de f sur $[a, b]$ coïncide avec l'intégrale élémentaire de f sur $[a, b]$.

Par linéarité, le résultat précédent s'étend aux applications en escalier sur $[a, b]$. On pourra donc confondre, pour ces applications, l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a,b]} f$ et l'intégrale élémentaire $\int_a^b f$.

Si, maintenant, f est réglée, elle est limite uniforme d'une suite (f_n) d'applications en escalier, dont l'intégrale (élémentaire) tend vers l'intégrale (élémentaire) de f par convergence uniforme et dont l'intégrale de Lebesgue tend vers l'intégrale de Lebesgue de f. On peut donc **identifier l'intégrale élémentaire et l'intégrale de Lebesgue d'une application réglée sur [*a*, *b*]**.

Étudions à présent le cas des intégrales impropres. Soit f localement réglée sur $[o, \alpha[$.

Si f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[o, \alpha[$, considérons une suite (α_n) tendant vers α. La restriction f_n de f à $[o, \alpha_n]$ est réglée. On a donc :

$$\int_o^{\alpha_n} f = \int_{[o,\alpha_n]} f = \int_{[o,\alpha[} f_n$$

Puisque (f_n) tend vers f que $|f_n| \leqslant |f|$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que $\left(\int_o^{\alpha_n} f\right)$ tend vers $\int_{[o,\alpha[} f$.

Cela étant vrai pour toute suite (α_n) tendant vers α, il en résulte que l'intégrale impropre $\int_o^{\alpha} f$ converge et est égale $\int_{[o,\alpha[} f$. Mais elle converge même absolument, puisque le même raisonnement peut être appliqué directement à $|f|$.

Réciproquement, si $\int_o^{\alpha} f$ converge absolument, on voit, avec les notations précédentes, que $(|f_n|)$ est une suite d'applications intégrables au sens de Lebesgue tendant en croissant vers f, telle que de plus $\int_o^\alpha |f_n|$ est majorée (par $\int_o^\alpha |f|$). Il en résulte bien que f est intégrable au sens de Lebesgue.

On étend immédiatement ces résultats aux intégrales impropres sur des intervalles quelconques, pour obtenir la proposition suivante.

Proposition 38

Soit f une application localement réglée sur un intervalle I, à valeurs réelles. Pour que f soit intégrable sur I, il faut et il suffit que son intégrale impropre sur I soit absolument convergente.

On pourra donc appliquer les théorèmes fonctionnels de Lebesgue, bien entendu aux applications réglées sur un segment, mais aussi aux fonctions dont l'intégrale impropre est absolument convergente, en **identifiant l'intégrale de Lebesgue à l'intégrale impropre**. En revanche, une intégrale impropre non absolument convergente n'est pas une intégrale de Lebesgue – et, dans un certain sens, n'est pas véritablement une intégrale –.

2.7 Intégrales multiples

La présentation de l'intégrale de Lebesgue revêt une importance particulière pour les applications de plusieurs variables, pour lesquelles aucune autre théorie n'est vraiment à la fois satisfaisante et élémentaire.

2.7.1 Théorèmes de Lebesgue et Fubini

Le théorème de Fubini permet de ramener l'intégration d'une application définie sur $\mathbb{R}^n$ à plusieurs intégrales portant sur des applications d'une variable, que le plus souvent on calcule grâce à la formule fondamentale du calcul intégral.

Théorème 11. Soit f une fonction intégrable de $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2 = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

La fonction $t_1 \mapsto f(t_1, t_2)$ est intégrable sur $\boldsymbol{E}_1$ pour presque toute valeur t_2 ; la fonction $t_2 \mapsto f(t_1, t_2)$ est intégrable sur $\boldsymbol{E}_2$ pour presque toute valeur t_1. De plus, on dispose des égalités :

$$\int_{\boldsymbol{E}} f(t_1, t_2)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 = \int_{\boldsymbol{E}_1}\left(\int_{\boldsymbol{E}_2} f(t_1, t_2)\mathrm{d}t_2\right)\mathrm{d}t_1$$

$$= \int_{\boldsymbol{E}_2}\left(\int_{\boldsymbol{E}_1} f(t_1, t_2)\mathrm{d}t_1\right)\mathrm{d}t_2$$

Ce théorème résulte facilement du fait que, par définition, l'égalité ci-dessus est déjà vraie pour les applications continues à support compact. Nous n'en donnerons pas la preuve détaillée.

On remarque que la conclusion du théorème contient implicitement le fait que les deux dernières intégrales sont définies, ce qui entraîne que, par exemple, l'application $t_1 \mapsto \int_{\boldsymbol{E}_2} f(t_1, t_2)\mathrm{d}t_2$ est intégrable sur $\boldsymbol{E}_1$.

Pratiquement, pour prouver qu'une fonction est intégrable sur $\boldsymbol{E}$, on utilise souvent la condition suivante.

Proposition 39

Soit f une fonction de $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2 = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ *dans* $[0,+\infty]$. *On dispose des égalités :*

$$\int_{\boldsymbol{E}} f(t_1, t_2)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 = \int_{\boldsymbol{E}_1}\left(\int_{\boldsymbol{E}_2} f(t_1, t_2)\,\mathrm{d}t_2\right)\mathrm{d}t_1$$

$$= \int_{\boldsymbol{E}_2}\left(\int_{\boldsymbol{E}_1} f(t_1, t_2)\,\mathrm{d}t_1\right)\mathrm{d}t_2$$

Ce théorème montre que l'on peut toujours effectuer une intégration multiple à l'aide de plusieurs intégrations successives, lorsque la fonction à intégrer est positive. Il donne simultanément, appliqué à $|f|$, un critère d'intégrabilité : en effet, la condition pour que f soit intégrable est la finitude de l'un quelconque des termes figurant dans l'égalité.

Exemple 17 : calcul d'intégrale double

$\iint_\Delta xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où Δ est la partie du plan limitée par les paraboles d'équations $y = x^2$ et $x = y^2$ (figure 8).

$\Delta = \{0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$

$$\iint_\Delta xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(x\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

2.7.2 Théorème de changement de variables

Le théorème de changement de variables permet d'effectuer un changement de variables dans le cadre d'une intégrale multiple. Sa démonstration, assez technique, ne sera pas donnée. On rappelle qu'un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ sur l'ouvert V de $\mathbb{R}^n$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$, bijective, d'inverse aussi de classe $\mathscr{C}^1$. Nous utilisons les notations suivantes :

ϕ est noté comme suit :

$$\phi : U \to V$$
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \phi(x_1, \dots, x_n).$$

Puisque $\phi(x_1,\dots,x_n)$ est dans $\mathbb{R}^n$, on notera $t_1,\dots,t_n$ les applications composantes de ϕ. Ainsi, t_i va de U dans $\mathbb{R}$. Le jacobien de ϕ au point $(x_1,\dots,x_n)$ qui, par définition, est le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial t_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial t_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial t_2}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial t_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial t_n}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial t_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

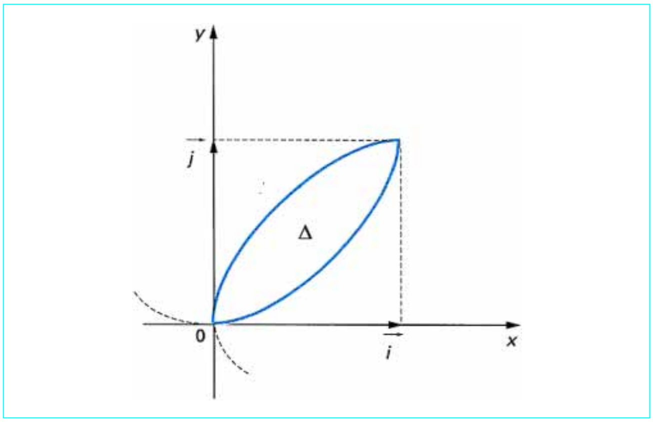

Figure 8 – Description de l'ensemble Δ

est noté $J_\phi(x_1,...,x_n)$ ou, de façon plus parlante, $\dfrac{D(t_1,\ldots,t_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}$. On sait que ce jacobien n'est jamais nul sur U.

Théorème 12 (de changement de variables). Soit ϕ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ sur l'ouvert V de $\mathbb{R}^n$. Soit T un sous-ensemble de V et f une application intégrable sur T. On pose $X = \phi^{-1}(T)$. On dispose alors de l'égalité :

$$\int_T f(t_1,\ldots,t_n)\mathrm{d}t_1,\ldots,\mathrm{d}t_n$$
$$= \int_X f \circ \phi(x_1,\ldots,x_n)\left|J_\phi(x_1,\ldots,x_n)\right|\mathrm{d}x_1,\ldots,\mathrm{d}x_n$$

Remarque 1. La conclusion du théorème contient implicitement l'intégrabilité de la fonction sous le second signe $\int$.

Remarque 2. Le changement de variables s'effectue de façon mécanique en remplaçant les **variables** muettes $t_1,\ldots,t_n$ par les **fonctions** composantes de ϕ, nommées identiquement ; en remplaçant T, ensemble décrit par $(t_1,\ldots,t_n)$, par X, ensemble décrit par $(x_1,\ldots,x_n)$, et en transformant l'élément *infinitésimal* $\mathrm{d}t_1,\ldots,\mathrm{d}t_n$ en $\left|\dfrac{D(t_1,\ldots,t_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}\right|\mathrm{d}x_1,\ldots,\mathrm{d}x_n$.

On se rappellera ce dernier point en identifiant mentalement $\dfrac{D(t_1,\ldots,t_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}$ avec $\dfrac{\mathrm{d}t_1,\ldots,\mathrm{d}t_n}{\mathrm{d}x_1,\ldots,\mathrm{d}x_n}$.

Remarque 3. La présence de la valeur absolue autour du jacobien peut s'expliquer. Dans le cas d'une variable, lorsque le difféomorphisme est décroissant (en supposant que T et X sont des intervalles de $\mathbb{R}$), le changement de variables élémentaire, dans lequel la valeur absolue ne figure pas, conduit à intervertir les bornes d'intégration. Un tel procédé n'est plus possible dans le cas de plusieurs variables, et ne l'est d'ailleurs en général pas dans le cas d'une seule, dès que les ensembles sur lesquels on intègre ne sont plus des intervalles.

Remarque 4. Dans la pratique, il est presque impossible d'appliquer le théorème de changement de variables directement, du fait que le changement de variables n'est un difféomorphisme que d'un ouvert ne contenant pas totalement X sur un ouvert ne contenant pas totalement T. On commence donc en général par modifier l'ensemble X en lui enlevant un ensemble négligeable, de façon à se mettre dans les conditions d'application du théorème. On remarque ensuite que l'on n'a pas changé la valeur de l'intégrale, puisque l'intégrale d'une fonction sur un ensemble de mesure nulle est nulle.

Par exemple, en coordonnées polaires, on pose :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

On obtient ainsi la formule :

$$\iint_{(x,\,y)\in A} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{(r,\,\theta)\in B} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Pour illustrer ce paragraphe, on se reportera à l'exemple **16** du paragraphe précédent, ainsi qu'aux exemples suivants.

Exemple 18 : calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Cette intégrale est convergente.

Comme $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ est une fonction positive de $\mathbb{R}^2$
$I = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$ par application du théorème de Fubini.

Par passage en coordonnées polaires et une nouvelle application du théorème de Fubini, on a :

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \pi$$

d'où $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Exemple 19 : calcul d'intégrale double en utilisant les coordonnées polaires.

$I = \displaystyle\iint_\Delta \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où Δ est le disque fermé de centre (0,0) et de rayon 1.

On utilise les coordonnées polaires ρ et θ :

$$(\rho,\theta) \mapsto (x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta).$$

$$\Delta = \{(x,y)x^2+y^2 \leqslant 1\} \qquad D = \{(r,\theta)0 \leqslant r \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

$$\iint_\Delta \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_D \frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r\right)$$
$$I = \pi\ln 2$$

Exemple 20 : calcul de volume et d'intégale triple avec changement de variables.

$$\Delta : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

On veut calculer $V(\Delta) = \displaystyle\iiint_\Delta \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ et $I = \displaystyle\iiint_\Delta z^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

— Calcul de $V(\Delta)$

On utilise le changement de variables

$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$(u,\theta,\varphi) \mapsto (x,y,z) = (au\cos\theta\cos\varphi,\ bu\sin\theta\cos\varphi,\ cu\sin\varphi)$.

Le jacobien de Φ est $abc\,u^2\cos\varphi$.

$$V(\Delta) = \iiint_\Delta \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \iiint_D abcu^2\cos\varphi\,\mathrm{d}u\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{4}{3}\pi abc$$

(si $a = b = c$, on retrouve le volume d'une sphère $\frac{4}{3}\pi a^3$)

— Calcul de I

Par le même changement de variables

$$I = \iiint_D c^2u^2\sin^2\varphi\, abcu^2\cos\varphi\,\mathrm{d}u\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi}{15}abc^3$$

Exemple 21 : calcul d'intégrale double par la méthode des équipotentielles.

Dans $\mathbb{R}^2$ affine euclidien, on considère l'ellipse $\mu : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ de foyers $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$; on pose

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \leqslant 1.\right.$$

On cherche à calculer $I = \iint (MF + MF')^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ avec $M = (x,y)$

$M \mapsto (MF + MF')^3$ prend la valeur constante $H(u) = (2\sqrt{1+u^2})^3$ le long de l'ellipse M_u de foyers F et F' de demi-axe u.

On pose le changement de variables

$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 (u, \omega) \mapsto (x, y)$ avec $x = \sqrt{1+u^2}\cos\omega$ et $y = u\sin\omega$.

On a $A = \Phi(C)$ où

$C = \{(u, \omega) \in \mathbb{R}^2 \quad (0 \leqslant u \leqslant \sqrt{3})$ et $(0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi)\}$.

Le jacobien de Φ vaut $\dfrac{u^2 + \sin^2\omega}{\sqrt{1+u^2}}$.

D'où $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} (2\sqrt{1+u^2})^3\left(\int_0^{2\pi} \frac{u^2+\sin^2\omega}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}u$

$$I = 8\pi\int_0^3 (1+u^2)(1+2u^2)\mathrm{d}u = \frac{304\pi\sqrt{3}}{5}$$