Université Pierre & Marie Curie (Paris 6)

Licence de Mathématiques L3

UE LM364 Intégration 1

Année 2011–12

Théorie de la Mesure et Intégration

Amaury Lambert [1]

1. Responsable de l'UE. Mél : amaury.lambert@upmc.fr

Table des matières

Chapitre 1

Suites, ensembles et suites d'ensembles

1.1 La droite achevée

Définition 1.1 *On appelle* droite achevée *l'ensemble* $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

On considérera toujours la droite achevée comme l'espace métrique associé à l'une des distances du type $d(x,y) := |f(x) - f(y)|$ où $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ si $x \in \mathbb{R}$ et $f(\pm\infty) = \pm 1$. Autrement dit, $\bar{\mathbb{R}}$ est muni de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, complétée avec les notions usuelles de convergence vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
La droite achevée est munie d'un ordre total que le lecteur aura deviné : pour tous $x \leq y \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < x \leq y < +\infty.$$

La droite achevée est également munie des opérations algébriques usuelles, avec les conventions suivantes :

$$+\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad a + \infty = +\infty, \quad a - \infty = -\infty,$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$, ainsi que

$$0 \times \infty = 0,$$

et

$$a \in]0, \infty] \ \Rightarrow \ a \times \infty = +\infty, \quad a \in [-\infty, 0[\ \Rightarrow \ a \times \infty = -\infty.$$

Remarque 1.2 *Tout au long de ce cours, il faudra acquérir le réflexe de* NE JAMAIS ÉCRIRE *aucune des opérations interdites suivantes :* $(+\infty) - (+\infty)$*, ainsi que* $(-\infty) - (-\infty)$*, et encore* $(\pm\infty)/(\pm\infty)$.

Une suite numérique est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\bar{\mathbb{R}}$.

1.2 Rappels sur les suites et séries numériques

Définition 1.3 *On dit que* $a \in \bar{\mathbb{R}}$ *est une* valeur d'adhérence *de la suite* (u_n) *s'il existe une suite extraite* $(u_{\varphi(n)})$ *qui converge vers* a.

Exemple 1.4 *Les valeurs d'adhérence de la suite* $(\cos(\pi n/2))$ *sont* $-1, 0$ *et* 1. *Celles de la suite* $((-1)^n + \frac{1}{n})$ *sont* -1 *et* $+1$.

Notation 1.5 (importante) *Lorsqu'une suite* (u_n) *est croissante (resp. décroissante), on notera souvent* $\lim_n \uparrow u_n$ *(resp.* $\lim_n \downarrow u_n$*) sa limite, pour rappeler que la suite est monotone, et surtout pour indiquer que cette limite existe* donc *toujours (dans* $\bar{\mathbb{R}}$*).*

Définition 1.6 *La borne supérieure (*$\in \bar{\mathbb{R}}$*) de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite* (u_n) *est aussi une valeur d'adhérence de* (u_n). *On la note* $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$ *ou* $\limsup_{n\to\infty} u_n$. *C'est donc la plus grande valeur d'adhérence de* (u_n) *et elle vérifie*

$$\overline{\lim_n}\, u_n = \lim_n \downarrow (\sup_{k\geq n} u_k) = \inf_n (\sup_{k\geq n} u_k).$$

De façon analogue, la plus petite valeur d'adhérence de (u_n) *est notée* $\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n$ *ou* $\liminf_{n\to\infty} u_n \ldots$

Définition 1.7 *On dit que la série de terme général* (u_n) *est* absolument convergente *si la suite des sommes partielles* $(\sum_{k=0}^n |u_k|)_n$ *converge dans* $\mathbb{R}$, *ce que l'on note également* $\sum_n |u_n| < \infty$.

Théorème 1.8 *Si la série de terme général* (u_n) *est absolument convergente, alors elle est convergente, c'est-à-dire que la suite des sommes partielles* $(\sum_{k=0}^n u_k)_n$ *converge dans* $\mathbb{R}$.

Proposition 1.9 *La* somme *de la série de terme général* $u_n \geq 0$ *(c'est-à-dire la limite de la suite des sommes partielles, qui existe toujours dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$*) ne dépend pas de l'ordre de sommation.*

Démonstration. Soit une bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. On veut montrer que la suite $S'_n := \sum_{k=0}^n u_{\varphi(k)}$ a même limite dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ que $S_n := \sum_{k=0}^n u_k$.

Soit $n \geq 0$ et $N := \max\{\varphi(0), \ldots, \varphi(n)\}$. Alors $S'_n = u_{\varphi(0)} + \cdots + u_{\varphi(n)} \leq \sum_{j=0}^N u_j = S_N$, donc $S'_n \leq S_N \leq S_\infty$. Faisant tendre $n \to \infty$ on obtient que $S'_\infty \leq S_\infty$. L'inégalité opposée s'obtient par symétrie. □

1.3 Ensembles

1.3.1 Terminologie

Soit E un ensemble. Mettons-nous d'accord sur un peu de terminologie.

- $A \subseteq E$ sera appelé *sous-ensemble* ou *partie* de E ;
- $\mathscr{P}(E) := \{\text{parties de } E\}$;
- $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(E)$ sera appelé *famille* de parties de E ou *classe* de parties de E plutôt qu'ensemble de sous ensembles de E ou partie de $\mathscr{P}(E)$;
- dans quelques rares cas, nous serons amenés à considérer des ensembles de familles de parties, que l'on appellera alors *collections* de familles de parties de E.

1.3.2 Opérations classiques

Recensons quelques opérations classiques sur les parties d'un ensemble E. Soient A_1 et A_2 deux parties de E.

– *La réunion* de A_1 et A_2, notée $A_1 \cup A_2$: $\forall x \in E$,

$$x \in A_1 \cup A_2 \Leftrightarrow \exists i \in \{1,2\}, x \in A_i$$

– *L'intersection* de A_1 et A_2, notée $A_1 \cap A_2$: $\forall x \in E$,

$$x \in A_1 \cap A_2 \Leftrightarrow \forall i \in \{1,2\}, x \in A_i$$

– *Le complémentaire* de A_1, noté ${}^cA_1$: $\forall x \in E$,

$$x \in {}^cA_1 \Leftrightarrow x \notin A_1$$

– *La différence* de A_1 avec A_2, notée $A_1 \setminus A_2$ et dite *différence propre* dans le cas où $A_2 \subseteq A_1$: $\forall x \in E$,

$$x \in A_1 \setminus A_2 \Leftrightarrow x \in A_1 \text{ et } x \notin A_2$$

– *La différence symétrique* de A_1 et A_2, notée $A_1 \Delta A_2$: $\forall x \in E$,

$$x \in A_1 \Delta A_2 \Leftrightarrow x \in A_1 \cup A_2 \text{ et } x \notin A_1 \cap A_2.$$

Remarque 1.10 *Remarquer l'association de la réunion avec le quantificateur « $\exists$ », de l'intersection avec le quantificateur « $\forall$ », ainsi que l'association du passage au complémentaire avec la négation et de l'inclusion avec l'implication : $A_1 \subseteq A_2$ ssi $\forall x \in E$,*

$$x \in A_1 \Rightarrow x \in A_2.$$

Exercice 1.11 *Montrer les identités suivantes :* @

$$ {}^c(A_1 \cup A_2) = {}^cA_1 \cap {}^cA_2$$
$$ {}^c(A_1 \cap A_2) = {}^cA_1 \cup {}^cA_2$$
$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap {}^cA_2$$
$$A_1 \Delta A_2 = (A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2) = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1).$$

1.3.3 Suites de parties d'un ensemble

Nous allons définir ici les notions de limite, limite supérieure et limite inférieure d'une suite de parties. Soit (A_n) une suite de parties de E.

Définition 1.12 *On rappelle que la suite (A_n) est dite* croissante *(resp.* décroissante*) lorsque pour tout entier n, $A_n \subseteq A_{n+1}$ (resp. $A_{n+1} \subseteq A_n$). Dans ce cas, la limite de la suite (A_n) est définie naturellement comme la* réunion *(resp. l'*intersection*) de tous les A_n :*

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcup_n A_n \text{ (resp. } \bigcap_n A_n\text{)}.$$

Par analogie avec le cas réel, on notera cette limite $\lim \uparrow$ *(resp.* $\lim \downarrow$*) pour faire référence au fait que la suite (A_n) est croissante et que la limite est donc la réunion (resp. l'intersection) de tous ses éléments.*

Définition 1.13 *On définit les deux parties de E suivantes :*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n (ou \ \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) := \lim_{n\to\infty} \downarrow \bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k,$$

où la notation $\lim \downarrow$ *fait référence au fait que la suite* $\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)_n$ *est décroissante, si bien que sa limite existe toujours (et est l'intersection de tous ses éléments, ce qu'indique la dernière égalité) ;*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n (ou \ \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n) := \lim_{n\to\infty} \uparrow \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k,$$

où la notation $\lim \uparrow$ *fait référence au fait que la suite* $\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)_n$ *est croissante, si bien que sa limite existe toujours (et est la réunion de tous ses éléments, ce qu'indique la dernière égalité).*

Remarque 1.14 *On peut aussi caractériser la limite supérieure et la limite inférieure par les assertions suivantes : pour tout* $x \in E$*,*

$$\begin{aligned} x \in \limsup_{n\to\infty} A_n &\Leftrightarrow \forall n \ \exists k \geq n, \ x \in A_k \\ &\Leftrightarrow \{n : x \in A_n\} \ \textit{est infini.} \\ x \in \liminf_{n\to\infty} A_n &\Leftrightarrow \exists n \ \forall k \geq n, \ x \in A_k \\ &\Leftrightarrow \{n : x \notin A_n\} \ \textit{est fini.} \end{aligned}$$

Noter que $\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n$.

Définition 1.15 *On dit que la suite* (A_n) *converge si* $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$*. Lorsque c'est le cas on définit* $\lim_n A_n := \liminf_n A_n = \limsup_n A_n$.

Remarque 1.16 *Soit A la limite d'une suite* (A_n) *qui converge. Alors A est caractérisée par :*

$$\begin{cases} \forall x \in A & \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad x \in A_n \\ \forall x \notin A & \exists n_1 \quad \forall n \geq n_1 \quad x \notin A_n. \end{cases}$$

Exercice 1.17 *Montrer les deux égalités suivantes* @

$$\begin{aligned} \limsup_n {}^c A_n &= {}^c(\liminf_n A_n) \\ \liminf_n {}^c A_n &= {}^c(\limsup_n A_n). \end{aligned}$$

1.3.4 Fonctions et fonctions indicatrices

Définition 1.18 *On appelle* indicatrice *ou* fonction indicatrice *de la partie A, et l'on note* $\mathbb{1}_A$*, la fonction*

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & si \quad x \notin A \\ 1 & si \quad x \in A. \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 1.19 *Noter que* $\mathbb{1}_{{}^cA} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Proposition 1.20 *Au sens de la convergence simple,*

$$\overline{\lim_n}\, \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\overline{\lim}_n A_n}$$

et

$$\underline{\lim_n}\, \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\underline{\lim}_n A_n}$$

Dém. Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \overline{\lim_n}\, \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1 &\Leftrightarrow \forall n \ \exists k \geq n, \ \mathbb{1}_{A_k}(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall n \ \exists k \geq n, \ x \in A_k \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{\lim_n}\, A_n \\ &\Leftrightarrow \mathbb{1}_{\overline{\lim}_n A_n}(x) = 1. \end{aligned}$$

L'autre assertion se démontre de la même manière, ou alors en se servant de l'assertion précédente :

$$\underline{\lim_n}\, \mathbb{1}_{A_n} = \underline{\lim_n}(1 - \mathbb{1}_{{}^cA_n}) = 1 - \overline{\lim_n}\, \mathbb{1}_{{}^cA_n} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{\lim}_n {}^cA_n} = 1 - \mathbb{1}_{{}^c(\underline{\lim}_n A_n)} = \mathbb{1}_{\underline{\lim}_n A_n},$$

ce qui achève la démonstration. □

Remarque 1.21 *Conséquence de cette proposition : la suite de parties* (A_n) *converge ssi la suite de fonctions* $(\mathbb{1}_{A_n})$ *converge simplement (et lorsque c'est le cas, la convergence a lieu vers* $\mathbb{1}_{\lim_n A_n}$*).*

Définition 1.22 *Soient* E, F *deux ensembles et* $f : E \longrightarrow F$.

- *pour tout* $A \subseteq E$*, on note* $f(A)$ *l'*image directe *de* A *par* f *:*

$$f(A) := \{y \in F : \exists x \in A, \ f(x) = y\}.$$

- *pour tout* $B \subseteq F$*, on note* $f^{-1}(B)$ *l'*image réciproque *de* B *par* f *:*

$$f^{-1}(B) := \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

Remarque 1.23 *La notation* f^{-1} *ne fera que très rarement, sinon jamais, référence à l'application inverse ou réciproque de l'application* f *dans les cas où elle serait par hasard bijective. Néanmoins, noter la cohérence de ces notations, au sens où si* f *est bijective, alors on a bien égalité entre l'image réciproque* $f^{-1}(B)$ *de* B *par* f *et l'image directe* $f^{-1}(B)$ *de* B *par l'inverse* f^{-1} *de* f.

Exercice 1.24 *Montrer les formules de Hausdorff(cf feuille de TD). Pour tous I et J ensembles d'indices non vides, pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E et pour toute famille $(B_j)_{j\in J}$ de parties de F, pour toute fonction $f : E \longrightarrow F$,* @

$$f\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f(A_i),$$

$$f\left(\bigcap_i A_i\right) \subseteq \bigcap_i f(A_i)$$

avec égalité si f est injective ;

$$f^{-1}\left(\bigcup_j B_j\right) = \bigcup_j f^{-1}(B_j),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_j B_j\right) = \bigcap_j f^{-1}(B_j),$$

et pour tout $B \subseteq F$,

$${}^{c}\big(f^{-1}(B)\big) = f^{-1}\left({}^{c}B\right).$$

Chapitre 2

Théorie des cardinaux

2.1 Cardinaux, équipotence, dénombrabilité

Définition 2.1 *Deux ensembles E et F sont dits* équipotents*, ou* avoir même cardinal*, ou encore* même puissance*, s'il existe une* bijection *de l'un sur l'autre. On note alors* $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Définition 2.2 *On notera* $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$ *s'il existe une* injection *de E dans F, c'est-à-dire si E a même puissance qu'une partie de F. Si de plus E et F n'ont pas même puissance, on notera* $\mathrm{Card}(E) < \mathrm{Card}(F)$.

Exemple 2.3 *Quelques exemples d'équipotences :*
- *Les ensembles $\mathscr{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$ (= ensemble des applications : $E \longrightarrow \{0,1\}$) sont équipotents car l'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de l'un sur l'autre ;*
- *les ensembles $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$ (entiers pairs) sont équipotents car l'application $n \mapsto 2n$ est une bijection de l'un sur l'autre ;*
- *les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sont équipotents car on peut bien énumérer de manière injective les couples d'entiers (par exemple en suivant les points des droites d'équation $y = -x + c$, lorsque c croît dans $\mathbb{N}$) ;*
- *par récurrence, $\mathbb{N}$ est équipotent avec tous les produits cartésiens du type $\mathbb{N}^p$ ($p \in \mathbb{N}^\star$).* @

Théorème 2.4 (théorème de Cantor–Bernstein, admis) *Si* $\mathrm{Card}(E_1) \leq \mathrm{Card}(E_2)$ *et* $\mathrm{Card}(E_2) \leq \mathrm{Card}(E_1)$*, alors* $\mathrm{Card}(E_1) = \mathrm{Card}(E_2)$.

Remarque 2.5 *La relation $\leq$ est une* relation d'ordre*. En effet elle est*

1. *réflexive : il existe une injection de E dans E (l'injection canonique, c'est-à-dire ici l'identité), donc* $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(E)$ *;*
2. *antisymétrique, grâce au théorème de Cantor–Bernstein ;*
3. *transitive : si* $\mathrm{Card}(E_1) \leq \mathrm{Card}(E_2)$ *et* $\mathrm{Card}(E_2) \leq \mathrm{Card}(E_3)$*, alors il existe une injection $f_1 : E_1 \longrightarrow E_2$ et une injection $f_2 : E_2 \longrightarrow E_3$, donc il existe une injection $f_3 : E_1 \longrightarrow E_3$ qui n'est autre que... $f_2 \circ f_1$, par conséquent* $\mathrm{Card}(E_1) \leq \mathrm{Card}(E_3)$. @

Remarque 2.6 *Ces énoncés ne sont pas des évidences, car il faut bien garder à l'esprit que les cardinaux ne sont pas des nombres réels (sauf pour le cas très particulier des ensembles finis).*

La proposition suivante, dont la démonstration est très jolie, assure en particulier qu'il existe une suite infinie strictement croissante de cardinaux :

$$\mathrm{Card}(E) < \mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) < \mathrm{Card}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))) < \cdots$$

Proposition 2.7 $\mathrm{Card}(E) < \mathrm{Card}(\mathscr{P}(E))$.

Dém. Soit $f : E \to \mathscr{P}(E)$. Montrons que f ne peut être surjective (et donc ne peut être bijective). Soit

$$\Omega := \{x \in E : x \notin f(x)\}.$$

Montrons que par l'absurde que Ω ne peut avoir d'antécédent par f. Si $\exists z \in E$ tel que $f(z) = \Omega$ alors

- soit $z \in \Omega$ alors $z \notin f(z)$, c'est-à-dire $z \notin \Omega$;
- soit $z \notin \Omega$ alors $z \in f(z)$, c'est-à-dire $z \in \Omega$,

ce qui constitue une contradiction. D'autre part il existe clairement une injection de E dans $\mathscr{P}(E)$, par exemple celle qui à x associe $\{x\}$. $\square$

Définition 2.8 *On définit les notions d'infini et de dénombrable comme suit :*

- *E est dit* infini *s'il existe $x_0 \in E$ et une injection de E dans $E \setminus \{x_0\}$, et est dit* fini *sinon ;*
- *E est dit* dénombrable *si* $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ *;*
- *E est dit* infini dénombrable *si* $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ *;*
- *E est dit (infini)* non dénombrable *si* $\mathrm{Card}(E) > \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ *;*
- *une partie A de E est dite* cofinie *si ${}^cA$ est fini.*

Remarque 2.9 *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *est (bien !) infini car par exemple l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}^\star \\ n &\longmapsto n+1 \end{aligned}$$

est bien une injection.

Définition 2.10 $\mathrm{Card}(\mathbb{N})$ *est souvent noté $\aleph_0$ (« aleph zéro »).*

La proposition suivante, laissée en exercice (indication : montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ qu'il existe n éléments distincts $x_1, \ldots, x_n$ de E et une injection $i_n : E \to E \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$), assure que les ensembles équipotents à $\mathbb{N}$ sont les plus petits ensembles infinis au sens des cardinaux.

Proposition 2.11 *E est infini ssi* $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. @

2.2 Cardinaux classiques et propriétés

Proposition 2.12 *Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^p$ ($p \in \mathbb{N}^\star$) et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*

Dém. On a déjà vu que $\mathbb{N}^p$ était équipotent à $\mathbb{N}$. Pour ce qui est de $\mathbb{Z}$, la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \begin{cases} -2n & \text{si} \quad n \leq 0 \\ 2n-1 & \text{si} \quad n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

est une bijection.

Enfin, rappelons que pour tout $x \in \mathbb{Q}^\star$, $\exists!(p,q) \in \mathbb{Z}^\star \times \mathbb{N}^\star$ tel que $x = p/q$ et $p \wedge q = 1$. Ainsi la fonction qui à 0 associe $(0,1)$ et qui est définie sur $\mathbb{Q}^\star$ par

$$\begin{aligned} f :\ \mathbb{Q}^\star &\longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star \\ p/q &\longmapsto (p,q) \end{aligned}$$

est une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$, donc $\mathrm{Card}(\mathbb{Q}) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star)$. Or il existe une injection $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, donc l'application qui à (x,y) associe $(g(x), y)$ est une injection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{N}^2$, ce qui montre que $\mathrm{Card}(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N}^2) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$, donc $\mathrm{Card}(\mathbb{Q}) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. □

Proposition 2.13 *Toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Dém. Soit $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est dénombrable. Alors par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une injection $\varphi_n : E_n \to \mathbb{N}$. Pour tout $x \in E$ on définit alors

$$N(x) := \min\{n \geq 0 : x \in E_n\} < \infty.$$

Alors la fonction

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow \mathbb{N}^2 \\ x &\longmapsto (N(x), \varphi_{N(x)}(x)) \end{aligned}$$

est une injection car pour tous $x, y \in E$ tels que $\phi(x) = \phi(y)$, on a $N(x) = N(y) =: n$ puis $\varphi_{N(x)}(x) = \varphi_{N(y)}(y)$, c'est-à-dire $\varphi_n(x) = \varphi_n(y)$, donc $x = y$, puisque φ_n est injective. Par conséquent, $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N}^2) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. □

Proposition 2.14 *Tout produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Dém. Pour $i = 1, \ldots, n$, soit E_i dénombrable et une injection $\varphi_i : E_i \to \mathbb{N}$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} \phi : \qquad \Pi_{i=1}^n E_i &\longrightarrow \mathbb{N}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto (\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)) \end{aligned}$$

est clairement injective donc $\mathrm{Card}(\Pi_i E_i) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N}^n) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. □

Proposition 2.15 *Tout produit cartésien infini dénombrable d'ensembles non vides (même finis) est non-dénombrable pourvu qu'une infinité d'entre eux ne soient pas réduits à un singleton.*

Dém. Admettons pour simplifier que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Card}(E_i) \geq 2$. Alors pour tout i, il existe une injection $\varphi_i : \{0,1\} \to E_i$. Donc l'application

$$\begin{aligned} \phi : \qquad \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow E_0 \times E_1 \times \cdots \\ (x_0, x_1, \ldots) &\longmapsto (\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \ldots) \end{aligned}$$

est injective, donc $\mathrm{Card}(\Pi_i E_i) \geq \mathrm{Card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \mathrm{Card}\mathscr{P}(\mathbb{N}) > \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. □

Théorème 2.16 *Les ensembles* $\mathbb{R}$ *et* $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ *sont équipotents.*

Définition 2.17 *On dit d'un ensemble équipotent à* $\mathbb{R}$ *qu'il a la* puissance du continu.

Dém. Première étape : montrons que toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert a la puissance du continu. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ contenant un intervalle I qu'on écrira sous la forme $I =]b-a, b+a[$, alors A s'injecte bien sûr dans $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{R}$ s'injecte aussi dans A par exemple par l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto a\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + b \end{aligned}$$

.

Deuxième étape : montrons que $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) \leq \mathrm{Card}([0,1/2])$ dont on sait d'après l'étape précédente que ce cardinal vaut $\mathrm{Card}(\mathbb{R})$. Soit l'application

$$\begin{aligned} \phi : \quad \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow [0,1/2] \\ x = (x_n) &\longmapsto \sum_{n\geq 0} \frac{x_n}{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Montrons que ϕ est bien injective. Pour tous $x \neq y$, soit $n := \min\{k \geq 0 : x_k \neq y_k\} < \infty$. Alors

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(y)| &= \left| \frac{x_n - y_n}{3^{n+1}} + \sum_{k\geq n+1} \frac{x_k - y_k}{3^{k+1}} \right| \\ &\geq \frac{|x_n - y_n|}{3^{n+1}} - \left| \sum_{k\geq n+1} \frac{y_k - x_k}{3^{k+1}} \right| \\ &\geq \frac{1}{3^{n+1}} - \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{3^{k+1}} \\ &= \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+2}} \frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{2\cdot 3^{n+1}} > 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\phi(x) \neq \phi(y)$.

Troisième et dernière étape : montrons que $\mathrm{Card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \geq \mathrm{Card}([0,1[)$, ce qui équivaut à $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) \geq \mathrm{Card}(\mathbb{R})$. Soit $\psi : [0,1[\to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'application qui à $x \in [0,1[$ associe son développement dyadique propre, c'est-à-dire la suite (x_n) de 0 et de 1 définie récursivement par $x_0 := [2x]$, et

$$x_n := \left[2^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{2^{k+1}} \right) \right].$$

Alors comme $x = \sum_{k\geq 0} \frac{x_k}{2^{k+1}}$, ψ est clairement injective (car si $\psi(x) = \psi(y)$, $x = y$). $\square$

Chapitre 3

Tribus de parties d'un ensemble

3.1 Définitions et exemples

Définition 3.1 *Une classe $\mathscr{A}$ de parties d'un ensemble E est appelée* tribu *ou* σ-algèbre *si*

(i) elle contient E : $E \in \mathscr{A}$;

(ii) elle est stable par passage au complémentaire *: pour tout $A \subseteq E$, $A \in \mathscr{A} \Leftrightarrow {}^cA \in \mathscr{A}$;*

(iii) elle est stable par réunion dénombrable *: si (A_n) est une famille dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\cup_n A_n \in \mathscr{A}$.*

On dit alors que $(E, \mathscr{A})$ est un espace mesurable.

Remarque 3.2 *Cette définition a quelques conséquences immédiates :*
- *$\varnothing \in \mathscr{A}$ car $\varnothing = {}^cE$;*
- *stabilité par intersection dénombrable car $\cap_n A_n = {}^c(\cup_n {}^cA_n)$;*
- *stabilité par différence car $A \setminus B = A \cap {}^cB$;*
- *stabilité par différence symétrique car $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;*
- *stabilité par limite supérieure car $\overline{\lim}_n A_n = \cap_n \cup_{k \geq n} A_k$;*
- *stabilité par limite inférieure...*

Exercice 3.3 *Il aurait été équivalent de définir une tribu comme une classe $\mathscr{A}$ de parties de E vérifiant (par exemple) les propriétés suivantes : $\mathscr{A}$ contient $\varnothing$, est stable par passage au complémentaire et est stable par intersection dénombrable.*

Exemple 3.4 *Quelques exemples de tribus :*
- *$\{\varnothing, E\}$ est une tribu (parfois appelée la* tribu grossière*) ;*
- *$\mathscr{P}(E)$ est bien sûr une tribu (parfois appelée la* tribu triviale*) ;*
- *si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de E dénombrable (finie ou infinie), alors*

$$\mathscr{A} := \{\cup_{i \in I} A_i : I \subseteq \mathbb{N}\}$$

  est une tribu sur E ;
- *si $A \subseteq E$, la plus petite (voir section suivante) tribu contenant A est $\{\varnothing, E, A, {}^cA\}$;*

– *enfin,*

$$\mathscr{A} := \{A \subseteq E : A \text{ ou } {}^cA \text{ est dénombrable}\}$$

est une tribu, ce que nous démontrons ci-dessous.

Dém. *Nous démontrerons uniquement la stabilité par réunion dénombrable. Soient $(A_n)_n \in \mathscr{A}$. De deux choses l'une :*

– *soit pour tout n, A_n est dénombrable et alors $\cup_n A_n$ est dénombrable ;*
– *soit $\exists n_0$ tel que A_{n_0} est non dénombrable, et alors ${}^cA_{n_0}$ est dénombrable, donc $\cap_n {}^cA_n \subseteq {}^cA_{n_0}$ est dénombrable, et par conséquent $\cup_n A_n$ est de complémentaire dénombrable (car égal à $\cap_n {}^cA_n$) ;*

Dans les deux cas $\cup_n A_n \in \mathscr{A}$. □

3.2 Tribu engendrée

Proposition 3.5 (et définition) *a) l'intersection d'une collection non vide quelconque*[1] *de tribus de parties de E est elle-même une tribu ;* @

b) pour toute classe $\mathscr{C}$ de parties de E, l'intersection de toutes les tribus contenant[2] *$\mathscr{C}$ est (donc*[3]*) une tribu : elle est (appelée)* la plus petite tribu *contenant $\mathscr{C}$, ou tribu* engendrée *par $\mathscr{C}$, et notée $\sigma(\mathscr{C})$:*

$$\sigma(\mathscr{C}) := \bigcap_{\mathscr{A} \text{ tribu}, \mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}} \mathscr{A}.$$

Remarque 3.6 – *On rappelle que le terme collection désigne un ensemble de famille de parties, c'est-à-dire un ensemble d'ensembles de sous-ensembles de E... ;*
– *je ne devrais pas préciser, mais il faut garder à l'esprit que si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des familles de parties de E alors $C \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ ssi $C \in \mathscr{A}$ et $C \in \mathscr{B}$ (on n'intersecte pas ici les parties de E) ;*
– *le terme de plus petite tribu n'a de sens qu'à la lumière de la définition précédente, car il n'existe pas d'ordre total sur les tribus.*

Remarque 3.7 – *pour toute classe $\mathscr{B}$ de parties de E, $\mathscr{B} \subseteq \sigma(\mathscr{B})$, par définition ;*
– *si $\mathscr{C}$ est une classe de parties de E et $\mathscr{A}$ est une tribu de parties de E telle que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}$ est élément de la collection des tribus contenant $\mathscr{C}$, donc contient son intersection $\sigma(\mathscr{C})$, autrement dit $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{A}$;*
– *première conséquence, si $\mathscr{A}$ est une tribu de parties de E, alors $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$;*
– *deuxième conséquence, si $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}$ alors $\mathscr{B} \subseteq \sigma(\mathscr{B})$ implique $\mathscr{C} \subseteq \sigma(\mathscr{B})$, et comme $\mathscr{B}$ est une tribu, $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \sigma(\mathscr{B})$.*

Remarque 3.8 (méthodologie) – *Si $\mathscr{A}$ est une tribu, pour montrer que $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C})$, on montre que $\mathscr{A} \subseteq \sigma(\mathscr{C})$ et que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$;*

---

1. quelconque au sens de « pas forcément dénombrable »
2. au sens de l'inclusion
3. cette collection est non vide car un de ses éléments est $\mathscr{P}(E)$

– *pour montrer que* $\sigma(\mathscr{C}_1) = \sigma(\mathscr{C}_2)$, *on montre que* $\mathscr{C}_1 \subseteq \sigma(\mathscr{C}_2)$ *et que* $\mathscr{C}_2 \subseteq \sigma(\mathscr{C}_1)$.

Définition 3.9 *On note* $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, *ou* $\mathscr{B}or(\mathbb{R})$, *et on appelle* tribu de Borel *sur* $\mathbb{R}$ *la tribu engendrée par les intervalles ouverts. La tribu de Borel sur* $\bar{\mathbb{R}}$ *est l'ensemble des parties de* $\mathbb{R}$ *prenant l'une des formes* A, $A\cup\{+\infty\}$, $A\cup\{-\infty\}$ *ou* $A\cup\{-\infty,+\infty\}$, *où* $A \in \mathscr{B}or(\mathbb{R})$.

Proposition 3.10 *Soit* S *une partie dense de la droite réelle*[4]. *Alors* $\mathscr{B}or(\mathbb{R})$ *est la tribu engendréee par les intervalles du type*

a) $[a,+\infty[, a \in S$; *b)* $]b,+\infty[, b \in S$; *c)* $]-\infty,c[, c \in S$; *d)* $]-\infty,d], d \in S$.

Il en est de même pour $\mathscr{B}or(\bar{\mathbb{R}})$ *avec les intervalles du type* $[a,+\infty]$,...

Dém. [de a)] Soit $\mathscr{I}_S$ l'ensemble des intervalles de la forme $[a,+\infty[$ pour $a \in S$. Tout d'abord, $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ contient tous les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ car est stable par passage au complémentaire donc on a l'inclusion $\sigma(\mathscr{I}_S) \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Soit maintenant $a \in [-\infty,+\infty[$. Comme S est dense, il existe une suite décroissante (a_n) d'éléments de S tels que $a_n \neq a$ @ pour tout n, et $\lim_n \downarrow a_n = a$. Comme $[a_n,+\infty[\in \mathscr{I}_S$, on a $[a_n,+\infty[\in \sigma(\mathscr{I}_S)$, donc par stabilité par réunion dénombrable de la tribu $\sigma(\mathscr{I}_S)$,

$$]a,+\infty[= \cup_n [a_n,+\infty[\in \sigma(\mathscr{I}_S).$$

On démontre avec une suite croissante que $[a,+\infty[\in \sigma(\mathscr{I}_S)$. Maintenant pour tous $a,b \in [-\infty,+\infty[$, l'intervalle $]a,b[$ s'écrit $]a,+\infty[\setminus[b,+\infty[\in \sigma(\mathscr{I}_S)$. Par conséquent $\mathscr{I} \subseteq \sigma(\mathscr{I}_S)$, où $\mathscr{I}$ est l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{I}) \subseteq \sigma(\mathscr{I}_S)$.
□

3.3 Tribus image et image réciproque

Soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$.

Proposition 3.11 *Si* $\mathscr{A}_2$ *est une tribu sur* E_2,

$$f^{-1}(\mathscr{A}_2) := \{f^{-1}(Y), Y \in \mathscr{A}_2\}$$

est une tribu sur E_1, *appelée* tribu image réciproque *(de* $\mathscr{A}_2$ *par* f*).*

Dém. Par les formules de Hausdorff :
i) $f^{-1}(E_2) = E_1 \in f^{-1}(\mathscr{A}_2)$;
ii) pour tout $Y \in \mathscr{A}_2$, ${}^c(f^{-1}(Y)) = f^{-1}({}^cY) \in f^{-1}(\mathscr{A}_2)$;
iii) pour toute suite $(Y_n) \in \mathscr{A}_2$, $\cup_n f^{-1}(Y_n) = f^{-1}(\cup_n Y_n) \in f^{-1}(\mathscr{A}_2)$ car $\cup_n Y_n \in \mathscr{A}_2$.□

Proposition 3.12 *Si* $\mathscr{A}_1$ *est une tribu sur* E_1,

$$\mathscr{B} = \{Y \subseteq E_2 : f^{-1}(Y) \in \mathscr{A}_1\}$$

est une tribu sur E_2, *appelée* tribu image *(de* $\mathscr{A}_1$ *par* f*).*

Remarque 3.13 *La tribu image n'est PAS* $f(\mathscr{A}_1)$ *qui n'est en général pas une tribu.*

4. c'est-à-dire telle que tout nombre réel est limite d'une suite à valeurs dans S ; par exemple $S = \mathbb{Q}$

Dém. Par les formules de Hausdorff également. $\square$ @

Définition 3.14 (et proposition) *Soit $(E, \mathscr{A})$ un ensemble mesurable et X une partie de E. La classe $\mathscr{C} = \{A \cap X : A \in \mathscr{A}\}$ de parties de X est une tribu sur X appelée* tribu trace *de $\mathscr{A}$ sur X.*

Remarque 3.15 *Cette définition a surtout de l'intérêt dans le cas où $X \notin \mathscr{A}$.*

Dém. La classe $\mathscr{C}$ est la tribu image réciproque de $\mathscr{A}$ par l'injection canonique $i : X \to E$: en effet pour tout $A \in \mathscr{A}$, $i^{-1}(A) = A \cap X$. $\square$

Théorème 3.16 (lemme de transport) *Soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ et $\mathscr{C}$ une classe de parties de E_2. Alors $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$.*

Dém. Montrons l'inclusion $\subseteq$. Tout d'abord $\mathscr{C} \subseteq \sigma(\mathscr{C})$, donc $f^{-1}(\mathscr{C}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$. Mais $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$ est une tribu donc $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$.

Montrons maintenant l'inclusion $\supseteq$. Soit $\mathscr{B}$ la tribu image de $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$ par f, c'est-à-dire

$$\mathscr{B} := \{Y \subseteq E_2 : f^{-1}(Y) \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))\}.$$

Alors $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}$, et comme $\mathscr{B}$ est une tribu, $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{B}$, puis $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \subseteq f^{-1}(\mathscr{B})$. Mais par définition de $\mathscr{B}$, $f^{-1}(\mathscr{B}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$ donc $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$. $\square$

Chapitre 4

Fonctions mesurables

4.1 Définitions

Notation 4.1 *Soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ et $B \subseteq E_2$. On utilise très fréquemment la notation $\{f \in B\}$ à la place de $f^{-1}(B)$, ce qui peut se voir comme une écriture condensée de $\{x : f(x) \in B\}$. Par exemple, dans le cas où $E_2 = \mathbb{R}$ et $B = [a, +\infty[$, on écrira $f^{-1}(B)$ sous la forme $\{f \geq a\}$.*

Définition 4.2 *Une fonction $f : (E_1, \mathscr{A}_1) \longrightarrow (E_2, \mathscr{A}_2)$ est dite mesurable*[1] *si $f^{-1}(\mathscr{A}_2) \subseteq \mathscr{A}_1$ (c'est-a-dire : pour tout $B \in \mathscr{A}_2$, $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}_1$).*

Notation 4.3 *On notera $\mathscr{F}(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ l'ensemble des fonctions mesurables : $(E_1, \mathscr{A}_1) \to (E_2, \mathscr{A}_2)$.*

Remarque 4.4 *Si on ne se donne que la tribu $\mathscr{A}_1$, alors la tribu image de $\mathscr{A}_1$ par f est la plus grande tribu sur E_2 qui rende f mesurable.*

Si on ne se donne que $\mathscr{A}_2$, alors la tribu image réciproque de $\mathscr{A}_2$ par f est la plus petite tribu sur E_1 qui rende f mesurable. On note aussi cette tribu $\sigma(f)$.

Remarque 4.5 *Une fonction indicatrice $\mathbb{1}_A : (E, \mathscr{A}) \longrightarrow (\{0,1\}, \mathscr{P}(\{0,1\}))$ est mesurable ssi $A \in \mathscr{A}$, ce que l'on dira aussi « A est mesurable »*[2]*.*

4.2 Exemples et opérations stables pour la mesurabilité

La proposition suivante est une conséquence du lemme de transport.

Proposition 4.6 *Soit $\mathscr{C}$ une classe de parties de F et $\mathscr{B} := \sigma(\mathscr{C})$. Alors $f : (E, \mathscr{A}) \to (F, \mathscr{B})$ est mesurable ssi $f^{-1}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{A}$.*

Dém. L'application f est mesurable ssi $f^{-1}(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{A}$, mais $f^{-1}(\mathscr{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$ et $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) \subseteq \mathscr{A}$ ssi $f^{-1}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{A}$. □

1. sous-entendu par rapport aux deux tribus $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$
2. toujours en référence sous-entendue à la tribu $\mathscr{A}$

Application. Soit S une partie dense de $\mathbb{R}$. Alors la fonction $f : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable ssi $\{f \geq a\} \in \mathscr{A}$ pour tout $a \in S$ (et l'on peut bien sûr remplacer $\{f \geq a\}$ par $\{f > a\}$, $\{f \leq a\}$ ou $\{f < a\}$).

Proposition 4.7 *Soient $f_1 : (E_1, \mathscr{A}_1) \to (E_2, \mathscr{A}_2)$ et $f_2 : (E_2, \mathscr{A}_2) \to (E_3, \mathscr{A}_3)$. Si f_1 et f_2 sont mesurables, alors $f_2 \circ f_1 : (E_1, \mathscr{A}_1) \to (E_3, \mathscr{A}_3)$ est aussi mesurable.*

Dém. Pour tout élément A_3 de $\mathscr{A}_3$, on vérifie que $(f_2 \circ f_1)^{-1}(A_3) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(A_3))$. @
Comme f_2 est mesurable, $f_2^{-1}(A_3) \in \mathscr{A}_2$. De plus, comme f_1 est mesurable $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A_3)) \in \mathscr{A}_1$. □

Proposition 4.8 *Soit une suite (f_n) de $\mathscr{F}(\mathscr{A}, \mathscr{B}or(\bar{\mathbb{R}}))$. Alors*
a) $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables ;
b) $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ sont mesurables ;
c) Si (f_n) converge simplement *vers une fonction f (dans $\bar{\mathbb{R}}$), alors f est mesurable.*

Dém. a) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{\sup_n f_n \leq a\} = \cap_n \{f_n \leq a\} \in \mathscr{A}$ et $\{\inf_n f_n \geq a\} = \cap_n \{f_n \geq a\} \in \mathscr{A}$.
b) D'après a), pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\sup_{k \geq n} f_k$ est mesurable, donc la fonction $\limsup_n f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$ est mesurable. De même pour $\liminf_n f_n$.
c) Si $f_n \to f$, alors $f = \limsup_n f_n$, qui est mesurable d'après b). □

On peut raffiner le résultat sur la mesurabilité de la limite d'une suite de fonctions mesurables de la manière suivante [3].

Théorème 4.9 *Soit $C := \{x \in E :$ la suite $(f_n(x))_n$ converge dans $\bar{\mathbb{R}}\}$. Alors ($C \in \mathscr{A}$ et) si $\mathscr{C}$ désigne la tribu trace de $\mathscr{A}$ sur C alors la fonction $f := \lim_n f_n : (C, \mathscr{C}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ est mesurable.*

Dém. On note $f^{\downarrow} := \liminf_n f_n$ et $f^{\uparrow} := \limsup_n f_n$. Alors C est mesurable car

$$C = {}^c\{f^{\uparrow} \neq f^{\downarrow}\} = {}^c(\cup_{r \in \mathbb{Q}} \{f^{\uparrow} > r\} \cap \{f^{\downarrow} < r\}).$$

Rappelons que la mesurabilité de C n'est pas nécessaire pour définir la tribu trace $\mathscr{C}$. Néanmoins, pour tout borélien B de $\bar{\mathbb{R}}$, $f^{-1}(B) = C \cap (f^{\uparrow})^{-1}(B) \in \mathscr{C}$. En effet, $f^{-1}(B) = \{x \in E : f^{\downarrow}(x) = f^{\uparrow}(x)$ et $f^{\uparrow}(x) \in B\}$. □

4.3 Fonctions étagées, en escalier, réglées

Définition 4.10 *Une fonction $f \in \mathscr{F}(\mathscr{A}, \mathscr{B}or(\mathbb{R}))$ est dite* étagée *si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Alors il existe une partition* finie *$(A_i, i \in I)$ de E, $\mathscr{A}$-mesurable [4], et des nombres réels $(\alpha_i, i \in I)$ tels que $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$.*

3. Ce résultat est hors de la portée stricte du cours, mais la question à laquelle il répond est tellement naturelle...
4. au sens où $A_i \in \mathscr{A}$ pour tout $i \in I$

Notation 4.11 *On note $\mathscr{E}(\mathscr{A})$ l'ensemble des fonctions étagées :* $(E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Remarque 4.12 *Il existe une représentation canonique de f sous la forme $\sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ où les α_i sont deux à deux distincts et $A_i = \{f = \alpha_i\}$. On notera qu'une fonction indicatrice est bien sûr étagée car $\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{^cA}$.*

Proposition 4.13 *Pour toutes fonctions étagées f, g et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est étagée (autrement dit $\mathscr{E}(\mathscr{A})$ est un espace vectoriel), ainsi que fg, $f \wedge g$ et $f \vee g$.*[5]

Dém. On écrit f et g sous la forme $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $g = \sum_{j \in J} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$. Alors $(A_i \cap B_j; (i,j) \in I \times J)$ est une partition finie de E et on peut écrire $\lambda f + g = \sum_{(i,j) \in I \times J} (\lambda \alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$, $fg = \alpha_i \beta_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$, etc. □

Théorème 4.14 (lemme fondamental d'approximation) *Pour toute $f \in \mathscr{F}(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}}))$, il existe une suite (f_n) de fonctions étagées convergeant simplement vers f*[6]*. De plus,*
a) si f est positive*, on peut choisir la suite (f_n) positive et croissante*[7] *;*
b) si f est bornée*, on peut choisir (f_n) de sorte que la convergence soit* uniforme[8].

Dém. Commençons par le cas où f est positive. On définit alors

$$f_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{\{(k-1)2^{-n} < f \leq k2^{-n}\}} + n \mathbb{1}_{\{f > n\}}.$$

Alors pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_n$ est bien (positive et) croissante et converge vers $f(x)$, en effet : si $f(x) = +\infty$, alors $f_n(x) = n \to \infty$; sinon il existe n_0 tel que $f(x) < n_0$, ce qui implique que pour tout $n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n} \to 0$. @

Si f est bornée et positive, alors il existe n_0 tel que pour tout $x \in E$, $f(x) < n_0$, donc pour tout $x \in E$, pour tout $n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n} \to 0$, ce qui n'est autre qu'une convergence uniforme.

Si f est de signe quelconque, on écrit f sous la forme $f = f^+ - f^-$, où

$$f^+ := f \mathbb{1}_{\{f>0\}} \qquad \text{et} \qquad f^- := -f \mathbb{1}_{\{f<0\}}.$$

La somme $f^+ - f^-$ n'est jamais indéterminée, car pour tout $x \in E$, au moins un des deux termes $f^+(x)$ ou $f^-(x)$ est nul. On notera également que f^+ (et f^-, par un même raisonnement) est mesurable car pour tout $a \geq 0$, $\{f^+ \geq a\} = \{f \geq a\}$ et pour tout $a < 0$, $\{f^+ \geq a\} = E$. À présent, comme f^+ et f^- sont positives, il existe deux suites croissantes (u_n) et (v_n) de fonctions étagées positives convergeant resp. vers f^+ et f^-. De plus, si l'on utilise la construction de ces suites proposée plus haut, on a $u_n v_n = 0$, de sorte que l'on peut toujours définir $f_n := u_n - v_n$, qui définit une suite de fonctions étagées convergeant vers $f^+ - f^- = f$.

5. $a \wedge b$ est une notation alternative pour $\min(a,b)$, et $a \vee b$ pour $\max(a,b)$
6. autrement dit (rappel...) : $\forall x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$
7. autrement dit : $\forall x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ – rien à voir avec des fonctions croissantes, ce qui n'aurait d'ailleurs pas de sens ici...
8. autrement dit (rappel...) : $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ lorsque $n \to \infty$

Si f est de signe quelconque mais bornée, f^+ et f^- sont bornées, donc on peut choisir les suites (u_n) et (v_n) pour que les convergences vers f^+ et f^- soient toutes deux uniformes. Alors la suite $(u_n - v_n)$ converge uniformément vers f. □

Définition 4.15 *Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une* subdivision finie $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ *de l'intervalle $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$.*

Remarque 4.16 *Les valeurs prises exactement en chaque point $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont sans importance.*

Remarque 4.17 *Une fonction en escalier a toujours pour espace de départ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, ce qui en fait un objet beaucoup moins général qu'une fonction étagée. D'ailleurs, une fonction en escalier est toujours un cas particulier de fonction étagée, au sens où elle est un élément de $\mathscr{E}(\mathscr{B}or([a, b]))$, car elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs et elle est mesurable, en effet : les parties de $[a, b]$ sur lesquelles f est constante sont des intervalles (les singletons sont bien sûr des intervalles) ou des réunions d'intervalles, donc des boréliens, donc l'image réciproque de toute partie de $\mathbb{R}$ est toujours un borélien de $[a, b]$.*

Le contre-exemple classique de la réciproque est $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, qui est étagée mais n'est en escalier sur aucun intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point).

Remarque 4.18 *L'intégrale de Riemann est définie par approximation à partir de l'intégrale des fonctions en escalier, tandis que celle que nous étudions dans ce cours (parfois dite de Lebesgue) est construite à partir des fonctions étagées. Dans le premier cas, on approche l'intégrale d'une fonction quelconque par celle d'une fonction en escalier, c'est-à-dire en découpant l'espace de départ (un intervalle) en petits morceaux (les subdivisions), tandis que dans le second cas, c'est l'espace d'arrivée (qui est toujours $\mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$) qui est découpé. Cette différence est fondamentale car la première approche ne peut se généraliser facilement à des fonctions ayant un autre espace de départ que $\mathbb{R}$. Mais surtout les espaces de fonctions mesurables (celles qui admettront une intégrale au sens de Lebesgue) sont beaucoup plus grands que celui des fonctions Riemann-intégrables et ils sont stables sous l'action de multiples opérations comme le passage à la limite. Enfin, nous allons définir dans ce cours l'intégrale par rapport à une mesure quelconque, et pas seulement l'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue (celle qui a ceci de commun avec l'intégrale de Riemann qu'elle donne un sens mathématique à la notion physique de volume).*

Définition 4.19 *Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite* réglée *si elle est limite* uniforme *de fonctions en escalier.*

Remarque 4.20 *Toute fonction réglée est mesurable (on dira ici borélienne car les tribus de départ et d'arrivée sont des tribus de Borel) car limite de fonctions mesurables (et même étagées) que sont les fonctions en escalier.*

Théorème 4.21 (admis) *Une fonction f est réglée ssi elle admet une limite à gauche en tout point de $]a, b]$ et une limite à droite en tout point de $[a, b[$.*

Corollaire 4.22 *Toute fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *monotone est réglée.*

Remarque 4.23 *Toute fonction monotone est borélienne, car réglée. Mais cela peut se voir directement : toute fonction monotone est borélienne car pour tout* $a \in \mathbb{R}$, $\{f \geq a\}$ *est une demie-droite, en effet : si* $m(a) := \inf\{x : f(x) \geq a\}$, *alors dans le cas où* f *est croissante par exemple,* $\{f \geq a\}$ *coïncide soit avec* $[m(a), +\infty[$, *soit avec* $]m(a), +\infty[$.

Chapitre 5

Le cas borélien

5.1 (Rappels de) Topologie

Définition 5.1 *Une famille $\mathscr{O}(E)$ de parties d'un ensemble E est appelée* topologie, *et ses éléments des* ouverts, *si*

i) elle contient $\varnothing$ et E : $\varnothing \in \mathscr{O}(E)$ et $E \in \mathscr{O}(E)$;

ii) elle est stable par intersections finies : $\forall U, V \in \mathscr{O}(E)$, $U \cap V \in \mathscr{O}(E)$;

iii) elle est stable par réunion quelconque[1] *: pour tout I ensemble d'indices et pour toute famille d'ouverts $(O_i, i \in I)$, $\cup_{i \in I} O_i$ est un ouvert.*

Les complémentaires des ouverts sont appelés des fermés.

Remarque 5.2 *Les ouverts $\varnothing$ et E sont aussi des fermés ; les fermés sont stables par réunions finies et par intersections quelconques.*

Définition 5.3 *On appelle* voisinage *de $x \in E$ toute partie $\mathcal{V}$ de E telle qu'il existe un ouvert O pour lequel $x \in O \subseteq \mathcal{V}$. Tout ouvert est donc voisinage de chacun de ses points.*

Définition 5.4 *Dans un espace* métrique *(E, d), la topologie dite relative à la distance d est constituée des réunions quelconques de parties du type*

$$B(x, r) := \{y \in E : d(x, y) < r\}$$

appelée boule ouverte *de centre x et de rayon r.*

Remarque 5.5 *Une partie O de l'espace métrique (E, d) est ouverte ssi $\forall x \in O$, $\exists r > 0$, $B(x, r) \subseteq O$ (un ouvert O d'un espace métrique est la réunion des boules ouvertes contenues dans O).*

Une partie A de l'espace métrique (E, d) est fermée ssi pour toute suite (x_n) à valeurs dans A et convergeant vers une limite x, $x \in A$.

Remarque 5.6 *La topologie de $\mathbb{R}$ relative à la distance usuelle est donc constituée des réunions quelconques d'intervalles ouverts.*

1. au sens où l'on ne fait pas d'hypothèse sur le cardinal de I

Définition 5.7 (et proposition) *Le plus grand ouvert contenu dans $A \subseteq E$, c'est-à-dire la réunion de tous les ouverts contenus dans A, est noté $\mathring{A}$ et appelé* intérieur *de A, ou ensemble des points* intérieurs *à A. En particulier, A est ouvert ssi $A = \mathring{A}$.*

Dans le cas métrique, un point $x \in E$ est intérieur à A ssi $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

Définition 5.8 (et proposition) *Le plus petit fermé contenant $A \subseteq E$, c'est-à-dire l'intersection de tous les fermés contenant A, est noté $\bar{A}$ et appelé* adhérence *de A, ou ensemble des points* adhérents *à A. En particulier, A est fermé ssi $A = \bar{A}$.*

Dans le cas métrique, un point $x \in E$ est adhérent *à A ssi il existe une suite (x_n) à valeurs dans A telle que $\lim_n x_n = x$.*

Remarque 5.9 *Pour tout $A \subseteq E$, l'intérieur de ${}^{c}A$ est le complémentaire de $\bar{A}$ et l'adhérence de ${}^{c}A$ est le complémentaire de $\mathring{A}$.*

Définition 5.10 *La* frontière *de A est le fermé $\partial A := \bar{A} \setminus \mathring{A}$.*

Définition 5.11 *Soient E et F deux espaces topologiques. Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est dite* continue *si l'image réciproque par f de tout ouvert est un ouvert (ce qui est équivalent à dire que l'image réciproque par f de tout fermé est un fermé).*

Proposition 5.12 *Soient E et F deux espaces métriques. Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est dite* continue *ssi pour toute suite (x_n) de E convergeant vers x, la suite $(f(x_n))$ est aussi convergente et $\lim_n f(x_n) = f(x)$.*

Définition 5.13 *Soit $X \subseteq E$. La* topologie trace[2] *de $\mathscr{O}(E)$ sur X est constituée des intersections des ouverts de E avec X. Dans le cas métrique, la topologie trace est la topologie relative à la restriction de la distance à $X \times X$.*

Définition 5.14 *La* topologie produit *de $E \times F$ est constituée des réunions quelconques de rectangles à côtés ouverts :*

$$\mathscr{O}(E \times F) := \{\cup_{i \in I} U_i \times V_i, U_i \in \mathscr{O}(E), V_i \in \mathscr{O}(F), I \text{ ensemble d'indices quelconque}\}.$$

Proposition 5.15 *La topologie produit est aussi la plus petite topologie qui rendent les projections canoniques π_E et π_F continues :*

$$\begin{aligned} \pi_E : E \times F &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \pi_F : E \times F &\longrightarrow F \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

2. dite aussi topologie induite

Dans le cas métrique, la topologie produit est la topologie relative à toute distance classique du type

$$\begin{aligned} d((x,y),(x',y')) &:= d_E(x,x') + d_F(y,y') \\ &\text{OU } \sqrt{d_E(x,x')^2 + d_F(y,y')^2} \\ &\text{OU } d_E(x,x') \vee d_F(y,y'). \end{aligned}$$

Définition 5.16 *On dit qu'une famille dénombrable d'ouverts $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est une* base dénombrable *d'ouverts si tout ouvert de E s'écrit comme réunion d'éléments de cette famille, autrement dit : $\forall O \in \mathscr{O}(E)$, $\exists I \subseteq \mathbb{N}$: $O = \cup_{i\in I}\omega_i$; ou de manière équivalente : $\forall O \in \mathscr{O}(E)$, $\forall x \in O$, $\exists n \in \mathbb{N}$: $x \in \omega_n \subseteq O$.*

Proposition 5.17 *Un espace métrique (E,d) est à base dénombrable d'ouverts ssi il contient une suite dense*[3]*. On dit alors que E est* séparable.

Dém. Sens $\Rightarrow$: soit (x_n) une suite de E telle que pour tout n, $x_n \in \omega_n$. Alors la suite (x_n) est dense, en effet : pour tout $x \in E$, l'ouvert $B(x,1/n)$ s'écrit comme réunion d'ouverts du type ω_i, donc $\exists i(n)$ tel que $\omega_{i(n)} \subseteq B(x,1/n)$. Soit $y_n := x_{i(n)}$, alors $d(y_n,x) \leq 1/n$, donc $y_n \to x$.

Sens $\Leftarrow$: si (x_n) est une suite dense, alors la famille $\{B(x_n,r), n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}_+^\star\}$ est une base dénombrable d'ouverts car elle s'injecte dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ (qui est dénombrable) et pour tout $O \in \mathscr{O}(E)$,

$$O = \bigcup_{n,r:B(x_n,r)\subseteq O} B(x_n,r),$$

ce qui achève la démonstration. □

Remarque 5.18 *$\mathbb{R}^d$ est séparable car $\mathbb{Q}^d$ est une suite dense. Les pavés ouverts (produits d'intervalles ouverts) à extrémités rationnelles forment une base dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}^d$.*

Définition 5.19 (Borel-Lebesgue) *Une partie A d'un espace topologique E est dite* compacte *si de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un sous-recouvrement fini, autrement dit pour toute famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E telle que $A \subseteq \cup_{i\in I}\Omega_i$, $\exists J$ fini $\subseteq I$ tel que $A \subseteq \cup_{j\in J}\Omega_j$.*

Théorème 5.20 (Bolzano-Weierstrass) *Une partie A d'un espace métrique E est compacte ssi toute suite à valeurs dans A admet au moins une valeur d'adhérence dans A*[4]*.*

Corollaire 5.21 *Tout compact est fermé. De plus, toute partie compacte d'un espace vectoriel normé*[5] *est bornée.*

3. autrement dit : il existe un ensemble dénombrable (une suite, quoi) A tel que $\bar{A} = E$ (A est alors dit dense dans E)
4. autrement dit : admet au moins une sous-suite convergente de limite $\in A$
5. un espace vectoriel normé est un espace métrique, donc topologique

Théorème 5.22 *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, un fermé est compact ssi il est borné.*

Proposition 5.23 *Un fermé contenu dans un compact est compact. L'image d'un compact par une fonction continue est compacte.*

Remarque 5.24 *On rappelle que la topologie de $\bar{\mathbb{R}}$ est la topologie relative à la distance d définie par $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ pour tous $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$, où $f(x) = x/\sqrt{x^2+1}$ et $f(\pm\infty) = \pm 1$. En particulier, $\bar{\mathbb{R}}$ est compact et $[x, +\infty]$ est un compact de $\bar{\mathbb{R}}$.*

5.2 Tribu borélienne et fonctions boréliennes

Définition 5.25 *Si E est un espace topologique, on note $\mathscr{B}or(E)$ ou $\mathscr{B}(E)$ et on appelle* tribu de Borel *ou* tribu borélienne, *la tribu engendrée par les ouverts de E, autrement dit, $\mathscr{B}(E) := \sigma(\mathscr{O}(E))$. Les éléments de $\mathscr{B}(E)$ sont appelés* parties boréliennes *de E, ou plus simplement* boréliens *de E.*

Remarque 5.26 *La tribu de Borel est aussi la tribu engendrée par la classe $\mathscr{C}$ des fermés de E, en effet : $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}(E)$ (donc $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{B}(E)$) car tout fermé est le complémentaire d'un ouvert, qui appartient à $\mathscr{B}(E)$, donc appartient aussi à $\mathscr{B}(E)$; $\mathscr{O}(E) \subseteq \sigma(\mathscr{C})$ (donc $\sigma(\mathscr{O}(E)) \subseteq \sigma(\mathscr{C})$) car tout ouvert est le complémentaire d'un fermé, qui appartient à $\sigma(\mathscr{C})$, donc appartient aussi à $\sigma(\mathscr{C})$ (même raisonnement).*

Remarque 5.27 *Il existe des parties de $\mathbb{R}$ non boréliennes (voir dernière section de ce chapitre). En revanche, si E est dénombrable, muni de la topologie discrète : toute partie est ouverte (et fermée), donc borélienne : $\mathscr{B}(E) = \mathscr{P}(E)$.*

Proposition 5.28 *Si E admet une base dénombrable d'ouverts $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\mathscr{B}or(E) = \sigma(\{\omega_n; n \in \mathbb{N}\})$.*

Dém. Par double inclusion : $\{\omega_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{O}(E) \subseteq \mathscr{B}(E)$, donc $\sigma(\{\omega_n; n \in \mathbb{N}\}) \subseteq \mathscr{B}(E)$. Dans l'autre sens, on sait que tout ouvert O s'écrit comme réunion d'éléments de $\{\omega_n; n \in \mathbb{N}\}$. Comme une telle réunion est forcément dénombrable, O est un élément de $\sigma(\{\omega_n; n \in \mathbb{N}\})$. On a donc $\mathscr{O}(E) \subseteq \sigma(\{\omega_n; n \in \mathbb{N}\})$, ce qui implique $\mathscr{B}(E) \subseteq \sigma(\{\omega_n; n \in \mathbb{N}\})$. □

Corollaire 5.29 *La tribu $\mathscr{B}or(\mathbb{R}^d)$ est la tribu engendrée par la classe des pavés ouverts*[6]*, mais est aussi la tribu engendrée par les pavés ouverts à extrémités à coordonnées dans $\mathbb{Q}$ ou dans toute autre partie dense de $\mathbb{R}$.*

Proposition 5.30 *La tribu trace de $\mathscr{B}or(E)$ sur une partie X de E est la tribu engendrée par la topologie trace de X.*

6. pavé = produit d'intervalles ; pavé ouvert = produit d'intervalles ouverts

Dém. Soit $i : X \to E$ l'injection canonique. La tribu trace est $i^{-1}(\mathscr{B}(E)) = i^{-1}(\sigma(\mathscr{O}(E)) = \sigma(i^{-1}(\mathscr{O}(E))$, par le lemme de transport. Mais $i^{-1}(\mathscr{O}(E)$ n'est autre que la topologie trace, c'est-à-dire $\{A \cap X, A \in \mathscr{O}(E)\}$. □

Définition 5.31 (terminologie) *Si E_1 et E_2 sont des espaces topologiques, en notant $\mathscr{A}_i := \mathscr{B}or(E_i)$, les éléments de $\mathscr{F}(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ sont appelés* fonctions boréliennes.

Proposition 5.32 *Soit $f : (E, \mathscr{A}) \to (F, \mathscr{B})$. Si F est topologique et $\mathscr{B} = \mathscr{B}or(F)$, alors f est mesurable ssi pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(O) \in \mathscr{A}$.*

Dém. Lemme de transport : $f^{-1}(\sigma(\mathscr{O}(F))) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{O}(F)))$, or f est mesurable ssi $f^{-1}(\mathscr{B}(F)) \subseteq \mathscr{A}$, donc ssi $\sigma(f^{-1}(\mathscr{O}(F))) \subseteq \mathscr{A}$, c'est-à-dire ssi $f^{-1}(\mathscr{O}(F)) \subseteq \mathscr{A}$. □

Corollaire 5.33 *Si E et F sont topologiques, alors toute fonction continue est borélienne.*

Proposition 5.34 *Soit*

$$\begin{aligned} f : (E, \mathscr{A}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)) \\ x &\longmapsto (f_1(x), f_2(x)) \end{aligned}$$

Alors f est mesurable ssi $f_i \in \mathscr{F}(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ pour tout $i = 1, 2$.

Remarque 5.35 *Si $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$, une fonction complexe f est mesurable ssi $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont.*

Dém. Sens $\Rightarrow$: pour tout $i = 1, 2$, la projection canonique $\pi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue par définition de la topologie produit, donc borélienne, ainsi comme f est mesurable, $f_i = \pi_i \circ f$ est mesurable.

Sens $\Leftarrow$: on sait que $\mathscr{B}or(\mathbb{R}^2)$ est engendrée (par exemple) par les pavés ouverts. Donc par le lemme de transport, f est mesurable ssi pour tous intervalles ouverts U et V, $f^{-1}(U \times V) \in \mathscr{A}$. Or $f^{-1}(U \times V) = \{f_1 \in U\} \cap \{f_2 \in V\}$. Mais par hypothèse $\{f_1 \in U\} \in \mathscr{A}$ et $\{f_2 \in V\} \in \mathscr{A}$, donc leur intersection est aussi dans $\mathscr{A}$. □

Applications. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{F}(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est mesurable (autrement dit, $\mathscr{F}(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est un espace vectoriel), ainsi que les fonctions suivantes : fg, $f \wedge g$, $f \vee g$, f^+, f^-, $|f|$, $|f|^p$,... Il suffit pour le voir d'utiliser la continuité des applications qui à (x, y) associent $\lambda x + y$, xy, $x \wedge y$, etc. ainsi que le fait que la composée de deux applications mesurables est mesurable.

5.3 L'ensemble triadique de Cantor

L'ensemble triadique de Cantor est un sous-ensemble de l'intervalle $[0, 1]$. C'est un exemple de partie de $\mathbb{R}$ qui ne contient aucun point isolé mais ne contient pas non plus d'intervalle ouvert. Il est défini comme la limite d'une suite décroissante de réunions finies d'intervalles fermés, ce qui en fait un fermé (comme intersection de fermés). Plus précisément, soit A_0 l'intervalle $[0,1]$, A_1 la réunion de l'intervalle $[0,1/3]$ et de l'intervalle $[2/3,1]$, et plus généralement A_{n+1} la partie de A_n obtenue en divisant chaque composante connexe de A_n en trois sous-intervalles de tailles égales et en lui en ôtant le sous-intervalle central. Plus rigoureusement, $A_{n+1} := \frac{1}{3}A_n \cup \frac{1}{3}(2+A_n)$.

Définition 5.36 *Le fermé $K := \lim_n \downarrow A_n$ est appelé* ensemble triadique de Cantor.

Dans la proposition suivante, on appelle (provisoirement sans précautions mathématiques) « mesure de Lebesgue » d'une partie de $\mathbb{R}$, sa longueur totale. L'objet ultérieur de ce cours sera en partie de donner une définition rigoureuse de ce concept...

Proposition 5.37 *L'ensemble triadique de Cantor peut s'écrire sous la forme*

$$K = \left\{ \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{3^n}, x_n \in \{0,2\} \right\}.$$

Il est compact, d'intérieur vide, équipotent à $\mathbb{R}$, de mesure de Lebesgue nulle.

Remarque 5.38 *Tout ensemble dénombrable est de mesure de Lebesgue nulle, comme réunion* dénombrable *d'ensembles de mesure nulle (les singletons le constituant). On voit ici que la réciproque est fausse : K est un exemple d'ensemble de mesure de Lebesgue nulle mais non dénombrable.*

Dém. K est fermé borné dans $\mathbb{R}$ donc compact. Par une récurrence immédiate, on voit @
que les composantes connexes de A_n qui sont des intervalles fermés de longueur 3^{-n} dont les extrémités sont les nombres réels de la forme $\sum_{k=1}^n \frac{x_k^{(n)}}{3^n} + \frac{\varepsilon_n}{3^n}$, où $x_k^{(n)} \in \{0,2\}$ et $\varepsilon_n \in \{0,1\}$: pour chaque intervalle, $\varepsilon_n = 0$ correspond à l'extrémité gauche, et $\varepsilon_n = 1$ correspond à l'extrémité droite. Montrons l'égalité annoncée par double inclusion :

$\supseteq$: pour toute suite (x_k) à valeurs dans $\{0,2\}$, pour tout entier n, $\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^n} \in A_n \subseteq K$, donc comme K est fermé, la limite $\sum_{k=1}^\infty \frac{x_k}{3^n} \in K$.

$\subseteq$: soit $x \in K$ et soit $x^{(n)}$ l'extrémité gauche de la composante connexe de A_n qui contient x. En particulier $|x^{(n)} - x| \leq 3^{-n}$. Cherchons une relation entre $x^{(n)}$ et $x^{(n+1)}$. Lorsqu'on passe de A_n à A_{n+1}, soit x est dans le sous-intervalle de gauche, auquel cas $x^{(n+1)} = x^{(n)}$, soit x est dans le sous-intervalle de droite, auquel cas $x^{(n+1)} = x^{(n)} + \frac{2}{3^{n+1}}$. On peut donc écrire $x^{(n+1)} = x^{(n)} + \frac{x_{n+1}}{3^{n+1}}$, où $x_{n+1} \in \{0,2\}$, et comme $x^{(0)} = 0$, cela donne $x^{(n)} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^k}$, qui converge en croissant vers $y := \sum_{k=1}^\infty \frac{x_k}{3^k}$. Or $|x^{(n)} - x| \leq 3^{-n}$ donc la suite $(x^{(n)})$ converge vers x, ce qui implique $y = x$.

Montrons que $\mathring{K} = \varnothing$. Soit $x \in K$ et $\varepsilon > 0$. La boule $B(x,\varepsilon)$ intersecte ${}^c\!A_n$ pour tout n dès que $3^{-n} < \varepsilon$. Donc $B(x,\varepsilon)$ intersecte $\cup_n {}^c\!A_n$, qui n'est autre que le complémentaire de $\cap_n A_n = K$. Ainsi, K ne contient aucune boule ouverte centrée sur x, c'est-à-dire que x n'est pas intérieur à K.

Montrons que K a la puissance du continu. L'application

$$\begin{aligned} f : \{0,2\}^{\mathbb{N}^\star} &\longrightarrow K \\ (x_n) &\longmapsto \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{3^n} \end{aligned}$$

est une injection donc $\mathrm{Card}(K) \geq \mathrm{Card}(\{0,2\}^{\mathbb{N}^\star}) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$. D'autre part $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) \leq$ @
$\mathrm{Card}(K)$ puisque $K \subseteq \mathbb{R}$.

Enfin K est de mesure de Lebesgue nulle car $K = \lim_n \downarrow A_n$ donc[7] $\lambda(K) = \lim_n \downarrow \lambda(A_n) = \lim_n \downarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. □

5.4 Une partie de $\mathbb{R}$ non borélienne

Les tribus sont des familles de parties qui sont destinées à être mesurées. Pour pouvoir mesurer des parties suffisamment compliquées comme celles qui ne peuvent être définies que par des passages à la limite (comme l'ensemble triadique de Cantor), les tribus doivent être assez fines pour être stables par des opérations relativement générales comme le passage au complémentaire, les réunions et intersections dénombrables. Néanmoins, elles ne doivent pas être si fines qu'elles contiennent des parties non mesurables, comme l'exemple qui va suivre.

On définit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

En se servant de l'axiome du choix, on peut supposer l'existence d'une partie A de $]0,1[$ *qui contient exactement un représentant et un seul de chaque classe d'équivalence de la relation* $\sim$. En particulier, A n'est pas dénombrable, mais surtout nous allons montrer que A *ne peut admettre de mesure de Lebesgue.* Cette assertion implique (mais est plus forte que) l'assertion suivante : A n'est pas borélienne. En effet, nous verrons (plus tard) que tout borélien admet une mesure de Lebesgue.

Montrons par l'absurde que A ne peut admettre de mesure de Lebesgue : soit $\lambda(A) \in [0,+\infty]$ la mesure de A (nous verrons que λ est la notation usuelle de la mesure de Lebesgue). Soit

$$L := \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap]-1,1[} (r + A),$$

où $r + A = \{r + x, x \in A\}$. Comme A admet une mesure, alors chaque partie $r + A$ en admet une aussi, qui vaut d'ailleurs $\lambda(A)$ par invariance par translation de la mesure de Lebesgue. Comme L est réunion dénombrable de parties admettant une mesure, ce doit être également son cas.

Montrons que $]0,1[\subseteq L$. Pour tout $x \in]0,1[$, désignons par $a = a(x)$ le représentant de sa classe d'équivalence contenu dans A. Alors en particulier, $x - a \in \mathbb{Q}$, et $x - a \in]-1,1[$,

7. Propriété de continuité de la mesure pour les suites décroissantes dont un élément est de mesure finie, ce que nous verrons bientôt...

donc $r := x - a \in \mathbb{Q}\cap]-1,1[$, et comme $x \in r + A$, $x \in L$. On a aussi $L \subseteq]-1,2[$, donc on en déduit
$$1 \leq \lambda(L) \leq 3.$$
Montrons que les parties $r + A$ $(r \in \mathbb{Q})$ sont deux à deux disjointes. Soient $r, s \in \mathbb{Q}$. Si $(r + A) \cap (s + A) \neq \varnothing$, alors il existe $a, b \in A$ tels que $z = r + a = s + b$, donc $b - a = r - s \in \mathbb{Q}$. Par conséquent $a \sim b$, mais comme $a, b \in A$ qui ne contient qu'un représentant de chaque classe d'équivalence, $a = b$, donc $r = s$.

Par σ-additivité, nous en déduisons
$$\lambda(L) = \lambda(\cup_r (r + A)) = \sum_r \lambda(r + A) = \sum_r \lambda(A).$$
Cette somme ne peut être qu'infinie (si $\lambda(A) \neq 0$) ou nulle (si $\lambda(A) = 0$), ce qui contredit l'inégalité $1 \leq \lambda(L) \leq 3$. $\square$

Chapitre 6

Mesures

6.1 Définitions et propriétés

Définition 6.1 *Une mesure*[1] *sur l'espace mesurable* $(E, \mathscr{A})$ *est une application* $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ *qui :*

(i) associe la valeur 0 à l'ensemble vide : $\mu(\varnothing) = 0$ *;*

(ii) est σ-additive *: pour toute suite* (A_n) *d'éléments de* $\mathscr{A}$ *deux à deux disjoints,*

$$\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n).$$

On dit que $(E, \mathscr{A}, \mu)$ *est un* espace mesuré, *et pour tout* $A \in \mathscr{A}$, *on appelle* $\mu(A)$ *la mesure de* A.

Remarque 6.2 *On a besoin de la* σ*-additivité pour pouvoir calculer la mesure de parties compliquées construites comme limites d'ensembles plus simples que l'on sait mesurer.*

Remarque 6.3 *Dans l'égalité* $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$, *on remarque que l'ordre de sommation (membre de droite) n'intervient pas car la série est à termes positifs, ce qui est cohérent avec le membre de gauche.*

On remarquera également que la σ*-additivité implique l'additivité finie grâce à (i) : si l'on définit* $A_i = \varnothing$ *pour tout* $i \geq n+1$, *alors* $\mu(\cup_{i=1}^n A_i) = \mu(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i \geq 1} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.

Proposition 6.4 *Une mesure* μ *sur un* $(E, \mathscr{A})$ *vérifie pour tous* $A, B \in \mathscr{A}$ *:*

(i) $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$ *;*

(ii) Additivité forte : $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ *;*

(iii) Sous-additivité : $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ *;*

(iv) Croissance : si $A \subseteq B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Remarque 6.5 *En (ii), prendre garde de ne pas écrire* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, *qui pourrait être une forme indéterminée, si* $\mu(A \cap B) = +\infty$.

---

1. Il est sous-entendu que nous ne considérons dans ce cours que des mesures *positives*

Dém. (i) $A \setminus B$ et $A \cap B$ sont disjoints et leur réunion est A.

(ii) $A \setminus B$, $A \cap B$ et $B \setminus A$ sont disjoints et leur réunion est $A \cup B$, donc

$$\mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cup B),$$

donc en ajoutant $\mu(A \cap B)$ à chaque membre on obtient

$$\mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B),$$

mais dans le premier membre, grâce à (i), la somme des deux premiers termes vaut $\mu(A)$ et la somme des deux derniers termes vaut $\mu(B)$.

(iii) Si $\mu(A) + \mu(B) = +\infty$, l'assertion est évidente, tandis que dans le cas contraire, grâce à (ii), $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) < \infty$, donc en particulier $\mu(A \cap B) < \infty$. Par conséquent on peut retrancher $\mu(A \cap B)$ à l'égalité (ii), ce qui donne

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

(iv) D'après (ii) si $A \subseteq B$, alors

$$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A),$$

qui est l'inégalité souhaitée. □

Proposition 6.6 *Une application $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ est une mesure ssi :*

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) μ est finiment additive *: pour tous éléments A_i $(i \in I)$ deux à deux disjoints de la tribu $\mathscr{A}$, si I est fini, alors $\mu(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$.*

(iii) μ est continue à gauche[2] *: pour toute suite* croissante *$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$,*

$$\mu(\lim_n \uparrow A_n) = \lim_n \uparrow \mu(A_n).$$

Remarque 6.7 *On se rappellera qu'ici, la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, $\lim_n \uparrow A_n$ n'est autre que $\cup_n A_n$.*

Dém. Montrons d'abord le sens $\Rightarrow$ et supposons donc que μ est une mesure. On a déjà vu que (i) et (ii) sont vraies. Montrons la continuité à gauche. Soit (A_n) une suite croissante de parties mesurables et soient $B_0 := A_0$, et pour tout entier naturel non nul n, $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$. Alors les (B_n) sont des éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux disjoints, donc

$$\mu(\cup_n B_n) = \sum_n \mu(B_n).$$

Mais d'une part, $\cup_n B_n = \cup_n A_n = \lim_n \uparrow A_n$ et d'autre part,

$$\sum_n \mu(B_n) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \lim_n \mu(\cup_{k=0}^{n} B_k) = \lim_n \mu(A_n).$$

2. il s'agit d'une expression figurée qui signifie 'continue pour les suites croissantes' et est utilisée par analogie avec les fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour qui ces deux expressions sont synonymes

Montrons maintenant $\Leftarrow$. Soit donc μ vérifiant les trois propriétés de la proposition. Il nous suffit de montrer que μ est bien σ-additive. Soient (A_n) mesurables et deux à deux disjointes. Soit $B_n := \cup_{k=0}^n A_k$, alors (B_n) est une suite croissante donc $\mu(\cup_n B_n) = \lim_n \mu(B_n)$. Mais d'une part $\mu(\cup_n B_n) = \mu(\cup_n \cup_{k=0}^n A_k) = \mu(\cup_n A_n)$, et d'autre part, comme μ est finiment additive, $\mu(B_n) = \mu(\cup_{k=0}^n A_k) = \sum_{k=0}^n \mu(A_k)$. Ainsi

$$\mu(\cup_n A_n) = \mu(\cup_n B_n) = \lim_n \mu(B_n) = \lim_n \sum_{k=0}^n \mu(A_k) = \sum_n \mu(A_n),$$

ce qui montre la σ-additivité de μ. □

Corollaire 6.8 *Toute mesure μ est* sous σ-additive*, au sens où pour toute suite (A_n) d'éléments de $\mathscr{A}$, $\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.*

Dém. Soit $B_n := \cup_{k=0}^n A_k$. Par sous-additivité, $\mu(B_n) \leq \sum_{k=0}^n \mu(A_k)$. Mais comme la suite (B_n) croît et converge vers $\cup_n A_n$, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\mu(\cup_n A_n) = \mu(\cup_n B_n) = \lim_n \mu(B_n) \leq \lim_n \sum_{k=0}^n \mu(A_k) = \sum_n \mu(A_n),$$

où la deuxième égalité est due à la continuité à gauche des mesures. □

Exemple 6.9 *Quelques exemples de mesures :*

- *la* mesure nulle *est définie sur $\mathscr{P}(E)$ (et donc sur toute autre tribu) par $\mu(A) := 0$ pour tout $A \subseteq E$;*
- *la* mesure grossière *sur $\mathscr{P}(E)$: $\mu(A) := +\infty$ dès que $A \neq \varnothing$ (et $\mu(\varnothing) = 0$) ;*
- *pour tout $a \in E$, la* mesure de Dirac *au point a est définie pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$ par*

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & si\ a \in A \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

  Cette mesure est souvent notée δ_a ;
- *la* mesure de comptage *sur $\mathscr{P}(E)$:*

$$\mu(A) := \begin{cases} Card(A) & si\ A\ est\ fini \\ +\infty & sinon, \end{cases}$$

  où $Card(A)$ désigne ici le nombre d'éléments de l'ensemble A.
- *soit un espace mesuré $(E, \mathscr{A}, \mu)$ et X une partie de E.* ***SI*** *$X \in \mathscr{A}$, alors on peut définir la* mesure trace *μ_X de μ sur X par $\mu_X(A) := \mu(A \cap X)$ pour tout $A \in \mathscr{A}$.*

Exercice 6.10 *Démontrer que la mesure de comptage est bien une mesure en prouvant qu'elle vérifie les trois propriétés de la Proposition 6.6 : elle prend la valeur 0 en $\varnothing$, elle est finiment additive et elle est continue à gauche.*

6.2 Mesure de Lebesgue

La *mesure de Lebesgue* est une mesure définie sur la tribu de Borel de $\mathbb{R}^d$. Elle donne un sens mathématique à la notion physique de volume (de surface si $d = 2$, de longueur si $d = 1$). Rappelons que cette mesure n'est pas définie sur tout $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$, ce que nous avons démontré au chapitre précédent dans le cas $d = 1$ à l'aide de l'axiome du choix.

Théorème 6.11 *Il existe une unique mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ telle que la mesure de tout pavé $\prod_{i=1}^d]a_i, b_i[$ soit égale au produit $\prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$. Cette mesure est appelée* mesure de Lebesgue *et est ordinairement notée λ_d, voire λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension.*

Remarque 6.12 *Montrer qu'il existe une unique mesure qui vérifie certaines propriétés se dit « construire une mesure ». Le théorème dont on se sert pour montrer l'unicité s'appelle* théorème de la classe monotone*, et celui dont on se sert pour l'existence s'appelle* théorème de Caratheodory*. Nous énoncerons ces théorèmes au second semestre (Intégration II) et démontrerons même le premier. Pour le moment le théorème qui précède reste admis.*

Exercice 6.13 *Montrer que si A est un borélien de $\mathbb{R}^d$ alors tous les translatés de A sont des boréliens (se servir du fait qu'une translation est une application bijective et continue).*

Proposition 6.14 *Soit μ une mesure sur $\mathscr{B}or(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

(i) invariance par translation : pour tout borélien A et toute translation f, $\mu(f(A)) = \mu(A)$;

(ii) le pavé unité est de mesure 1 : $\mu\left([0,1]^d\right) = 1$.

Alors μ est la mesure de Lebesgue.

Dém. Nous ne détaillons ici que le cas $d = 1$. Le cas général est laissé au lecteur. @

a) Nous montrons d'abord par l'absurde que μ est nulle sur les singletons. S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mu(\{x\}) = \varepsilon > 0$, alors par invariance par translation, $\mu(\{y\}) = \varepsilon$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $\mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = \sum_{y \in \mathbb{Q}\cap[0,1]} \varepsilon = +\infty$, ce qui constitue une contradiction puisque $\mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leq \mu([0,1]) = 1$.

b) D'après ce qui précède, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$1 = \mu([0,1]) = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(\left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(\left]0, \frac{1}{n}\right[\right) = n\mu\left(\left]0, \frac{1}{n}\right[\right),$$

d'où $\mu(]0, 1/n[) = 1/n$. De plus, pour tous entiers $k_1 \leq k_2$,

$$\mu\left(\left]\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right[\right) = \sum_{j=k_1+1}^{k_2} \mu\left(\left]\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right[\right) = \sum_{j=k_1+1}^{k_2} \mu\left(\left]0, \frac{1}{n}\right[\right) = \frac{k_2 - k_1}{n}.$$

c) Soient $r < r'$ deux rationnels, que l'on peut écrire sous la forme $r = p/q$ et $r' = p'/q'$, où p, p', q, q' sont des entiers. Alors d'après ce qui précède,

$$\mu\left(]r, r'[\right) = \mu\left(\left]\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\right[\right) = \mu\left(\left]\frac{pq'}{qq'}, \frac{p'q}{qq'}\right[\right) = \frac{p'q - pq'}{qq'} = r' - r.$$

d) Passons maintenant à la limite sur les rationnels. Soient $a < b$ deux nombres réels. Alors il existe une suite décroissante (a_n) et une suite croissante (b_n), toutes deux constituées de nombres rationnels, dont les limites sont resp. a et b. Alors la suite d'intervalles $(]a_n, b_n[)$ est une suite croissante qui converge vers $]a, b[$, donc par continuité à gauche des mesures,

$$\mu(]a, b[) = \mu(\lim_n \uparrow]a_n, b_n[) = \lim_n \uparrow \mu(]a_n, b_n[) = \lim_n \uparrow (b_n - a_n) = b - a,$$

ce qui montre que la mesure de tout intervalle est sa longueur, et garantit ainsi que μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. □

6.3 Autres définitions et autres propriétés

Définition 6.15 *Une mesure μ sur un espace mesurable $(E, \mathscr{A})$:*
- *est dite* finie, *ou* bornée, *si $\mu(E) < \infty$ (ce qui équivaut à : $\mu(A) < \infty$ pour tout $A \in \mathscr{A}$). Le nombre réel $\mu(E)$ est alors appelé* masse totale *de μ ;*
- *est appelée (mesure de)* probabilité *si sa masse totale vaut 1 ;*
- *est dite* σ-finie *s'il existe une suite (E_n) de parties mesurables de E telles que $\mu(E_n) < \infty$ et $\cup_n E_n = E$;*
- *est appelée* mesure de Borel[3] *si E est topologique, localement compact[4] et séparable[5], que $\mathscr{A}$ est la tribu borélienne de E et que μ est finie sur les compacts : $\mu(K) < \infty$ pour tout compact K de E[6].*

Remarque 6.16 *Si μ est une mesure de Borel alors elle est σ-finie car E étant localement compact et séparable, il peut s'écrire comme réunion dénombrable de compacts (on dit qu'il est σ-compact) : $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ où tous les E_n sont compacts donc vérifient $\mu(E_n) < \infty$.*

En revanche la réciproque est fausse. Soit μ la mesure sur $\mathbb{R}$ définie par $\mu = \sum_n \alpha_n \delta_{x_n}$ (voir Corollaire 6.21) où $\sum_n \alpha_n = \infty$ et (x_n) est une suite de réels deux à deux distincts et de limite x finie. Alors μ est une mesure σ-finie (prendre $E_n = \mathbb{R} \setminus \{x_k; k \geq n\}$) mais elle n'est pas de Borel car tout voisinage compact de x est de mesure infinie.

Proposition 6.17 (Continuité pour les suites décroissantes de mesure finie) *Si (A_n) est une suite décroissante de $\mathscr{A}$ telle que $\mu(A_n) < \infty$ à partir d'un certain rang,*

3. ou parfois *mesure de Radon*. En fait, le terme « mesure de Radon » fait référence à une forme linéaire positive sur un espace de fonction continues à support compact. Le théorème de représentation de Riesz assure que toute mesure de Radon est en fait une intégrale par rapport à une mesure de Borel
4. autrement dit : pour tout point $x \in E$, il existe un ouvert contenant x et inclus dans un compact de E
5. rappel : admettant une suite dense
6. rappel : un compact est fermé donc borélien

alors

$$\lim_n \downarrow \mu(A_n) = \mu(\lim_n \downarrow A_n),$$

qui n'est autre que $\mu(\cap_n A_n)$.

Remarque 6.18 *Un corollaire immédiat de la proposition précédente est que* les mesures finies sont continues à droite. *La mesure de Lebesgue est un exemple de mesure non continue à droite : si* $A_n := [n, +\infty[$, *alors* (A_n) *est une suite décroissante de limite* $\varnothing$, *mais comme* $(\lambda(A_n))$ *est identiquement égale à* $+\infty$, *elle converge vers* $+\infty$, *et non pas vers* $\lambda(\varnothing) = 0$.

Dém. Par hypothèse, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mu(A_n) < \infty$. Soit alors $B_n := A_{n_0} \setminus A_n$. La suite (B_n) est croissante et converge vers $A_{n_0} \setminus \cap_n A_n$, donc

$$\mu(A_{n_0}) - \mu(\cap_n A_n) = \mu(\lim_n \uparrow B_n) = \lim_n \uparrow \mu(B_n) = \lim_n \uparrow (\mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)) = \mu(A_{n_0}) - \lim_n \downarrow \mu(A_n),$$

ce qui donne bien $\mu(\cap_n A_n) = \lim_n \downarrow \mu(A_n)$. □

Proposition 6.19 *Pour toute suite* (A_n) *d'éléments de la tribu* $\mathscr{A}$, *si* μ *est une mesure finie (ou s'il existe* B *de mesure finie tel que* $A_n \subseteq B$ *à partir d'un certain rang), alors*

$$\mu\left(\liminf_n A_n\right) \leq \liminf_n \mu(A_n) \leq \limsup_n \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_n A_n\right).$$

La première inégalité reste valable sans les hypothèses qui précèdent.

Dém. Soit $B_n := \cap_{k \geq n} A_k$. Alors (B_n) est une suite croissante qui converge vers $\liminf_n A_n$, donc $\mu(\liminf_n A_n) = \lim_n \uparrow \mu(B_n)$. Or $B_n \subseteq A_n$ donc $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ et par conséquent $\lim_n \mu(B_n) = \liminf_n \mu(B_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$, ce qui assure la première inégalité.

Concernant les limites supérieures, supposons que μ est finie (mais sous l'hypothèse plus faible de l'énoncé, la démonstration est la même). Alors @

$$\begin{aligned}\mu\left(\limsup_n A_n\right) &= \mu(E) - \mu\left(\liminf_n {}^{c}A_n\right) \geq \mu(E) - \liminf_n \mu({}^{c}A_n) \\ &= \mu(E) - \liminf_n(\mu(E) - \mu(A_n)) = \limsup_n \mu(A_n),\end{aligned}$$

où l'inégalité est due à la conclusion précédente. □

Terminons ce chapitre par la

Proposition 6.20 *a) Si* (μ_n) *est une suite croissante de mesures, au sens où pour tout* $A \in \mathscr{A}$, $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$, *alors l'égalité* $\mu(A) := \lim_n \uparrow \mu_n(A) \in [0, +\infty]$ *définit une mesure* μ *sur* $\mathscr{A}$.

b) Tout combinaison linéaire dénombrable, à coefficients positifs, de mesures, est une mesure.

Dém. Pour b), il suffit de montrer qu'une combinaison linéaire finie, à coefficients positifs, de mesures, soit $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mu_k$, est toujours une mesure, car alors a) impliquera b). En effet, une combinaison linéaire à coefficients positifs dénombrable est simplement la limite croissante d'une suite de sommes partielles. La démonstration se fait (par exemple) sur le même modèle que celle qui suit. @

Démontrons a) grâce à la Proposition 6.6.

(i) comme $\mu_n(\varnothing) = 0$, $\mu(\varnothing) = \lim_n \mu_n(\varnothing) = 0$.

(ii) pour tout ensemble d'indices fini I, pour toutes parties mesurables $(A_i)_{i\in I}$ deux à deux disjointes, l'additivité finie de chaque μ_n s'écrit

$$\mu_n\left(\cup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu_n(A_i).$$

L'additivité finie de μ s'obtient en faisant tendre $n \to \infty$ dans chaque membre (car le membre de droite est une somme finie).

(iii) soit maintenant une suite croissante (A_k) d'éléments de la tribu $\mathscr{A}$. La suite doublement indicée $(\mu_n(A_k))$ est croissante en k ET en n, ce qui garantit que l'on peut intervertir les limites en n et en k, d'où : @

$$\mu\left(\lim_k \uparrow A_k\right) = \lim_n \uparrow \mu_n\left(\lim_k \uparrow A_k\right) = \lim_n \uparrow \lim_k \uparrow \mu_n(A_k) = \lim_k \uparrow \lim_n \uparrow \mu_n(A_k) = \lim_k \uparrow \mu(A_k),$$

où la deuxième égalité est due à la continuité à gauche de chaque mesure μ_n. □

Corollaire 6.21 *Pour toute suite (x_n) d'éléments d'un ensemble E, pour toute suite (α_n) de nombre réels positifs, $\sum_n \alpha_n \delta_{x_n}$ est une mesure sur $\mathscr{P}(E)$.*

Remarque 6.22 *Le résultat précédent montre que l'on peut définir sur n'importe quel espace des mesures qui sont un peu moins élémentaires que les exemples généraux donnés dans la première section.*

Chapitre 7

Intégrale par rapport à une mesure des fonctions mesurables positives

7.1 Intégrale des fonctions étagées positives

Notation 7.1 *Pour tout espace mesurable $(E, \mathscr{A})$, on notera $\mathscr{E}_+(\mathscr{A})$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{E}(\mathscr{A})$ (fonctions étagées) à valeurs* positives*.*

Définition 7.2 *Pour toute fonction $f \in \mathscr{E}_+(\mathscr{A})$, on appelle intégrale de f par rapport à une mesure μ sur $(E, \mathscr{A})$, et l'on note $\int_E f d\mu$ l'élément de $[0, +\infty]$*

$$\int_E f \, d\mu := \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}),$$

avec la convention habituelle $0 \times \infty = 0$.

Remarque 7.3 *La définition précédente ne dépend (heureusement) pas de la représen-* @
tation de f sous la forme $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, car on a toujours l'égalité

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i).$$

Notation 7.4 *On notera indifféremment l'intégrale de f par rapport à la mesure μ sous une des formes suivantes*

$$\int_E f \, d\mu, \qquad \int_E f(x) \, d\mu(x), \qquad \int_E f(x) \, \mu(dx),$$

voire en omettant l'indice E du signe intégral.

Proposition 7.5 *Pour tout $f \in \mathscr{E}_+(\mathscr{A})$,*

$$\int_E f \, d\mu < \infty \Leftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) < \infty.$$

Dém. Soit $f = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} \alpha_i \mu(A_i) < \infty &\iff \forall i \in I \quad (\alpha_i \neq 0 \Rightarrow \mu(A_i) < \infty)\\ &\iff \sum_{i\in I:\alpha_i\neq 0} \mu(A_i) < \infty\\ &\iff \mu\left(\bigcup_{i\in I:\alpha_i\neq 0} A_i\right) < \infty,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration, car $\bigcup_{i\in I:\alpha_i\neq 0} A_i = \{f \neq 0\}$. □

Exemple 7.6 *Si f est nulle alors $\int_E f\,d\mu = 0$.*

Si $\mu = \delta_a$, alors

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{\alpha\in f(E)} \alpha\mu(\{f = \alpha\}) = f(a).$$

Si μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\,d\lambda = \lambda(\mathbb{Q}) = 0.$$

Proposition 7.7 *L'application $f \mapsto \int_E f\,d\mu$ du cône $\mathscr{E}_+(\mathscr{A})$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ jouit des propriétés suivantes :*

(i) additivité : $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$;

(ii) positive homogénéité : pour tout réel positif a, $\int (af)\,d\mu = a\int f\,d\mu$;

(iii) croissance : pour tous $f, g \in \mathscr{E}_+(\mathscr{A})$, $f \leq g \Rightarrow \int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.

Dém. Soient $f = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $g = \sum_{j\in J} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$, où les α_i, β_j sont des réels positifs ou nuls, et $(A_i)_{i\in I}$, $(B_j)_{j\in J}$ sont des partitions finies de E.

(i) Remarquons que $(A_i \cap B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une partition finie de E et que

$$f + g = \sum_{(i,j)\in I\times J} (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i\cap B_j}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_E (f+g)\,d\mu &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j)\mu(A_i \cap B_j)\\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} \beta_j \mu(A_i \cap B_j)\\ &= \sum_{i\in I} \alpha_i \sum_{j\in J} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j\in J} \beta_j \sum_{i\in I} \mu(A_i \cap B_j)\\ &= \sum_{i\in I} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j\in J} \beta_j \mu(B_j)\\ &= \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.\end{aligned}$$

(ii) Pour tout $a \geq 0$, $af = \sum_{i \in I} a\alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, d'où

$$\int_E (af)\, d\mu = \sum_{i \in I} a\alpha_i \mu(A_i) = a \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i) = a \int_E f\, d\mu.$$

(iii) En écrivant $g = f + (g - f)$, où $g - f$ est étagée positive, d'après (i), $\int g\, d\mu = \int f\, d\mu + \int (g-f)\, d\mu$, donc $\int g\, d\mu \geq \int f\, d\mu$. □

7.2 Intégrale des fonctions mesurables positives

Notation 7.8 *Pour tout espace mesurable $(E, \mathscr{A})$, on notera $\mathscr{F}_+(\mathscr{A})$ l'ensemble des élémnets de $\mathscr{F}(\mathscr{A}, \mathscr{B}or(\bar{\mathbb{R}}))$ (fonctions mesurables à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$) à valeurs* positives.

Définition 7.9 *Pour tout $f \in \mathscr{F}_+(\mathscr{A})$, on appelle intégrale de f par rapport à μ, et l'on note*[1] *$\int_E f\, d\mu$ l'élément de $[0, +\infty]$*

$$\int_E f\, d\mu := \sup \left\{ \int_E g\, d\mu : g \in \mathscr{E}_+(\mathscr{A}), g \leq f \right\}.$$

Si $\int_E f\, d\mu < \infty$, on dira que f est intégrable.

Proposition 7.10 (croissance de l'intégrale) *Pour toutes $f, g \in \mathscr{F}_+(\mathscr{A})$, si $f \leq g$, alors $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$.*

Dém. Si $\varphi \in \mathscr{E}_+(\mathscr{A})$ est telle que $\varphi \leq f$ alors $\varphi \leq g$ donc

$$\sup \left\{ \int_E \varphi\, d\mu : \varphi \in \mathscr{E}_+(\mathscr{A}), \varphi \leq f \right\} \leq \sup \left\{ \int_E \varphi\, d\mu : \varphi \in \mathscr{E}_+(\mathscr{A}), \varphi \leq g \right\}$$

ce qui est l'inégalité recherchée. □

Théorème 7.11 (Théorème de Beppo Levi, ou de convergence monotone) *Si (f_n) est une suite* croissante *de $\mathscr{F}_+(\mathscr{A})$, alors nous savons que $f := \lim_n \uparrow f_n \in \mathscr{F}_+(\mathscr{A})$, mais surtout*

$$\int_E f\, d\mu = \lim_n \uparrow \int_E f_n\, d\mu.$$

Corollaire 7.12 *L'intégrale $\int_E f\, d\mu$ est la limite des intégrales $\int_E f_n\, d\mu$, où (f_n) est une suite* arbitraire *de fonctions étagées positives croissant vers f.*

Remarque 7.13 *Le corollaire précédent assure qu'on aurait pu* définir *$\int_E f\, d\mu$ comme la* limite *(et non la borne supérieure etc.) des intégrales de toute suite de fonctions étagées positives croissant vers f, mais l'inconvénient est qu'il aurait fallu auparavant montrer que cette limite ne dépend effectivement pas de la suite de fonctions choisie.*

1. la même notation est encore utilisée, car il s'agit d'un *prolongement* de l'intégrale initialement définie pour les fonctions *étagées* positives, aux fonctions *mesurables* positives

Dém. du théorème de Beppo Levi. Montrons d'abord l'inégalité $\geq$. Comme pour tout entier n, on a $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, par croissance de l'intégrale on a également

$$\int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f_{n+1} \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu,$$

ce qui prouve en passant à la limite que $\lim_n \uparrow \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$.

Montrons maintenant l'autre inégalité. Par définition de l'intégrale de f, il suffit de montrer que pour toute fonction étagée positive φ telle que $\varphi \leq f$, on a $\int \varphi \, d\mu \leq \lim_n \uparrow \int_E f_n \, d\mu$. Soit alors $a \in [0, 1[$ et $E_n := \{a\varphi \leq f_n\}$. Comme $\varphi \leq f$, on a l'égalité $E = \cup_n E_n$, en effet :

- sur $\{f = 0\}$, $f_n = \varphi = 0$ pour tout entier n, donc $\{f = 0\} \subseteq E_n$ et par conséquent $\{f = 0\} \subseteq \cup_n E_n$;
- sur $\{f > 0\}$, $a\varphi < f$ car φ ne prend que des valeurs finies. Donc pour tout $x \in \{f > 0\}$, il existe un rang $N(x)$ tel que pour tout $n \geq N(x)$, $a\varphi(x) \leq f_n(x)$, autrement dit $x \in E_n$, et par conséquent $x \in \cup_n E_n$.

En conclusion, $E = \{f = 0\} \cup \{f > 0\} \subseteq \cup_n E_n$. Or en notant $\varphi = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$,

$$\int_E a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu = a \int_E \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap E_n} \, d\mu = \sum_{i \in I} a\alpha_i \mu(A_i \cap E_n).$$

Ainsi comme les E_n croissent vers E, par continuité à gauche de la mesure, $\lim_n \uparrow \mu(A_i \cap E_n) = \mu(A_i)$ pour tout $i \in I$, ce qui s'écrit, I étant fini,

$$\lim_n \uparrow \int_E a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu = \sum_{i \in I} a\alpha_i \mu(A_i) = a \int_E \varphi \, d\mu.$$

D'autre part $E_n = \{a\varphi \leq f_n\}$, donc $a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \leq f_n$, d'où

$$\int_E a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu \leq \int_E f_n \, d\mu \leq \lim_n \uparrow \int_E f_n \, d\mu.$$

En se servant des deux équations qui précédent et notamment en passant à la limite dans la dernière inégalité, on trouve

$$a \int_E \varphi \, d\mu \leq \lim_n \uparrow \int_E f_n \, d\mu.$$

L'inégalité cherchée est donc prouvée, car a est arbitrairement proche de 1. □

Proposition 7.14 (Lemme de Fatou) *Pour toute suite (f_n) de $\mathscr{F}_+(\mathscr{A})$, nous savons que $\liminf_n f_n \in \mathscr{F}_+(\mathscr{A})$, mais surtout*

$$\int_E \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_E f_n \, d\mu.$$

Remarque 7.15 *Pour $f_n = \mathbb{1}_{A_n}$ où $A_n \in \mathscr{A}$, le lemme de Fatou se traduit par une inégalité que nous connaissions déjà* @

$$\mu\left(\liminf_n A_n\right) \leq \liminf_n \mu(A_n).$$

Dém. Soit $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$ et $g := \liminf_n f_n = \lim_n \uparrow g_n$. Comme g est la limite de la suite croissante (g_n), le théorème de Beppo Levi assure que

$$\int_E g\,d\mu = \lim_n \uparrow \int_E g_n\,d\mu.$$

D'autre part, $g_n \leq f_n$ donc par croissance de l'intégrale, $\int_E g_n\,d\mu \leq \int_E f_n\,d\mu$ et

$$\liminf_n \int_E g_n\,d\mu \leq \liminf_n \int_E f_n\,d\mu.$$

Mais d'après ce qui précède, $\liminf_n \int_E g_n\,d\mu = \lim_n \int_E g_n\,d\mu = \int_E g\,d\mu$, ce qui fournit l'inégalité souhaitée. □

Proposition 7.16 *Les propriétés de positive homogénéité et d'additivité passent (comme celle de croissance) aux intégrales de fonctions mesurables positives. En d'autres termes pour tout $a \geq 0$ et pour tout $f \in \mathscr{F}_+(\mathscr{A})$,*

$$\int_E (af)\,d\mu = a\int_E f\,d\mu \qquad \textit{et} \qquad \int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.$$

Dém. Comme f et g sont mesurables et positives, il existe d'après le lemme fondamental d'approximation des suites croissantes (f_n) et (g_n) de fonctions étagées positives croissant vers f et g respectivement. La proposition se prouve en écrivant les propriétés de positive homogénéité et d'additivité pour ces fonctions étagées et en appliquant à chaque suite d'intégrales le théorème de Beppo Levi. □ @

Proposition 7.17 *Pour toute suite (f_n) de $\mathscr{F}_+(\mathscr{A})$, nous savons que $\sum_n f_n \in \mathscr{F}_+(\mathscr{A})$, mais surtout*

$$\int_E \left(\sum_n f_n\right) d\mu = \sum_n \int_E f_n\,d\mu.$$

Dém. Il suffit de poser $g_n := \sum_{k=0}^n f_k$, d'utiliser l'additivité de l'intégrale et d'appliquer le théorème de Beppo Levi à la suite croissante (g_n). □ @

Corollaire 7.18 *Pour tout $f \in \mathscr{F}_+(\mathscr{A})$, l'application*

$$\begin{aligned} \nu : \mathscr{A} &\longrightarrow [0,+\infty] \\ A &\longmapsto \int_E f\mathbb{1}_A\,d\mu \end{aligned}$$

est une mesure sur $(E,\mathscr{A})$ appelée mesure de densité f par rapport à μ.

Notation 7.19 *On note souvent $\int_A f\,d\mu$ à la place*[2] *de $\int_E f\mathbb{1}_A\,d\mu$.*

2. ce qui d'ailleurs est cohérent avec le cas trivial $A = E$...

Dém. Vérifions les deux propriétés caractérisant les mesures. Tout d'abord $\nu(\varnothing) = 0$ car $f\mathbb{1}_\varnothing$ est la fonction étagée nulle partout. Montrons à présent que ν est σ-additive. Soient (A_n) une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux disjoints. D'après la proposition qui précède le corollaire, nous pouvons échanger sommation et intégrale de sorte que

$$\nu\left(\cup_n A_n\right) = \int_E f\mathbb{1}_{\cup_n A_n}\, d\mu = \int_E f \sum_n \mathbb{1}_{A_n}\, d\mu$$
$$= \int_E \sum_n f\mathbb{1}_{A_n}\, d\mu = \sum_n \int_E f\mathbb{1}_{A_n}\, d\mu = \sum_n \nu(A_n),$$

ce qui achève la démonstration. □

Proposition 7.20 *Si μ est* finie *alors pour tout $f \in \mathscr{F}_+(\mathscr{A})$,*

$$f \text{ bornée} \implies f \text{ intégrable.}$$

Dém. Si f est bornée, il existe un nombre réel positif a tel que $f \leq a\mathbb{1}_E$, donc $\int_E f\, d\mu \leq a\mu(E) < \infty$, car par hypothèse μ est finie. □

Proposition 7.21 (Inégalité de Markov) *Pour tout $f \in \mathscr{F}_+(\mathscr{A})$, pour tout $a > 0$,*

$$\mu\left(\{f \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a}\int_E f\, d\mu.$$

Dém. Comme $f \geq a\mathbb{1}_{\{f\geq a\}}$, par croissance $\int_E f\, d\mu \geq a\mu(\{f \geq a\})$. □

Proposition 7.22 *Pour tout $f \in \mathscr{F}_+(\mathscr{A})$,*

$$\int_E f\, d\mu = 0 \iff \mu(\{f \neq 0\}) = 0.$$

Dém. Pour le sens $\Rightarrow$, soit $A_n := \{f \geq 1/n\}$. Par l'inégalité de Markov, $\mu(A_n) \leq n\int_{A_n} f\, d\mu$, donc comme $\int_E f\, d\mu = 0$, $\mu(A_n) = 0$. Or $A := \{f \neq 0\} = \lim_n \uparrow A_n$, donc par continuité à gauche de μ, $\mu(A) = \lim_n \uparrow \mu(A_n) = 0$. Traitons maintenant le sens $\Leftarrow$. Par additivité

$$\int_E f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_{{}^cA} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu,$$

car f est nulle sur ${}^cA$, donc si $\mu(A) = 0$ on a bien $\int_E f\, d\mu = 0$.

On pouvait aussi procéder de la manière suivante, qui est un peu moins simple, mais peut servir d'entraînement. On commence par montrer la proposition pour une fonction étagée positive φ :

$$\int_E \varphi\, d\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i\in I} \alpha_i\mu(A_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i:\alpha_i\neq 0} \alpha_i\mu(A_i) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i:\alpha_i\neq 0} \mu(A_i) = 0 \Leftrightarrow \mu\left(\cup_{i:\alpha_i\neq 0} A_i\right) = 0 \Leftrightarrow \mu(\{\varphi \neq 0\}) = 0.$$

Maintenant soit $f \in \mathscr{F}_+(\mathscr{A})$ et (f_n) une suite croissante d'éléments de $\mathscr{E}_+(\mathscr{A})$ convergeant vers f. Montrons la double implication en commençant par $\Rightarrow$. Supposons donc que $\int_E f\,d\mu = 0$. Pour tout entier n, comme $0 \leq f_n \leq f$, on a également $\int_E f_n\,d\mu = 0$. D'après ce qui précède, on a donc $\mu(\{f_n \neq 0\}) = 0$. Si nous montrons que la suite $\{f_n \neq 0\}$ converge en croissant vers $\{f \neq 0\}$, alors la continuité à gauche de μ impliquera $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$. La croissance de cette suite de parties est due à la croissance de la suite (f_n), en effet si $f_n(x) \neq 0$ alors $f_{n+1}(x) \neq 0$ car $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Montrons que la limite A de cette suite, qui n'est autre que sa réunion, est $\{f \neq 0\}$ par double inclusion. Si $x \in A$, il existe n tel que $f_n(x) \neq 0$, mais comme $f(x) \geq f_n(x)$, on a aussi $f(x) \neq 0$. Réciproquement, si $f(x) \neq 0$ alors comme $f(x)$ est la limite de la suite réelle $(f_n(x))_n$, à partir d'un certain rang $f_n(x) \neq 0$.

Montrons enfin l'inégalité opposée. Si $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$, alors comme $\{f_n \neq 0\} \subseteq \{f \neq 0\}$ pour tout n, on a aussi $\mu(\{f_n \neq 0\}) = 0$, ce qui implique $\int_E f_n\,d\mu = 0$. Le théorème de Beppo Levi permet de conclure que $\int_E f\,d\mu = 0$. □

Remarque 7.23 *Noter que le raisonnement qui permet de montrer que la suite $\{f_n \neq 0\}$ converge vers $\{f \neq 0\}$ ne tient plus si la suite (f_n) converge vers f sans croître, en effet avec $f_n(x) = x^n$ sur l'intervalle $[0,1]$: on a $\{f_n \neq 0\} =]0,1]$ pour tout n, donc la limite de cette suite est $]0,1]$, alors que si f désigne la limite de la suite (f_n) alors $\{f \neq 0\} = \{1\}$.*

Notation 7.24 (importante) *Au lieu d'écrire $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$, on notera souvent*

$$f = 0 \quad \mu\text{-presque partout} \qquad \text{ou} \qquad f = 0 \quad \mu\text{-p.p.}$$

De manière générale, soit $N \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(N) = 0$, et une certaine propriété $P(x)$ qui dépend de $x \in E$. Si $\{x \in E : P(x) \text{ est fausse}\} \subseteq N$, on dira que $P(x)$ est vraie « pour μ-presque tout x », ou « $\mu(dx)$-presque partout », ou que P est vraie μ-p.p.

L'ensemble N est appelé ensemble négligeable*, ou μ-négligeable. Les ensembles dénombrables, l'ensemble triadique de Cantor, sont des ensembles λ-négligeables.*

Dans certains contextes, une partie de E sera dite négligeable même si elle n'est pas mesurable mais si elle est incluse dans une partie mesurable de mesure nulle.

Proposition 7.25 *Pour tous $f, g \in \mathscr{F}_+(\mathscr{A})$,*

$$f = g \quad \mu\text{-p.p.} \Rightarrow \int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu.$$

Dém. On pose

$$h := \begin{cases} \max(f,g) - \min(f,g) & \text{sur } \{\min(f,g) < \infty\} \\ 0 & \text{sur } \{f = g = \infty\}. \end{cases}$$

Comme $\{f = g\} = \{h = 0\}$, par passage au complémentaire $\{h \neq 0\} = \{f \neq g\}$ donc $\mu(\{h \neq 0\}) = 0$ (ce qui s'écrit aussi $h = 0$ μ-p.p.), par conséquent $\int_E h\,d\mu = 0$ (par la Proposition 7.22). Mais comme $\max(f,g) = \min(f,g) + h$, par additivité on a

$$\int_E \max(f,g)\,d\mu = \int_E \min(f,g)\,d\mu + \int_E h\,d\mu = \int_E \min(f,g)\,d\mu.$$

Et comme $f \wedge g \leq f \leq f \vee g$ et $f \wedge g \leq g \leq f \vee g$, par croissance on a

$$\int_E \max(f,g)\,d\mu = \int_E \min(f,g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu,$$

ce qui achève la démonstration. □

Proposition 7.26 *Pour tout* $f \in \mathscr{F}_+(\mathscr{A})$,

$$\int_E f\,d\mu < +\infty \Longrightarrow \mu(\{f = +\infty\}) = 0.$$

Dém. Soit $A := \{f = +\infty\}$. Par contraposée, si $\mu(A) \neq 0$, alors $\int_E f\,d\mu \geq \int_A f\,d\mu = (+\infty)\mu(A) = +\infty$.

Autre possibilité (pour l'entraînement...) : se servir de l'inégalité de Markov. Soit $A_n := \{f \geq n\}$, alors $A = \lim_n \downarrow A_n$. Or par l'inégalité de Markov, $\mu(A_1) \leq \int_E f\,d\mu < +\infty$. Or comme toute mesure, μ est continue pour les suites décroissantes (on dit aussi continue à droite) dont un des termes est de mesure finie, donc $\mu(A) = \lim_n \downarrow \mu(A_n)$. Mais par l'inégalité de Markov à nouveau, $\mu(A_n) \leq n^{-1} \int_E f\,d\mu \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$. □

Corollaire 7.27 (Lemme de Borel–Cantelli) *Soit* (A_n) *une suite d'éléments de* $\mathscr{A}$. *Alors*

$$\sum_{n\geq 0} \mu(A_n) < +\infty \Longrightarrow \mu\left(\limsup_n A_n\right) = 0.$$

Dém. Soit $f := \sum_n \mathbb{1}_{A_n}$. Par hypothèse, $\sum_n \mu(A_n) = \int_E f\,d\mu < \infty$. Donc par le résultat précédent, $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$. Montrons que $\limsup_n A_n = \{f = +\infty\}$.

$$\begin{aligned}\sum_n \mathbb{1}_{A_n}(x) < \infty &\Leftrightarrow \mathbb{1}_{A_n}(x) = 0 \text{ à partir d'un certain rang } n_0 \\ &\Leftrightarrow \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\quad x \in {}^{c}A_n \Leftrightarrow x \in \liminf_n {}^{c}A_n \Leftrightarrow x \notin \limsup_n A_n.\end{aligned}$$

Exemple 7.28 (mesure de comptage) *L'intégration par rapport à la mesure de comptage sur* $\mathbb{N}$ *est tout simplement la* sommation de série. *En effet* $u \in \mathscr{F}_+(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ *est tout simplement une suite* (u_n) *de réels positifs et pour tout* $N \in \mathbb{N}$, *la suite* $\varphi_N := (u_n \mathbb{1}_{n\leq N})$ *est une fonction étagée positive qui converge en croissant vers* u. *Donc si* m *désigne la mesure de comptage sur* $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$, *alors*

$$\int_{\mathbb{N}} u\,dm = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{N}} \varphi_N\,dm = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n\, m(\{n\}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_n u_n.$$

Chapitre 8

Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque et l'espace $\mathscr{L}^1(\mu)$

8.1 Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

On rappelle que $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ désigne l'ensemble des fonctions mesurables : $(E, \mathscr{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathscr{B}or(\bar{\mathbb{R}}))$.

Définition 8.1 *Pour tout $f \in \mathscr{F}(\mathscr{A})$, on dira que f* admet une intégrale *si $\int_E f^+ \, d\mu < \infty$ ou $\int_E f^- \, d\mu < \infty$, et l'on définit alors l'intégrale de f par rapport à μ, notée*[1] *$\int_E f \, d\mu$, l'élément de $\bar{\mathbb{R}}$ suivant*

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

Si les deux intégrales $\int_E f^+ \, d\mu$ et $\int_E f^- \, d\mu$ sont finies, autrement dit $\int_E |\, f \,| \, d\mu < \infty$, ou encore dit $|\, f \,|$ est μ-intégrable, alors on dira (un peu) plus simplement que f est μ-intégrable. *En particulier,*

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |\, f \,| \, d\mu.$$

Dém. de l'inégalité. Par définition,

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \leq \int_E f^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu = \int_E |\, f \,| \, d\mu,$$

par additivité. De même, on démontre que $-\int_E f \, d\mu \leq \int_E |\, f \,| \, d\mu$. □

Proposition 8.2 *Soient $g, h \in \mathscr{F}_+(\mathscr{A})$ tels que $\int_E g \, d\mu < \infty$ ou $\int_E h \, d\mu < \infty$. Alors* $\min(g, h) < \infty$ *μ-p.p. et $f := (g - h)\mathbb{1}_{\{\min(g,h) < \infty\}}$ qui est bien définie (et vaut d'ailleurs $g - h$ μ-p.p.) admet une intégrale*

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu - \int_E h \, d\mu.$$

1. encore !

Dém. Supposons que $\int_E h\,d\mu < \infty$ (la démonstration est identique si c'est $\int_E g\,d\mu$ qui est finie), alors $h < \infty$ μ-p.p. par la Proposition 7.26 (donc $\min(g,h) < \infty$ μ-p.p.). Ensuite par définition de f, on a $f^- \leq h$, donc f^- est μ-intégrable. Enfin, comme @ $f^+ + h = f^- + g$, par additivité

$$\int_E f^+\,d\mu + \int_E h\,d\mu = \int_E f^-\,d\mu + \int_E g\,d\mu,$$

égalité à laquelle on peut retrancher les deux intégrales de f^- et de h, qui sont finies, ce qui donne

$$\int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu = \int_E g\,d\mu - \int_E h\,d\mu,$$

qui est bien défini dans $]-\infty, +\infty]$, ce qui implique que f admet bien une intégrale égale à $\int_E g\,d\mu - \int_E h\,d\mu$. □

Définition 8.3 (et proposition) *L'espace $\mathscr{L}^1(\mathscr{E}, \mathscr{A}, \mu)$, noté aussi $\mathscr{L}^1(\mu)$, des fonctions μ-intégrables, est un espace vectoriel et l'application $f \mapsto \int_E f\,d\mu$ est une forme linéaire positive donc croissante.*

Remarque 8.4 *Bien noter $\mathscr{L}^1$ car la notation L^1 fera plus tard référence à un autre espace.*

Dém. Pour tous $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\,\lambda f + g\,| \leq |\,\lambda\,|.|\,f\,| + |\,g\,|$ donc $\lambda f + g$ est intégrable par additivité. De plus, en se servant des égalités du type $f = f^+ - f^-$ appliquées à f, g et $f+g$, on obtient $f + g = (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ et par conséquent

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+,$$

d'où en passant aux intégrales,

$$\int_E (f+g)^+\,d\mu + \int_E f^-\,d\mu + \int_E g^-\,d\mu = \int_E (f+g)^-\,d\mu + \int_E f^+\,d\mu + \int_E g^+\,d\mu.$$

Comme toutes ces quantités sont finies, on peut les retrancher à loisir ce qui donne

$$\int_E (f+g)^+\,d\mu - \int_E (f+g)^-\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu,$$

autrement dit $\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$. De même, en utilisant les égalités $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$, $(\lambda f)^- = \lambda f^-$ lorsque $\lambda > 0$ et $(\lambda f)^+ = -\lambda f^-$, $(\lambda f)^- = -\lambda f^+$ lorsque $\lambda < 0$, et en utilisant la positive homogénéité de l'intégrale sur $\mathscr{F}_+$, on obtient :

a) dans le cas $\lambda > 0$,

$$\int_E (\lambda f)\,d\mu = \int_E (\lambda f^+)\,d\mu - \int_E (\lambda f^-)\,d\mu = \lambda \int_E f^+\,d\mu - \lambda \int_E f^-\,d\mu = \lambda \int_E f\,d\mu,$$

b) dans le cas $\lambda < 0$,

$$\int_E (\lambda f)\,d\mu = \int_E (-\lambda f^-)\,d\mu - \int_E (-\lambda f^+)\,d\mu = (-\lambda) \int_E f^-\,d\mu - (-\lambda) \int_E f^+\,d\mu = \lambda \int_E f\,d\mu.$$

L'intégrale est donc bien une forme linéaire. Elle est positive car si $f \geq 0$, alors $f = f^+$ et par définition $\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu \geq 0$. Elle est donc croissante car si $g \geq h$, alors grâce à la Proposition 8.2, $(g-h)\mathbb{1}_{\{\min(g,h)<\infty\}}$ est positive et son intégrale, qui est positive d'après ce qui précède, vaut $\int_E g\,d\mu - \int_E h\,d\mu \geq 0$, ce qui montre que $\int_E g\,d\mu \geq \int_E h\,d\mu$. □

Remarque 8.5 *Si m est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ alors $\mathscr{L}^1(m)$ est l'ensemble, souvent noté ℓ^1, des suites dont la série est* absolument convergente.

Lemme 8.6 *Si $f = g$ μ-p.p., alors f est intégrable (resp. admet une intégrale) ssi g est intégrable (resp. admet une intégrale).*

Dém. Comme $f = g$ μ-p.p., on voit facilement que $f^+ = g^+$ μ-p.p. et que $f^- = g^-$ μ-p.p. Il suffit donc de montrer que pour tous f, g *positives*, si $f = g$ μ-p.p. alors $\int f\,d\mu < \infty$ ssi $\int g\,d\mu < \infty$. En fait on a déjà montré mieux (Corollaire 7.25) : si f et g sont positives et que $f = g$ μ-p.p. alors on a l'égalité $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$. □ @

8.2 Les grands théorèmes de convergence

Nous allons maintenant donner une version plus générale du théorème de convergence monotone et de ses corollaires, auquel nous ajouterons un dernier théorème de convergence, dit de convergence dominée.

Théorème 8.7 *Soit $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ et (f_n) une suite d'éléments de $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ telle que pour tout entier n, $f_{n+1} \geq f_n \geq g$ μ-p.p. Alors $\lim_n \uparrow f_n$ est définie μ-p.p. et toute fonction f μ-p.p. égale*[2] *à $\lim_n f_n$ admet une intégrale et vérifie*

$$\int_E f\,d\mu = \lim \uparrow \int_E f_n\,d\mu.$$

Corollaire 8.8 *Soit (φ_n) une suite d'éléments de $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ telle que pour tout entier n, $\varphi_n \geq 0$ μ-p.p. Alors $\sum_n \varphi_n$ admet une intégrale et*

$$\int_E \left(\sum_n \varphi_n\right) d\mu = \sum_n \int_E \varphi_n\,d\mu.$$

Dém. du corollaire. On prend bien sûr $f_n = \sum_{k=0}^n \varphi_k$ qui est positive μ-p.p. car positive sur $\cap_k\{\varphi_k \geq 0\}$, partie mesurable dont le complémentaire est de mesure inférieure ou égale à $\sum_k \mu(\{\varphi_k < 0\}) = 0$. En particulier la fonction $\sum_n \varphi_n$ est définie μ-p.p. et vaut $\sum_n \varphi_n^+$ μ-p.p. donc admet une intégrale. Le corollaire découle du théorème qui précède et de l'additivité de l'intégrale □ @

2. comme par exemple $f = \liminf_n f_n$ si l'on veut

Dém. du théorème. On prend d'abord $g \equiv 0$ et on définit $A := \cap_{n\geq 0}\{f_{n+1} \geq f_n \geq g\}$. Alors A est mesurable, avec

$$\mu({}^cA) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} {}^c\{f_{n+1} \geq f_n \geq g\}\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu\left({}^c\{f_{n+1} \geq f_n \geq g\}\right) = 0,$$

et $(f_n \mathbb{1}_A)$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives. Soit h sa limite, et f telle que $h = f$ μ-p.p. Alors d'après le théorème de convergence monotone,

$$\int_E f\,d\mu = \int_E h\,d\mu = \lim_n \uparrow \int_E f_n \mathbb{1}_A\,d\mu = \lim_n \uparrow \int_E f_n\,d\mu,$$

puisque $\mu({}^cA) = 0$ (en particulier f_n admet bien une intégrale, car $f_n = f_n^+$ μ-p.p.). Maintenant si $g \not\equiv 0$, on applique bien sûr ce qu'on vient d'obtenir à $g_n := f_n - g \geq 0$ μ-p.p. Comme $f_n = g + g_n = g^+ - g^- + g_n^+ - g_n^- = (g^+ + g_n^+) - (g_n^- + g^-)$, et que $g_n^- = 0$ μ-p.p., on a $\int (g_n^- + g^-)\,d\mu < \infty$, donc f_n admet une intégrale. De plus,

$$\int_E f_n\,d\mu = \int_E g^+\,d\mu + \int_E g_n^+\,d\mu - \int_E g^-\,d\mu = \int_E g\,d\mu + \int_E g_n\,d\mu,$$

qui converge en croissant vers $\int_E g\,d\mu + \int_E (\lim_n \uparrow g_n)\,d\mu$. Or $g_n = f_n - g$, donc $\lim_n \uparrow g_n = (\lim_n f_n) - g$, et comme $g \in \mathscr{L}^1$, la suite $(\int_E f_n\,d\mu)$ converge en croissant vers $\int_E g\,d\mu + \int_E ((\lim_n f_n) - g)\,d\mu = \int_E (\lim_n f_n)\,d\mu$. □

Donnons une version plus générale du lemme de Fatou.

Proposition 8.9 *Soit $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ et (f_n) une suite d'éléments de $\mathscr{F}(\mathscr{A})$. Alors*
a) $f_n \geq g$ μ-p.p. pour tout $n \Longrightarrow \int(\liminf_n f_n)\,d\mu \leq \liminf_n \int f_n\,d\mu$
et
b) $f_n \leq g$ μ-p.p. pour tout $n \Longrightarrow \int(\limsup_n f_n)\,d\mu \geq \limsup_n \int f_n\,d\mu$.

Dém. Remarquons que a)$\Rightarrow$ b) en remplaçant f_n par $-f_n$ et en multipliant les deux membres de l'inégalité par -1. Montrons a) avec $g \equiv 0$. Il faut bien sûr vérifier que f_n admet une intégrale pour tout n et que $\liminf_n f_n$ également admet une intégrale.

Si $f_n \geq 0$ μ-p.p. alors $f_n^- = 0$ μ-p.p. et $\int_n f_n^-\,d\mu = 0$ donc f_n admet une intégrale. Soit alors $A := \cup_n\{f_n < 0\}$, alors A (est mesurable et) $\mu(A) \leq \sum_n \mu(\{f_n < 0\}) = 0$, donc

$$\liminf_n f_n = \mathbb{1}_A \liminf f_n + \liminf(f_n \mathbb{1}_{{}^cA}),$$

où dans le membre de droite, le premier terme vaut 0 μ-p.p. et le deuxième terme est positif, donc $\liminf_n f_n$ admet une intégrale, et d'après la première version du lemme de Fatou,

$$\int_E \left(\liminf_n f_n \mathbb{1}_{{}^cA}\right)\,d\mu \leq \liminf_n \left(\int_E f_n \mathbb{1}_{{}^cA}\,d\mu\right).$$

Or comme $\mu(A) = 0$, on a $\int_E (\mathbb{1}_A \liminf_n f_n)\,d\mu = 0$ et $\int_E f_n \mathbb{1}_A\,d\mu = 0$. En ajoutant ces deux dernières quantités (nulles!) à l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité voulue. @

Si $g \not\equiv 0$, on applique bien sûr ce que l'on vient de faire à $g_n := f_n - g$ qui est positive μ-p.p. Comme dans la démonstration du théorème précédent, on voit que f_n admet une intégrale et que $\int_E g_n\, d\mu = \int_E f_n\, d\mu - \int_E g\, d\mu$, ainsi que $\int_E (\liminf_n g_n)\, d\mu = \int_E (\liminf_n f_n)\, d\mu - \int_E g\, d\mu$, ce qui donne le résultat.

On aurait également pu appliquer à notre deuxième version du théorème de convergence monotone, la méthode utilisée pour déduire la première version lemme de Fatou de la première version du théorème de convergence monotone... □ @

Nous pouvons maintenant énoncer un autre des résultats majeurs de ce cours.

Théorème 8.10 (Théorème de Lebesgue, ou de convergence dominée) *Si (f_n) est une suite d'éléments de $\mathscr{L}^1(\mu)$ convergeant*[3] *μ-p.p. vers une fonction f et qu'il existe $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\, f_n \,| \le g$ μ-p.p., alors $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ et*

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_E |\, f - f_n \,|\, d\mu = 0$

et

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu.$

Dém. Soit $A := \{x \in E : \lim_n f_n(x) = f(x)\} \cap \bigcap_n \{|\, f_n \,| \le g\}$. Alors A est de complémentaire négligeable et pour tout $x \in A$, $|\, f_n(x) \,| \le g(x)$, donc $|\, f(x) \,| \le g(x)$. Par conséquent, ayant $|\, f \,| \le g$ μ-p.p., nous avons $\int |\, f \,|\, d\mu \le \int g\, d\mu$, donc $\int |\, f \,|\, d\mu < \infty$.

Comme $f_n \ge -g$ μ-p.p. et que $-g \in \mathscr{L}^1(\mu)$, d'après le lemme de Fatou,

$$\int_E f\, d\mu = \int_E (\liminf_n f_n)\, d\mu \le \liminf_n \int_E f_n\, d\mu.$$

De même, comme $f_n \le g$ μ-p.p. et que $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$, d'après le lemme de Fatou,

$$\int_E f\, d\mu = \int_E (\limsup_n f_n)\, d\mu \ge \limsup_n \int_E f_n\, d\mu.$$

On a donc

$$\limsup_n \int_E f_n\, d\mu \le \int_E f\, d\mu \le \liminf_n \int_E f_n\, d\mu,$$

ce qui implique $\int_E f\, d\mu = \lim_n \int_E f_n\, d\mu$, autrement dit b). Pour obtenir a), on applique le lemme de Fatou à $|\, f - f_n \,| \le |\, f \,| + |\, f_n \,| \le 2g \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Donc

$$\int_E \left(\limsup_n |\, f - f_n \,| \right) d\mu \ge \limsup_n \int_E |\, f - f_n \,|\, d\mu,$$

ce qui implique $\limsup_n \int_E |\, f - f_n \,|\, d\mu = 0$, autrement dit a). □

3. simplement

8.3 Intégrale des fonctions à valeurs complexes

Définition 8.11 *Une fonction $f : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{C}, \mathscr{B}or(\mathbb{C}))$ est dite μ-intégrable si f est mesurable et $|\, f \,|$ est intégrable. Ceci entraîne que $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont intégrables et l'intégrale de f par rapport à μ est définie comme le nombre complexe*

$$\int_E f \, d\mu = \int_E \Re(f) \, d\mu + i \int_E \Im(f) \, d\mu.$$

Théorème 8.12 *L'ensemble $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(E, \mathscr{A}, \mu)$ des fonctions complexes μ-intégrables est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. L'application $f \mapsto \int_E f \, d\mu$ est une $\mathbb{C}$-forme linéaire et pour tout $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$,*

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |\, f \,| \, d\mu.$$

Il suffit de montrer la dernière inégalité, car le reste découle facilement de la linéarité de l'intégrale réelle et de la définition.

Il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \int f \, d\mu$ est réel et $|\, z \,| = 1$, donc

$$\left| \int f \, d\mu \right| = |\, z \,| \left| \int f \, d\mu \right| = \left| z \int f \, d\mu \right|.$$

Or par linéarité de l'intégrale complexe,

$$z \int f \, d\mu = \int (zf) \, d\mu = \int_E \Re(zf) \, d\mu + i \int_E \Im(zf) \, d\mu.$$

Or on a choisi z pour que $z \int f \, d\mu$ soit réel donc $\int_E \Im(zf) \, d\mu = 0$. De plus, $|\, \Re(zf) \,| \leq |\, zf \,| = |\, f \,|$, donc comme

$$\left| \int_E \Re(zf) \, d\mu \right| \leq \int_E |\, \Re(zf) \,| \, d\mu \leq \int_E |\, f \,| d\mu,$$

on a

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| = \left| z \int_E f \, d\mu \right| = \left| \int_E \Re(zf) \, d\mu \right| \leq \int_E |\, f \,| d\mu,$$

ce qui constitue l'inégalité souhaitée. □

Proposition 8.13 *Soit (φ_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$. Si la série de terme général $\int_E |\, \varphi_n \,| \, d\mu$ est convergente, alors la fonction $\sum_n |\, \varphi_n \,|$ est intégrable ainsi que la fonction définie μ-p.p. $\sum_n \varphi_n$ et*

$$\int_E \left(\sum_n \varphi_n \right) d\mu = \sum_n \left(\int_E \varphi_n \, d\mu \right).$$

Dém. Soit $g := \sum_n |\varphi_n| < \infty$ μ-p.p. car $\int_E g\,d\mu < \infty$ par le corollaire du théorème de convergence monotone sur les séries. Donc il existe une partie mesurable A de E, de complémentaire μ-négligeable, telle que $g(x) < \infty$ pour tout $x \in A$. Autrement dit, pour tout $x \in A$, la série de terme général $\varphi_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente. Si $f_n := \sum_{k \leq n} \varphi_k$, on a donc la convergence sur A de la suite (f_n) vers une fonction $f := \sum_n \varphi_n$, assortie de la domination des $|f_n|$ par g, donc par le théorème de convergence dominée,

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_E \varphi_k\,d\mu = \sum_n \int_E \varphi_n\,d\mu,$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Chapitre 9

Applications

9.1 Intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann

Définition 9.1 *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite Riemann-intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction ϕ_ε en escalier sur $[a, b]$ et une fonction ψ_ε* positive *et en escalier sur $[a, b]$ telles que*

$$|f - \phi_\varepsilon| \leq \psi_\varepsilon \qquad \textit{et} \qquad \int_a^b \psi_\varepsilon \leq \varepsilon, \tag{9.1}$$

*où l'*intégrale de Riemann *d'une fonction en escalier φ, notée $\int_a^b \varphi$, est définie*[1] *comme $\sum_i \alpha_i(a_i - a_{i-1})$ si φ vaut α_i sur $]a_{i-1}, a_i[$.*

De plus, pour tous ϕ_ε, ψ_ε vérifiant (9.1), la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ de $\int_a^b \phi_\varepsilon$ est toujours la même, et est égale, par définition, au nombre réel noté[2] *$\int_a^b f$ et appelé*[3] *intégrale de Riemann de f.*

Remarque 9.2 *Toute fonction Riemann-intégrable est bornée (car ϕ_ε et ψ_ε le sont).*

Remarque 9.3 *Toute fonction réglée est Riemann-intégrable, car limite uniforme de fonctions en escalier : il suffit de prendre $\psi_\varepsilon = \varepsilon/(b - a)$.*

Théorème 9.4 *Pour tout f Riemann-intégrable sur $[a, b]$, il existe $g \in \mathscr{L}^1([a, b], \mathscr{B}or([a, b]), \lambda)$ tel que*

a) $f = g$ μ-p.p.

b) $\displaystyle\int_a^b f = \int_{[a,b]} g \, d\lambda$.

Remarque 9.5 *D'un point de vue pratique, si f est borélienne, alors on peut prendre $g = f$.*

---

1. cette définition ne dépend bien sûr pas de la subdivision choisie $a < a_1 < \cdots < b$ pour représenter φ
2. aussi...
3. encore...

Dém. Pour tout n il existe ϕ_n, ψ_n en escalier telles que $|f-\phi_n| \leq \psi_n$ et $\int_a^b \psi_n \leq 1/n$. Rappelons déjà que par définition,

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n.$$

Soit alors

$$\alpha_n := \phi_n - \psi_n \qquad \text{et} \qquad \beta_n := \phi_n + \psi_n.$$

Comme $|f-\phi_n| \leq \psi_n$, on a $\phi_n - f \leq \psi_n$ et $f - \phi_n \leq \psi_n$, c'est-à-dire $\alpha_n \leq f \leq \beta_n$. D'autre part, comme $\beta_n - \alpha_n = 2\psi_n$, on a

$$\lim_n \int_a^b (\beta_n - \alpha_n) = 0,$$

et donc

$$\int_a^b f = \lim_n \int_a^b \alpha_n = \lim_n \int_a^b \beta_n.$$

Soient à présent

$$\tilde{\alpha}_n := \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad \text{et} \qquad \tilde{\beta}_n := \min(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

On obtient alors l'encadrement

$$\alpha_n \leq \tilde{\alpha}_n \leq f \leq \tilde{\beta}_n \leq \beta_n.$$

On définit encore

$$\tilde{\alpha} := \lim_n \uparrow \alpha_n \qquad \text{et} \qquad \tilde{\beta} := \lim_n \downarrow \beta_n,$$

ce qui donne

$$\tilde{\alpha} \leq f \leq \tilde{\beta}.$$

De plus, comme une fonction en escalier est étagée, pour tout n, ϕ_n et ψ_n sont étagées donc boréliennes, ainsi que α_n, β_n, puis $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\beta}_n$ par stabilité de la mesurabilité par passage à la borne supérieure ou inférieure, et enfin $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ sont boréliennes par stabilité de la mesurabilité par passage à la limite.

Il est clair par la définition donnée plus haut que pour les fonctions en escalier (donc étagées), intégrales de Riemann et de Lebesgue (i.e., par rapport à la mesure de Lebesgue) coïncident, donc pour tout n

$$\int_a^b \alpha_n = \int_{[a,b]} \alpha_n \, d\lambda \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \beta_n = \int_{[a,b]} \beta_n \, d\lambda,$$

d'où

$$\int_a^b \alpha_n = \int_{[a,b]} \alpha_n \, d\lambda \leq \int_{[a,b]} \tilde{\alpha}_n \, d\lambda \leq \int_{[a,b]} \tilde{\alpha} \, d\lambda \leq \int_{[a,b]} \tilde{\beta} \, d\lambda \leq \int_{[a,b]} \tilde{\beta}_n \, d\lambda \leq \int_{[a,b]} \beta_n \, d\lambda = \int_a^b \beta_n.$$

En passant à la limite, comme $\int_a^b \alpha_n$ et $\int_a^b \beta_n$ convergent toutes deux vers $\int_a^b f$, on en déduit que

$$\int_{[a,b]} \tilde{\alpha}\, d\lambda = \int_{[a,b]} \tilde{\beta}\, d\lambda = \int_a^b f.$$

Remarquons que $\alpha_1 \leq \tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta} \leq \beta_1$, si bien que $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont bornées. Ainsi ces deux fonctions sont λ-intégrables sur $[a,b]$, la fonction $\gamma := \tilde{\beta} - \tilde{\alpha}$ est bien définie, et

$$\int_{[a,b]} \gamma\, d\lambda = \int_{[a,b]} \tilde{\alpha}\, d\lambda - \int_{[a,b]} \tilde{\beta}\, d\lambda = 0.$$

Comme $\gamma \geq 0$, ceci implique que $\gamma = 0$ λ-p.p. Mais $\tilde{\alpha} \leq f \leq \tilde{\beta}$, donc $\tilde{\alpha} = f$ sur $\{\gamma = 0\}$ et si $g := f \mathbb{1}_{\{\gamma=0\}}$, alors $g = \tilde{\alpha}\mathbb{1}_{\{\gamma=0\}}$ et

$$\int_{[a,b]} g\, d\lambda = \int_{[a,b]} \tilde{\alpha}\mathbb{1}_{\{\gamma=0\}}\, d\lambda = \int_{[a,b]} \tilde{\alpha}\, d\lambda = \int_a^b f,$$

ce qui donne bien l'égalité entre l'intégrale de Riemann de f et l'intégrale de Lebesgue d'une certaine fonction g égale à f λ-p.p. □

9.2 Dérivées et primitives

Proposition 9.6 *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ borélienne. Si f est λ-localement intégrable, au sens où pour tout $b > a$, $f\mathbb{1}_{[a,b]} \in \mathscr{L}^1(\lambda)$ alors la fonction $F : x \mapsto \int_{[a,x]} f\, d\lambda$ est* continue.

Dém. Soit $x \geq a$ et une suite (x_n) convergeant vers x en croissant, et telle que $x_n \neq x$ pour tout n. Alors les fonctions $f\mathbb{1}_{[a,x_n]}$ convergent vers $f\mathbb{1}_{[a,x[}$ tout en étant dominées par $|f|\mathbb{1}_{[a,x]}$ qui est λ-intégrable par hypothèse. Donc par convergence dominée,

$$\lim_n F(x_n) = \lim_n \int f\mathbb{1}_{[a,x_n]}\, d\lambda = \int f\mathbb{1}_{[a,x[}\, d\lambda = \int f\mathbb{1}_{[a,x]}\, d\lambda = F(x).$$

Ceci prouve que F est continue à gauche. La démonstration est identique lorsque (x_n) est décroissante, ce qui prouve que F est aussi continue à droite. □ @

Théorème 9.7 *Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée f'* bornée. *Alors f' est mesurable et l'intégrale de f' par rapport à λ est égale à sa primitive f au sens où*

$$\int_{[a,b]} f'\, d\lambda = f(b) - f(a).$$

Dém. Soit

$$g_n(x) := \begin{cases} n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right) & \text{si} \quad x \in [a, b-1/n] \\ 0 & \text{si} \quad x \in]b-1/n, b]. \end{cases}$$

Alors pour tout $x \in [a,b[$, $\lim_n g_n(x) = f'(x)$, ce qui montre que $f'\mathbb{1}_{[a,b[}$ est mesurable comme limite de fonctions mesurables, et donc $f'\mathbb{1}_{[a,b]}$ est mesurable. Par l'inégalité des accroissements finis, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$, $|\, g_n(x)\,| \leq M := \sup_{[a,b]} |\, f'\,|$ qui est fini par hypothèse. Or $M\mathbb{1}_{[a,b]} \in \mathscr{L}^1(\lambda)$ donc par convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n \, d\lambda = \int_{[a,b[} f' \, d\lambda = \int_{[a,b]} f' \, d\lambda.$$

Montrons à présent que l'on a également

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n \, d\lambda = f(b) - f(a).$$

Dans les égalités suivantes, nous utilisons la linéarité des intégrales de Lebesgue et de Riemann, ainsi que l'égalité entre ces intégrales due à la continuité de f :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} g_n(x)\, d\lambda(x) &= n \int_{[a,b-1/n]} \left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right) d\lambda(x) \\ &= n \left(\int_a^{b-1/n} f\left(\cdot + \frac{1}{n}\right) - \int_a^{b-1/n} f \right) \\ &= n \left(\int_{a+1/n}^{b} f - \int_a^{b-1/n} f \right) \\ &= n \left(\int_{b-1/n}^{b} f - \int_a^{a+1/n} f \right) \\ &= n \int_{[b-1/n,b]} f \, d\lambda - n \int_{[a,a+1/n]} f \, d\lambda. \end{aligned}$$

Ces passages entre intégrale de Riemann et de Lebesgue servent uniquement à justifier le changement de variable (translation, troisième égalité) que nous ne connaissons pas (encore) dans le cas de l'intégrale de Lebesgue.

Il ne reste plus qu'à montrer que le second terme de la dernière différence tend vers $f(a)$ quand $n \to \infty$, et la même méthode s'appliquera pour montrer que le premier terme tend vers $f(b)$. Soit $\alpha_n := \inf_{[a,a+1/n]} f$ et $\beta_n := \sup_{[a,a+1/n]} f$. Alors

$$\alpha_n = n \int_{[a,a+1/n]} \alpha_n \, d\lambda \leq n \int_{[a,a+1/n]} f \, d\lambda \leq n \int_{[a,a+1/n]} \beta_n \, d\lambda = \beta_n,$$

mais comme f est continue, $\lim_n \alpha_n = \lim_n \beta_n = f(a)$, ce qui achève la démonstration.□

Remarque 9.8 *Le théorème précédent serait faux si l'on ne faisait pas l'hypothèse que f' est bornée, comme on peut le voir sur le contre-exemple suivant :*

$$f_n(x) := \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_{[0,x]} \mathbb{1}_{A_n} \, d\lambda \qquad x \geq 0,$$

où A_n est le n-ième élément de la suite qui converge vers l'ensemble triadique de Cantor. En effet, la limite f de la suite (f_n), appelée fonction de Lebesgue*, ou « escalier du diable », est continue, dérivable λ-p.p. avec pour dérivée $f' = 0$ λ-p.p. (mais non bornée), donc $\int_{[0,1]} f' \, d\lambda = 0$. Pourtant $f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$.*

9.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème 9.9 *Soit $f : I \times E \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $f(t, \cdot) : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable. Alors*

a) S'il existe $t_0 \in I$ tel que

$$\textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x,\ t \mapsto f(t,x) \textit{ est continue en } t_0,$$

et s'il existe $g : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ intégrable *telle que*

$$\textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x, \textit{ pour tout } t \in I, \quad |\, f(t,x) \,| \leq g(x),$$

alors la fonction $h : t \mapsto \int_E f(t,x) \, d\mu(x)$ est bien définie et elle est continue *en t_0.*

b) Si pour tout $t \in I$, $f(t, \cdot)$ est intégrable[4]*, si*

$$\textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x,\ t \mapsto f(t,x) \textit{ est dérivable sur tout l'intervalle } I,$$

et s'il existe $g_1 : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ intégrable *telle que*

$$\textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x, \textit{ pour tout } t \in I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right| \leq g_1(x),$$

alors la fonction h est bien définie et est dérivable sur tout I, de dérivée

$$h'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \, d\mu(x) \qquad t \in I.$$

Remarque 9.10 *Les hypothèses* commençant *par « pour μ-presque tout x » peuvent toutes (sauf une, voir plus bas) être* affaiblies *en échangeant les quantificateurs. Pour voir la différence, à titre d'exemple, l'assertion*

$$\textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x, \textit{ pour tout } t \in I, \quad |\, f(t,x) \,| \leq g(x),$$

signifie qu'il existe un élément A de la tribu $\mathscr{A}$ de complémentaire négligeable, tel que pour tout $x \in A$, pour tout $t \in I$, $|\, f(t,x) \,| \leq g(x)$. D'autre part, l'assertion

$$\textit{pour tout } t \in I, \textit{ pour } \mu\textit{-presque tout } x, \quad |\, f(t,x) \,| \leq g(x),$$

4. pour que h soit bien définie

signifie que pour tout $t \in I$ il existe un élément A_t de la tribu $\mathscr{A}$, dépendant de t, *de complémentaire négligeable, tel que pour tout $x \in A_t$, $|\, f(t,x)\,| \leq g(x)$. Si I était dénombrable les deux assertions seraient équivalentes, quitte à définir A, dans la première assertion, comme l'intersection de tous les ensembles A_t de la seconde assertion. Ici I est un intervalle, donc la seconde assertion peut inclure strictement la première. Lorsque nous n'utilisons dans la démonstration que des* suites *à valeurs dans I, cette distinction est sans conséquence. En revanche, la domination des dérivées partielles doit être énoncée telle quelle, pour avoir une inégalité des accroissements finis vraie p.p.*

Dém. a) Pour tout $t \in I$, la domination p.p. de $f(t,\cdot)$ par la fonction intégrable g garantit que $f(t,\cdot)$ est intégrable et donc que h est bien définie. Soit une suite (s_n) de I de limite t_0. Montrons que $\lim_n h(s_n) = h(t_0)$. Soit $f_n(x) := f(s_n, x)$. De la continuité pour p.t. x de la fonction $f(\cdot, x)$ en t_0, on déduit la convergence p.p. de f_n vers $f(t_0,\cdot)$. Comme la suite (f_n) est dominée p.p. par la fonction intégrable g, le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_n h(s_n) = \lim_n \int_E f_n \, d\mu = \int_E f(t_0, x)\, d\mu(x) = h(t_0),$$

ce qui est la limite souhaitée.

b) Soit $t \in I$ et (s_n) une suite de I convergeant vers t telle que $s_n \neq t$ pour tout n. Soit $f_n : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ la fonction intégrable suivante

$$f_n(x) := \frac{f(s_n, x) - f(t,x)}{s_n - t} \qquad x \in E.$$

Alors pour p.t. x, la suite (f_n) converge vers $\partial f/\partial t(t,x)$, ce qui fait de cette dérivée partielle une fonction mesurable de x. L'hypothèse de domination p.p. de cette fonction mesurable par la fonction intégrable g_1 garantit que $\int_E \partial f/\partial t(t,x)\, d\mu(x)$ est bien définie pour tout $t \in I$. De plus, par l'intégrabilité de f_n

$$\int_E f_n \, d\mu = \frac{1}{s_n - t}\left(\int_E f(s_n, \cdot)\, d\mu - \int_E f(t,\cdot)\, d\mu \right) = \frac{h(s_n) - h(t)}{s_n - t}.$$

Or par l'inégalité des accroissements finis, pour μ-presque tout x,

$$|\, f_n(x)\,| \leq \sup_{s \in I} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s,x) \right| \leq g_1(x),$$

et comme g_1 est intégrable, on obtient

$$\lim_n \frac{h(s_n) - h(t)}{s_n - t} = \lim_n \int_E f_n \, d\mu = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu(x)$$

par le théorème de convergence dominée. □

9.4 Applications

9.4.1 Dérivation sous la somme

Soit (u_n) une suite de fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que

(i) pour tout $t \in I$, $\sum_n |\, u_n(t) \,|$ converge ;

(ii) pour tout $t \in I$, $|\, u_n'(t) \,| \leq w_n$ pour une suite (w_n) telle que $\sum_n w_n < \infty$.

Alors $S(t) := \sum_n u_n(t)$ est bien définie et est dérivable en tout $t \in I$, avec $S'(t) = \sum_n u_n'(t)$.

9.4.2 Convolution

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et φ dérivable de dérivée bornée. Alors la fonction $f \star \varphi$ définie par

$$f \star \varphi(t) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(t - x)\, f(x)\, d\lambda(x) \qquad t \in R,$$

est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$(f \star \varphi)'(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t - x)\, f(x)\, d\lambda(x) = f \star \varphi'(t).$$

9.4.3 Transformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λ-intégrable et $F(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, f(x)\, d\lambda(x)$. Si $x \mapsto xf(x)$ est intégrable, alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(t) = i \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, xf(x)\, d\lambda(x).$$

Chapitre 10

Inégalités et espaces $\mathscr{L}^p$

10.1 Inégalité de Jensen

Proposition 10.1 *Si μ est une* probabilité *sur $(E, \mathscr{A})$ et $f \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$ est à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors pour toute fonction* convexe $\varphi : I \to \mathbb{R}$, *on a $\int_E f\, d\mu \in I$, $\int_E \varphi(f)\, d\mu$ existe dans $]-\infty, +\infty]$ et*

$$\int_E \varphi(f)\, d\mu \geq \varphi\left(\int_E f\, d\mu\right).$$

Dém. Soient $a := \inf(I)$ et $b := \sup(I)$. Ayant $-\infty \leq a \leq f \leq b \leq +\infty$, comme μ est une probabilité,

$$a = \int_E a\, d\mu \leq \int_E f\, d\mu \leq \int_E b\, d\mu = b,$$

donc $m := \int_E f\, d\mu \in I$. Comme φ est convexe, il existe au moins une droite située en-dessous du graphe de φ et passant par $(m, \varphi(m))$, d'équation $y = \alpha(x - m) + \varphi(m)$. Ceci se traduit par

$$\varphi(u) \geq \alpha(u - m) + \varphi(m) \qquad u \in I,$$

et donc pour tout $x \in E$,

$$\varphi \circ f(x) \geq \alpha(f(x) - m) + \varphi(m).$$

La fonction $\varphi \circ f$ étant minorée par une fonction intégrable, elle admet une intégrale (qui ne peut être égale à $-\infty$) et

$$\int_E \varphi \circ f\, d\mu \geq \alpha \int_E (f - m)\, d\mu + \int_E \varphi(m)\, d\mu = 0 + \varphi(m),$$

par linéarité, et parce que μ est une probabilité. $\square$

10.2 Inégalités de Hölder et de Minkowski

10.2.1 Semi-normes $\mathscr{L}^p$, $p \in [1, +\infty]$

Définition 10.2 ($p \in [1, +\infty[$) *On note $\mathscr{L}^p(E, \mathscr{A}, \mu)$, ou $\mathscr{L}^p(\mu)$, l'ensemble de toutes les fonctions mesurables à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ telles que $|\, f\,|^p$ est μ-intégrable. Pour tout $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, on pose*

$$\|\, f\,\|_p := \left(\int_E |\, f\,|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

qu'on appelle[1] norme $\mathscr{L}^p$ *de f.*

Définition 10.3 ($p = \infty$) *On note $\mathscr{L}^\infty(E, \mathscr{A}, \mu)$, ou $\mathscr{L}^\infty(\mu)$, l'ensemble de toutes les fonctions mesurables f à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ qui sont μ-*essentiellement bornées*, c'est-à-dire telles qu'il existe $a > 0$ pour lequel $\mu(\{|\, f\,| \geq a\}) = 0$. Si $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$, on pose*

$$\|\, f\,\|_\infty := \inf\{a > 0 : \mu(\{|\, f\,| \geq a\}) = 0\} \in [0, +\infty[,$$

qu'on appelle[2] supremum essentiel *de f.*

10.2.2 Inégalité de Hölder

Proposition 10.4 (Inégalité de Hölder) *Pour tous $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ –on dit que ces nombres sont* conjugués[3]*– alors si $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$, $fg \in \mathscr{L}^1$ et*

$$\|\, fg\,\|_1 \leq \|\, f\,\|_p \; \|\, g\,\|_q.$$

Dém. Premier cas : p ou q vaut $+\infty$. Supposons $q = +\infty$, et donc $p = 1$. Alors par définition du supremum essentiel, $g \leq \|\, g\,\|_\infty$ μ-p.p., donc $|\, fg\,| \leq |\, f\,| \; \|\, g\,\|_\infty$ μ-p.p. Par conséquent

$$\|\, fg\,\|_1 = \int_E |\, fg\,| \, d\mu \leq \|\, g\,\|_\infty \int_E |\, f\,| \, d\mu = \|\, g\,\|_\infty \; \|\, f\,\|_1.$$

Deuxième cas : p et q sont finis. L'inégalité de Hölder est évidente si $\|\, f\,\|_p = 0$ ou $\|\, g\,\|_q = 0$. En effet si par exemple $\|\, f\,\|_p = 0$ alors $|\, f\,| = 0$ μ-p.p. donc $|\, fg\,| = 0$ μ-p.p. et par conséquent $\|\, fg\,\|_1 = 0$. Nous supposons donc maintenant que $\|\, f\,\|_p \neq 0$ et $\|\, g\,\|_q \neq 0$.

Rappelons la concavité du logarithme :

$$\forall \alpha \in [0, 1],\ \forall x, y > 0, \quad \ln(\alpha x + (1 - \alpha) y) \geq \alpha \ln(x) + (1 - \alpha) \ln(y).$$

En posant $\alpha = 1/p$, et donc $1 - \alpha = 1/q$, ainsi que $x = |\, a\,|^p$ et $y = |\, b\,|^q$, on obtient

$$\ln\left(\frac{|\, a\,|^p}{p} + \frac{|\, b\,|^q}{q} \right) \geq \frac{1}{p} \ln(|\, a\,|^p) + \frac{1}{q} \ln(|\, b\,|^q) = \ln(|\, ab\,|),$$

1. mais dont nous verrons qu'il ne s'agit en fait que d'une semie-norme
2. mais on devrait dire μ-supremum essentiel
3. typiquement $p = q = 2$ ou $p = 1$ et $q = +\infty$

et donc par croissance de l'exponentielle,

$$\frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} \geq |ab|.$$

Ainsi avec

$$a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad \text{et} \quad b := \frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

on obtient

$$\frac{|fg(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

En intégrant chaque membre, la croissance de l'intégrale implique

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ce qui est l'inégalité attendue. □

10.2.3 Inégalité de Minkowski

Proposition 10.5 *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, si $f, g \in \mathscr{L}^p$, alors $f + g \in \mathscr{L}^p$ et*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Dém. Premier cas : $p = 1$. Par l'inégalité triangulaire $|f + g| \leq |f| + |g|$, donc $f + g \in \mathscr{L}^1$ et par croissance de l'intégrale,

$$\|f + g\|_1 \leq \int_E |f| \, d\mu + \int_E |g| \, d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Deuxième cas : $p = +\infty$. Par définition du supremum essentiel, $|f| \leq \|f\|_\infty$ et $|g| \leq \|g\|_\infty$ μ-p.p. donc par l'inégalité triangulaire, $|f + g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ μ-p.p. Mais par définition du supremum essentiel à nouveau, pour tout $A \geq 0$ tel que $\mu(\{|f + g| > A\}) = 0$, on a $\|f + g\|_\infty \leq A$, donc ici $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Troisième cas : $p \in]1, +\infty[$. Notons $h := |f + g|$. Alors $h \in \mathscr{L}^p$ car pour tous $x, y \geq 0$,

$$(x + y)^p \leq 2^p \big(\max(x, y)\big)^p = 2^p \max\big(x^p, y^p\big) \leq 2^p \big(x^p + y^p\big),$$

ce qui implique que $\int h^p \, d\mu \leq 2^p \big(\int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu\big) < \infty$. Soit q le nombre conjugué de p. Comme $h \in \mathscr{L}^p$, $h^{p-1} \in \mathscr{L}^q$ puisque $q(p - 1) = p$. Donc grâce à l'inégalité de Hölder appliquée à $h^{p-1} \in \mathscr{L}^q$ et $f \in \mathscr{L}^p$,

$$\int_E |f| \, h^{p-1} \, d\mu = \|f h^{p-1}\|_1 \leq \|f\|_p \, \|h^{p-1}\|_q.$$

De même,

$$\int_E |g| \, h^{p-1} \, d\mu \leq \|f\|_p \, \|h^{p-1}\|_q.$$

Or

$$h^p = |\, f + g \,| h^{p-1} \leq |\, f \,| h^{p-1} + |\, g \,| h^{p-1},$$

donc

$$\int_E h^p \, d\mu \leq \|\, f \,\|_p \, \|\, h^{p-1} \,\|_q + \|\, g \,\|_p \, \|\, h^{p-1} \,\|_q = (\|\, f \,\|_p + \|\, g \,\|_p) \left(\int_E h^{q(p-1)} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}},$$

autrement dit

$$\|\, h \,\|_p^p \leq (\|\, f \,\|_p + \|\, g \,\|_p) \, \|\, h \,\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

On peut supposer que $\|\, h \,\|_p \neq 0$, faute de quoi l'inégalité de Minkowski devient triviale, donc en divisant chaque membre par $\|\, h \,\|_p^{p/q}$, on obtient

$$\|\, h \,\|_p \leq \|\, f \,\|_p + \|\, g \,\|_p,$$

qui est l'inégalité souhaitée. □

10.3 Espace $\mathscr{L}^p$ et espace L^p

On rappelle la notion de norme sur un espace vectoriel F.

Définition 10.6 *Une fonction $N : F \to \mathbb{R}_+$ est appelée* norme *si*
(i) pour tout $v \in F$, $N(v) = 0$ ssi $v = 0$
(ii) [homogénéité] pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $v \in F$, $N(av) = |\, a \,|\, N(v)$
(iii) [inégalité triangulaire] pour tous $u, v \in F$, $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$.
Si (i) est remplacé par la propriété plus faible (i') : $N(0) = 0$, alors N est appelée une semie-norme*.*

Remarque 10.7 *On rappelle qu'une norme N sur un e.v. F induit une topologie sur F, la topologie relative à la distance $d(u, v) := N(u - v)$.*

Proposition 10.8 *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $(\mathscr{L}^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel semi-normé.*

Dém. Soient $f, g \in \mathscr{L}^p$ et $a \in \mathbb{R}^\star$.
(i') Si $f = 0$, alors $|\, f \,|^p = 0$, dont l'intégrale est nulle, donc $\|\, f \,\|_p = 0$.
(ii) évident par linéarité de l'intégrale si $p < \infty$. Si $p = +\infty$, @

$$\begin{aligned}\|\, af \,\|_\infty &= \inf\{m > 0 : \mu(\{|\, af \,| \geq m\}) = 0\} \\ &= |\, a \,| \inf\{m' > 0 : \mu(\{|\, af \,| \geq |\, a \,| m'\}) = 0\} \\ &= |\, a \,| \inf\{m' > 0 : \mu(\{|\, f \,| \geq m'\}) = 0\} = |\, a \,|\, \|\, f \,\|_\infty.\end{aligned}$$

(iii) Inégalité de Minkowski. □

Si N est une semie-norme sur un e.v. F, il existe un procédé classique consistant à modifier F pour que N devienne une norme, et qui consiste à identifier u et $v \in F$ dès que $N(u-v)=0$. Rigoureusement, il s'agit de définir l'*espace quotient* de F par la relation d'équivalence

$$u \sim v \Longleftrightarrow N(u-v)=0,$$

c'est-à-dire l'ensemble constitué des classes d'équivalence de $\sim$. Ici, quel que soit $p \in [1,+\infty]$, pour tous $f, g \in \mathscr{L}^p$,

$$\| f-g \|_p = 0 \Leftrightarrow \mu(\{f \neq g\}) = 0 \Leftrightarrow f = g \quad \mu\text{-p.p.}$$

La relation d'équivalence associée à chaque semie-norme $\| \cdot \|_p$ ne dépend donc pas de p et est la même pour tous les espaces $\mathscr{L}^p$:

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \quad \mu\text{-p.p.}$$

Définition 10.9 *Pour $p \in [1,+\infty]$, on note $L^p(E,\mathscr{A},\mu)$, ou $L^p(\mu)$, l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de $\mathscr{L}^p(\mu)$ par la relation d'équivalence définie par l'égalité μ-p.p.*

Soit $\overline{f} := \{g : g = f \ \mu\text{-p.p.}\}$ la classe d'équivalence de f. Les opérations classiques s'étendent aux classes d'équivalence, avec $\overline{af} = a\overline{f}$ et $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$.

On peut également définir $\| \cdot \|_p$ sur $L^p(\mu)$ par $\| \overline{f} \|_p = \| f \|_p$, qui ne dépend pas du représentant choisi, car $f = g$ μ-p.p. implique $\| f \|_p = \| g \|_p$.

Remarque 10.10 *On fera systématiquement l'abus de notation qui consiste à ne pas différencier fonctions et classes d'équivalences, c'est-à-dire à utiliser le même symbole pour une fonction f et pour sa classe d'équivalence $\overline{f}$.*

On a alors immédiatement ce qu'on cherchait.

Théorème 10.11 *L'ensemble $(L^p(\mu), \| \cdot \|_p)$ est un espace vectoriel normé.*

Exemple 10.12 *On note ℓ^p l'espace $\mathscr{L}^p(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), m)$, où m est la mesure de comptage. Soit $u \in \ell^p$. Si $p < \infty$, alors*

$$\| u \|_p = \left(\sum_n | u_n |^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

tandis que si $p = +\infty$,

$$\| u \|_\infty = \sup_n | u_n |.$$

Il n'est pas besoin ici de quotienter $\mathscr{L}^p$ car $\| u \|_p = 0$ implique $u = 0$.

Proposition 10.13 *a) pour tous $p \leq q$, on a l'inclusion $\ell^p \subseteq \ell^q$.*

b) Si μ est finie, *alors pour tous $p \leq q$, on a l'inclusion $L^p(\mu) \supseteq L^q(\mu)$.*

Dém. En exercice. $\square$ @

Remarque 10.14 *Si μ n'est pas finie, il n'y a pas d'inclusion générale, comme en atteste le contre-exemple suivant avec $(E, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$: avec*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathbb{1}_{]0,1]}(x) \quad \textit{et} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

on voit facilement que f est dans $\mathscr{L}^1$ mais pas dans $\mathscr{L}^2$, et que g est dans $\mathscr{L}^2$ mais pas dans $\mathscr{L}^1$.