Pourquoi définir la mesure de Lebesgue ?

Pour mesurer des ensembles compliqués comme par exemple:

- l'ensemble des rationnels de $[0,1]$: sa mesure est nulle.
- son complémentaire, l'ensemble des irrationnels de $[0,1]$: sa mesure est 1.

Quelle est la mesure d'un intervalle ?

La mesure d'un intervalle $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$ est toujours $b-a$.

Quels sont les ensembles mesurables de $\mathbb{R}$?

Quasiment tous ... il est difficile d'en construire un qui ne l'est pas.

Comment montrer qu'un ensemble est de mesure nulle ?

On montre qu'il est possible de l'inclure dans un ensemble dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs est arbitrairement petite.
Les ensembles finis, les ensembles dénombrables (en bijection avec $\mathbb{N}$, i.e. que l'on peut énumérer) sont des ensembles de mesure nulle.

A quoi sert une norme ?

Une norme sert à mesurer la taille d'un objet ou la distance entre deux objets, comme la valeur absolue dans $\mathbb{R}$, la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$. Sur un espace de fonctions, une norme va permettre de donner un sens à des phrases comme : "ces deux fonctions sont proches", "ces deux signaux sont proches", "ces deux systèmes sont proches".

A quoi sert la notion de convergence ?

La notion de convergence permet d'approcher un objet "compliqué" par des objets plus "simples". Par exemple, la suite

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \\ u_0 &= \frac{3}{2} \end{cases}$$

est une suite de nombre rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$.
De même, on cherchera à approcher (représenter) les signaux périodiques par des objets plus simples, les séries de Fourier et on se posera des problèmes de convergence.

Qu'est-ce qu'un espace complet ?

Un espace complet est un espace dans lequel une suite "qui a tout pour converger" (suite de Cauchy) converge effectivement. Lorsqu'un espace n'est pas complet, c'est qu'il lui "manque" des points ... Par exemple, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet : la suite u_n de la question précédente est de Cauchy, mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Le complété de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$.

Pourquoi définir l'intégrale de Lebesgue ?

L'intégrale de Riemann est définie pour des fonctions continues par morceaux, or

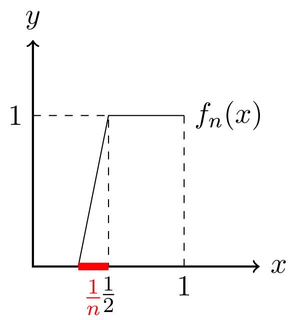
- on veut pouvoir calculer des surfaces qui sont limitées par des courbes éventuellement bizarres (pas continues du tout),
- les fonctions que l'on veut intégrer en pratique (signaux ..) ne sont généralement pas continus.

Il faut une intégrale pour laquelle plus de fonctions soit intégrables !

Pour l'ensemble des fonctions Riemann intégrable sur un intervalle $[a, b]$, l'application

$$I : f \to I(f) = \int_a^b |f(x)| dx$$

n'est pas une norme car on n'a pas $(I(f) = 0) \Rightarrow (f = 0)$. Prendre par exemple une fonction qui vaut zéro sauf en un nombre fini de points : son intégrale de Riemann est nulle, mais pas elle !
Si on se limite aux fonctions continues sur $[a, b]$, alors $I : C([a, b]) \mapsto \mathbb{R}^+$ est bien une norme (cf TD), mais l'espace vectoriel normé obtenu n'est pas complet. Par exemple, la suite de fonctions f_n converge vers une fonction qui n'est pas continue :



Pour avoir un espace vectoriel normé complet, il faut considérer l'ensemble des fonctions Lebesgue intégrable $L^1([a, b])$. La notion de presque partout permet de montrer que $I : L^1([a, b]) \mapsto \mathbb{R}^+$ est une norme. $L^1([a, b])$ est le complété de $C([a, b])$.

A quoi sert la notion de presque partout ?

La notion de presque partout est essentielle car deux fonctions égales presque partout ont même integrale. Ce qui se passe sur un ensemble de mesure nulle n'a pas d'influence sur l'intégrabilité. Du point de vue de l'intégration, on peut identifier deux fonctions égales presque partout. Réciproquement, deux fonctions qui ont même intégrale sont égales presque partout. C'est grâce à cette propriété que l'application $I : L^1([a, b]) \mapsto \mathbb{R}^+$ est une norme.

Quelles sont les différences entre Riemann et Lebesgue ?

- une fonction $f(x)$ peut ne pas être Riemann intégrable alors que $|f(x)|$ l'est. Par exemple, la fonction définie sur $[0, 1]$ qui vaut 1 sur les rationnels et -1 sur les irrationnels n'est pas Riemann intégrable alors que sa valeur absolue l'est.
  Par définition, f est Lebesgue intégrable si et seulement si $|f|$ l'est.
- les fonctions Riemann intégrables et les intégrales généralisées absolument convergentes sont Lebesgue intégrables.
- par contre, avec l'intégrale de Lebesgue, il n'y a pas de notion d'intégrale semi-convergente.
- les théorèmes de convergences sont plus simples avec Lebesgue, il suffit de vérifier une hypothèse de domination.