TD1. Opérations ensemblistes.

Échauffements

Exercice 1. Soit X un ensemble, et soient A et B deux parties de X.
On rappelle que $A\Delta B = A \cup B \smallsetminus A \cap B = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$. Montrer que :

a) $(A \smallsetminus B) \cap (C \smallsetminus D) = (A \cap C) \smallsetminus (B \cup D)$;

b) $(A \cup B) = (A\Delta B)\Delta(A \cap B)$.

Solution de l'exercice 1.

a) On a $(A \smallsetminus B) \cap (C \smallsetminus D) = A \cap ({}^cB) \cap C \cap ({}^cD) = (A \cap C) \cap ({}^c(B \cup D)) = (A \cap C) \smallsetminus (B \cup D)$.

b) Comme $(A \cap B) \cap (A \smallsetminus B) = \emptyset$, on a $(A \cap B \cap (A\Delta B) = \emptyset$, et donc $(A\Delta B)\Delta(A \cap B) = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A) \cup (A \cap B) = A \cup B$.

i **Exercice 2.** Montrer qu'en général, de $\mathcal{P}(X \times Y)$ et $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$, aucun n'est inclus dans l'autre.

Images directes et réciproques

i **Exercice 3.** Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une fonction.

a) Soit $A \subseteq X$. Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ mais que l'égalité peut faire défaut. Montrer qu'on a égalité si f est injective.

b) Montrer que si pour tout sous-ensemble A de X, $A = f^{-1}(f(A))$, alors f est injective.

c) Soit $B \subseteq Y$. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ mais que l'égalité peut faire défaut. Montrer qu'on a égalité si f est surjective.

d) Montrer que si pour tout sous-ensemble B de Y, $f(f^{-1}(B)) = B$, alors f est surjective.

Solution de l'exercice 3.

a) Soit $a \in A$. Comme $f(a) \in f(A)$, on a par définition $a \in f^{-1}(f(A))$. L'inclusion peut être stricte : considérons par exemple la fonction carré de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, et $A = \mathbb{R}_+$. Si f est injective, on a pourtant égalité. Soit en effet $x \in f^{-1}(f(A))$. Par définition, $f(x) \in f(A)$, donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Par injectivité de f, il vient $x = a \in A$.

b) Supposons réciproquement que l'égalité précédente est vraie pour tout sous-ensemble A de X. Soient alors x_1, x_2 dans X tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On considère $A = \{x_1\}$. Alors $x_2 \in f^{-1}(f(A)) = A = \{x_1\}$ donc $x_1 = x_2$: f est injective.

c) Soit à présent $y \in f(f^{-1}(B))$. Par définition, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Mais par définition de x, $f(x) \in B$. Donc $y \in B$. L'inclusion peut ici encore être stricte : considérons la fonction carré de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$. Si f est surjective, on a pourtant égalité. Soit $b \in B$. Comme f est surjective, il existe $x \in X$ tel que $b = f(x)$. Donc par définition, $x \in f^{-1}(B)$ et $b \in f(f^{-1}(B))$.

d) Supposons réciproquement l'égalité précédente vérifiée pour tout sous-ensemble B de Y. Soit $y \in Y$. On considère $B = \{y\}$; comme $B = f(f^{-1}(B))$ n'est pas vide, $f^{-1}(B)$ n'est pas vide non plus. f est donc surjective.

i **Exercice 4.** Soit X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X et $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties de Y (I et J non vides). Montrer

a) que $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$, et que $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ – avec égalité quand f est injective ;

b) que $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ et que $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;

c) que ${}^c f^{-1}(B) = f^{-1}({}^c B)$, mais qu'il n'y a pas de lien entre ${}^c f(A)$ et $f({}^c A)$.

Solution de l'exercice 4.

a) Soit $y \in f(\bigcup_{i\in I} A_i)$; par définition, il existe $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$. Il y a donc $i \in I$ tel que $x \in A_i$, et il est clair que $y \in f(A_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. Supposons réciproquement $y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$; il existe donc $i \in I$ tel que $y \in f(A_i)$, et $x \in A_i$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, on a bien $y \in f(\bigcup_{i\in I} A_i)$.
Soit à présent $y \in f(\bigcap_{i\in I}(A_i)$. Il existe $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$. Pour chaque i, on a $x \in A_i$, donc $y \in f(A_i)$. Ainsi $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. Cette inclusion peut être stricte : considérer A_1 et A_2 disjoints de même image ! En revanche si f est injective, on a égalité. En effet soit $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. Pour chaque $i \in I$, il existe $x_i \in A_i$ tel que $y = f(x_i)$. Mais par injectivité de f, tous les x_i sont égaux. Donc, appelant cet élément x, on a $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, et $y \in f(\bigcap_{i\in I} A_i)$.

b) Soit $x \in f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j)$; par définition, $f(x) \in \bigcup_{j\in J} B_j$ donc il existe $j \in J$ tel que $f(x) \in B_j$. Alors $x \in f^{-1}(B_j)$ et donc $x \in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$. Supposons réciproquement $x \in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$. Il existe $j \in J$ tel que $x \in f^{-1}(B_j)$, c'est-à-dire $f(x) \in B_j \subseteq \bigcup_{j\in J} B_j$. Donc $x \in f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j)$.
Soit à présent $x \in f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j)$. Par définition, $f(x) \in \bigcap_{j\in J} B_j$. Donc pour tout $j \in J$, $x \in f^{-1}(B_j)$, et $x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$. Supposons réciproquement $x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$. Alors pour tout $j \in J$, $x \in f^{-1}(B_j)$, c'est-à-dire $f(x) \in B_j$. Ainsi $f(x) \in \bigcap_{j\in J} B_j$ et $x \in f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j)$.

c) Soit $x \in ({}^c f^{-1}(B))$. Comme $x \notin f^{-1}(B)$, on a $f(x) \notin B$, et donc $f(x) \in ({}^c B)$. Ainsi $x \in f^{-1}({}^c B)$. Réciproquement, si $x \in f^{-1}({}^c B)$, alors $f(x) \in ({}^c B)$, donc $f(x) \notin B$, et $x \notin f^{-1}(B)$.

Exercice 5. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

a) Soit $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ qui à $A \subseteq X$ associe $f(A)$.

   i) Montrer que f est injective si et seulement si Φ l'est.

   ii) Montrer que f est surjective si et seulement si Φ l'est.

b) Soit $\Psi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ qui à $B \subseteq Y$ associe $f^{-1}(B)$.

   i) Montrer que f est injective si et seulement si Ψ est surjective.

   ii) Montrer que f est surjective si et seulement si Ψ est injective.

Fonctions indicatrices

i **Exercice 6.** Soient A, B, C des parties de X.
Les fonctions suivantes (définies sur X) sont-elles nécessairement des indicatrices ? (Si oui, de quelle partie de X ?)
a) $1_A + 1_B$; b) $1_A - 1_B$; c) $1_A 1_B$; d) $| 1_A - 1_B |$; e)$1_A + 1_B - 1_A 1_B$;
f) $|| 1_A - 1_B | - 1_C |$; g) $| 1_A - | 1_B - 1_C ||$; h) $\sup(1_A, 1_B)$; i) $\inf(1_A, 1_B)$.

Solution de l'exercice 6. Le lecteur doit savoir qu'une fonction est une indicatrice si et seulement si elle est à valeurs dans $\{0, 1\}$. En conséquence, voici les réponses.

a) $1_A + 1_B$ n'est pas une indicatrice dès que $A \cap B \neq \emptyset$, car elle prend sur $A \cap B$ la valeur 2. En revanche, si A et B sont disjoints, c'est l'indicatrice de $A \cup B$.

b) $1_A - 1_B$ n'est pas une indicatrice dès que $B \not\subseteq A$, car elle prend sur $B \setminus A$ la valeur -1. En revanche, si $B \subseteq A$, c'est l'indicatrice de $A \setminus B$.

c) $1_A 1_B$ est l'indicatrice de $A \cap B$.

d) $|1_A - 1_B|$ est l'indicatrice de $A \Delta B$.

e) $1_A + 1_B - 1_A 1_B$ est l'indicatrice de $A \cup B$.

f) Comme $\mid 1_A - 1_B \mid$ est l'indicatrice de $A\Delta B$, $|| \, 1_A - 1_B \mid -1_C \mid$ est celle de $(A\Delta B)\Delta C$.

g) De même, $\mid 1_A - \mid 1_B - 1_C \mid|$ est l'indicatrice de $A\Delta(B\Delta C)$.
Remarque : comme on a $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$, c'est la même réponse qu'à la question précédente : une démonstration, un calcul, ou un simple dessin permettront de s'en convaincre.

h) $\sup(1_A, 1_B)$ est l'indicatrice de $A \cup B$.

i) $\inf(1_A, 1_B)$ est l'indicatrice de $A \cap B$.

Exercice 7. Soit X un ensemble. Montrer qu'il y a une bijection entre l'ensemble des sous-ensembles de X (noté souvent $\mathcal{P}(X)$) et l'ensemble des fonctions de X dans $\{0,1\}$ (souvent noté $\{0,1\}^X$).

Solution de l'exercice 7. À un sous-ensemble Y de X nous associerons sa fonction indicatrice 1_Y. Ceci définit une fonction : $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$ dont nous montrons à présent qu'elle est bijective. Vous pouvez le vérifier à la main : c'est d'ailleurs un très bon exercice. Une autre méthode efficace pour prouver la bijectivité est tout simplement de donner la bijection réciproque, c'est-à-dire de décrire une fonction $\Psi : \{0,1\}^X \to \mathcal{P}(X)$ telle que :

$$\begin{cases} \Phi \circ \Psi & = & Id_{\{0,1\}^X} \\ \Psi \circ \Phi & = & Id_{\mathcal{P}(X)} \end{cases}$$

Comme c'est plus élégant, nous suivons cette voie. Soit donc la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \{0,1\}^X & \to & \mathcal{P}(X) \\ & f & \mapsto & f^{-1}(\{1\}) \end{array}$$

Il nous reste à vérifier que l'on a bien $\Phi \circ \Psi = Id_{\{0,1\}^X}$ et $\Psi \circ \Phi = Id_{\mathcal{P}(X)}$.

– Soit $f \in \{0,1\}^X$. Nous voulons montrer que $\Phi \circ \Psi(f) = f$. Soit, par commodité, g la fonction $\Phi \circ \Psi(f)$; g et f sont des fonctions $X \to \{0,1\}$, et pour montrer leur égalité il suffit de prouver qu'elles coïncident partout. Soit $Y = \Psi(f) = f^{-1}(\{1\})$. Par définition de Φ, $g = 1_Y$, si bien que pour tout $x \in X$:
$$g(x) = 1 \Leftrightarrow x \in Y \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow f(x) = 1$$
et sinon les deux valent 0. f et g coïncident donc ; on a $f = g$, et comme cela est vrai pour toute fonction $f \in \{0,1\}^X$, on en déduit $\Phi \circ \Psi = Id_{\{0,1\}^X}$.
– Soit maintenant $Y \in \mathcal{P}(X)$. Nous voulons montrer que $\Psi \circ \Phi(Y) = Y$. Soit par commodité $Z = \Psi \circ \Phi(Y)$, qui est bien une partie de X. Montrons alors que Y et Z ont les mêmes éléments. Par construction, $\Phi(Y)$ est l'indicatrice de Y, si bien que $Z = 1_Y^{-1}(\{1\})$. On a donc pour tout $x \in X$:
$$x \in Y \Leftrightarrow 1_Y(x) = 1 \Leftrightarrow x \in 1_Y^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow x \in Z$$
et le tour est joué : $Y = Z$.

Nous avons bien construit une fonction Ψ réciproque de Φ ; Φ est donc bijective.
(Rappelons brièvement, pour ceux qui l'auraient oublié, d'où provient cette conclusion. Comme $\Psi \circ \Phi = Id_{\mathcal{P}(X)}$ qui est injective, Φ est injective ; comme $\Phi \circ \Psi = Id_{\{0,1\}^X}$ qui est surjective, Φ est surjective. Si ces derniers points vous laissent perplexe, vous avez besoin de traiter l'exercice élémentaire suivant : $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective et $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.)

Exercice 8. Montrer que

$$\mathbf{1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots n\} \\ \text{card}\,(I) = k}} \mathbf{1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

Solution de l'exercice 8. On fait une récurrence sur n. Si $n = 1$, $1_{A_1} = 1_{A_1}$.
On a besoin du cas $n = 2$: $1_{A\cup B} = 1_{\mathbb{A}}(1 - 1_B) + 1_B$. Supposons le résultat vérifié pour n. On a

$$\begin{aligned} 1_{\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i} &= 1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}(1 - 1_{A_{n+1}}) + 1_{A_{n+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots n\} \\ \text{card}(I) = k}} 1\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)(1 - 1_{A_{n+1}}) + 1_{A_{n+1}} \end{aligned}$$

On a déduit :

$$1_{\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i} = \sum_{i\in\{1,\dots,n\}} 1_{A_i} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots n\} \\ \text{card}(I) = k}} 1_{\cap_{i\in I} A_i} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{\substack{\text{card}(I) = k \\ n+1 \in I}} 1_{\cap_{i\in I} A_i}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} 1_{\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i} &= \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots n\} \\ \text{card}(I) = k}} 1_{\cap_{i\in I} A_i} + \sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k+1} \sum_{\substack{\text{card}(I) = k \\ n+1 \in I}} 1_{\cap_{i\in I} A_i} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots n\} \\ \text{card}(I) = k}} 1_{\cap_{i\in I} A_i} + (-1)^{n+2} 1_{A_1\cap\cdots\cap A_{n+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots n\} \\ \text{card}(I) = k}} 1_{\cap_{i\in I} A_i}. \end{aligned}$$

C'est le résultat recherché.

Quelques bijections à retenir

Exercice 9. Soient A, B, C, D quatre ensembles. On suppose que A et B sont en bijection, et que C et D sont en bijection.

a) Montrer que $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ sont en bijection.

b) On suppose que $A \cap C = B \cap D = \emptyset$. Montrer que $A \cup C$ et $B \cup D$ sont en bijection.

c) Montrer que $A \times C$ et $B \times D$ sont en bijection.

d) Montrer que A^C et B^D sont en bijection.

Solution de l'exercice 9. Par hypothèse, il existe deux bijections $f : A \simeq B$ et $g : C \simeq D$.

a) Construisons une bijection entre $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(C)$. Soit $\Phi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(C)$ qui à $X \subseteq A$ associe $\Phi(X) = \{f(x) : x \in X\} (= f(X))$. Φ est bijective.

En effet, si $\Phi(X_1) = \Phi(X_2)$, soit $x_1 \in X_1$; on montre que $x_1 \in X_2$. Comme $x_1 \in X_1$, on a $f(x_1) \in \Phi(X_1) = \Phi(X_2)$, donc il existe $x_2 \in X_2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Mais par injectivité de f, on a $x_1 = x_2 \in X_2$. Donc $X_1 \subseteq X_2$, et l'on montre de même l'inclusion réciproque. Ceci prouve que Φ est injective.

Soit à présent $Y \in \mathcal{P}(C)$: on trouve $X \in \mathcal{P}(A)$ tel que $Y = \Phi(X)$. Pour tout $y \in Y$, il existe un unique $a_y \in A$ tel que $f(a_y) = y$. Soit $X = \{a_y : y \in Y\}$. Alors $\Phi(X) = Y$ comme on s'en convainc aisément.

b) Construisons une bijection h_1 entre $A \cup C$ et $B \cup D$. Si $x \in A$, on pose $h_1(x) = f(x)$; si $x \in C$, on pose $h_1(x) = g(x)$. (Noter que les deux cas s'excluent mutuellement car $A \cap C = \emptyset$; h_1 est donc bien définie.) Il est clair que h_1 réalise une bijection entre $A \cup C$ et $B \cup D$.

Si ce n'est pas clair, voici un argument. On montre d'abord l'injectivité. Soient $x, x' \in A \cup C$ ayant même image par h_1. Si $x \in A$ et $x' \in C$, on a $h_1(x) = f(x) \in B$ mais $h_1(x') = g(x') \in D$: c'est impossible car B et D sont disjoints. On suppose alors $x, x' \in A$. Alors $h_1(x) = f(x) = h_1(x') = f(x')$, donc par injectivité de f, on a bien $x = x'$. De même s'ils sont dans C. Montrons à présent la surjectivité. Soit $y \in B \cup D$. Si $y \in B$, comme g est surjective de A sur B, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x) = h_1(x)$. Si $y \in D$, on trouve de même x dans C. Dans les deux cas, il existe $x \in A \cup C$ d'image y : h_1 est surjective.

c) Soit h_2 qui à $(a, c) \in A \times C$ associe $(f(a), g(c))$. On voit sans peine que h_2 est une bijection entre $A \times C$ et $B \times D$.

d) C'est peut-être plus abstrait, et mérite qu'on s'y arrête. Un élément de A^C est une fonction de C dans A. À une telle fonction φ, on veut associer un élément de B^D, c'est-à-dire une fonction de D dans B. Si vous n'avez pas trouvé, il est indispensable de tracer un diagramme des ensembles en présence en indiquant les fonctions. Il est alors naturel d'associer à φ la fonction $f \circ \varphi \circ g^{-1} : D \to B$. On considère donc la fonction $h_3 = A^C \to B^D$ qui à $\varphi \in A^C$ associe $f \circ \varphi \circ g^{-1}$; h_3 est bijective.

Si vous n'aviez pas trouvé cette bijection, il est très important de vérifier les détails ; les voici. h_3 est injective : en effet si φ, ψ sont deux fonctions $C \to A$ ayant même image par h_3, on a pour tout $c \in C$, $\varphi(c) = f^{-1} \circ f \circ \varphi \circ g^{-1} \circ g(c) = f^{-1} \circ f \circ \psi \circ g^{-1} \circ g(c) = \psi(c)$, donc φ et ψ sont une seule et même fonction. h_3 est surjective : soit $\chi : B^D$ une fonction ; on pose $\varphi = f^{-1} \circ \chi \circ g : C \to A$ et l'on voit que $h_3(\varphi) = \chi$.

Exercice 10. Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que $A^{B \times C}$ est en bijection avec $(A^B)^C$.

Solution de l'exercice 10. L'étudiant sans inspiration devrait raisonner comme suit. $A^{B \times C}$ est l'ensemble des fonctions de $B \times C$ dans A, c'est-à-dire de certaines fonctions de *deux* variables. En revanche, $(A^B)^C$ est l'ensemble des fonctions de C dans A^B, c'est-à-dire de fonctions qui à tout $c \in C$, associent une fonction de B dans A. Tout cela se ressemble : on pense aux fonctions partielles. En effet, si l'on fixe une des deux variables, on trouve une fonction d'une seule variable !
[Si ce n'est toujours pas clair, imaginez une fonction de deux variables réelles $f(x, y)$. Cela correspond à avoir, pour tout x, la fonction $f(x, .)$ d'une seule variable réelle.]
Soit Φ la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & A^{B \times C} & \to & (A^B)^C \\ & f & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} C & \to & A^B \\ c & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} B & \to & A \\ b & \mapsto & f(b, c) \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array}$$

Φ est une bijection. Pour le montrer, le plus simple est ici de construire ce qui sera sa bijection réciproque. Soit Ψ la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & (A^B)^C & \to & A^{B\times C} \\ & G & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} B\times C & \to & A \\ (b,c) & \mapsto & [G(c)](b) \end{array} \right) \end{array}$$

Il est clair que Φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre, montrant la bijectivité de Φ.

Pour aller plus loin...

Exercice 11. [anneaux de Boole] Soit X un ensemble.

a) Montrer que $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif unitaire, de neutre (additif) $\emptyset$ et d'unité X.

b) On assimile dorénavant $+$ à Δ et $\cdot$ à $\cap$.
Montrer que $\forall a \in \mathcal{A}, a + a = 0$ et $a^2 = a$ (on dit que $\mathcal{A}$ est un anneau de Boole).

c) Soit $\mathcal{A}$ un anneau de Boole. Existe-t-il X tel que les anneaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P}(X)$ soient isomorphes ? Existe-t-il X tel que $\mathcal{A}$ soit un sous-anneau de $\mathcal{P}(X)$?