Université Pierre & Marie Curie (Paris 6) — Licence de Mathématiques L3
UE LM364 – Intégration 1 — Année 2011–12

TD2. Suites d'ensembles.

Échauffements

Exercice 1. Un sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ est cofini si $\mathbb{N} \setminus A$ est fini. Montrer que :

a) l'intersection de deux ensembles cofinis est cofinie ;

b) tout ensemble contenant un ensemble cofini est cofini.

Est-ce encore vrai avec des ensembles finis ? avec des ensembles dénombrables ? codénombrables ?

i **Exercice 2.** Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$.

a) Montrer que $\liminf\,]-\infty, a_n] \subseteq\,]-\infty, \liminf a_n]$, mais que l'inclusion peut être stricte.

b) Montrer que $]-\infty, \liminf a_n[\, \subseteq \liminf\,]-\infty, a_n[$, mais que l'inclusion peut être stricte.

Solution de l'exercice 2. Nous noterons, pour $n \in \mathbb{N}$, $i_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$. La suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement croissante.

a) Soit $x \in \liminf] - \infty, a_n]$. On montre que $x \leq \liminf a_n$. Comme $x \in \liminf] - \infty, a_n]$, on a par définition : $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ x \leq a_n$. En particulier, $x \leq i_{n_0}$. Comme la suite (i_n) est croissante, on a ainsi $x \leq \liminf a_n$.
L'inclusion démontrée peut pourtant être stricte. Considérons $a_n = -\frac{1}{n}$. Alors $\liminf a_n = 0$ donc $]-\infty, \liminf a_n] =]-\infty, 0]$, mais $\liminf] - \infty, a_n] = \bigcup_n] - \infty, -\frac{1}{n}] =] - \infty, 0[$.

b) Soit à présent $x < \liminf a_n$. On montre que $x \in \liminf] - \infty, a_n[$. Comme (i_n) est croissante de limite $\liminf a_n > x$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x < i_{n_0}$. En particulier, pour tout $n \geq n_0$, on a $x < a_n$. Donc $x \in \bigcap_{n\geq n_0}] - \infty, a_n[$, et $x \in \liminf] - \infty, a_n[$.
L'inclusion démontrée peut pourtant être stricte. Considérons $a_n = \frac{1}{n}$. Alors $\liminf a_n = 0$, donc $]-\infty, \liminf a_n[=]-\infty, 0[$, mais $\liminf] - \infty, a_n[= \bigcup_n] - \infty, \frac{1}{n}[=] - \infty, 0]$.

Limites d'ensembles

i **Exercice 3.** Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble X et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction.

a) Montrer que $\limsup A_{\varphi(n)} \subseteq \limsup A_n$.

b) Montrer que $\liminf A_n \subseteq \liminf A_{\varphi(n)}$.

c) On suppose que (A_n) converge vers $B \subseteq X$. Montrer que $(A_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers B.

d) Trouver un cas où $(A_{\varphi(n)})$ converge mais pas (A_n).

e) On suppose que $(A_{2n})_n$ et $(A_{2n+1})_n$ convergent vers le même ensemble B. Montrer que (A_n) tend aussi vers B.

Solution de l'exercice 3.

a) Soit $x \in \limsup A_{\varphi(n)}$. Par définition, $\forall \varphi(n) \in \mathbb{N}\ \exists \varphi(k) \geq \varphi(n)\ x \in A_{\varphi(k)}$. Notamment, si n est donné, il existe $\ell = \varphi(k) \geq \varphi(n) \geq n$ tel que $x \in A_\ell$. Ceci signifie que $x \in \limsup A_n$.

b) La démonstration est très similaire ; donnons-la quand même. Soit $x \in \liminf A_n$. Alors $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall k \geq n,\ x \in A_k$; fixons un tel n. Comme φ est croissante, on a mÃłme $\forall k \in \mathbb{N},\ (\varphi(k) \geq \varphi(n)) \Rightarrow (x \in A_k)$. On a ainsi : $\exists \varphi(n)\ \forall \varphi(k) \geq \varphi(n),\ x \in A_{\varphi(k)}$. Ce qui signifie que $x \in \liminf A_{\varphi(n)}$.

c) Il suffit de montrer que $\limsup A_{\varphi(n)} \subseteq B \subseteq \liminf A_{\varphi(n)}$. Or on a $\limsup A_{\varphi(n)} \subseteq \limsup A_n = B$, et $B = \liminf A_n \subseteq \liminf A_{\varphi(n)}$.

d) C'est trop simple ! on prend $A_n = \{0\}$ si n est pair, et $A_n = \{1\}$ si n est impair.

e) Nous montrons que $\limsup A_n \subseteq B \subseteq \liminf A_n$. Soit en effet $x \in \limsup A_n$. Alors l'ensemble des n tels que $x \in A_n$ est infini ; il contient donc une infinité d'entiers pairs (auquel cas $x \in \limsup A_{2n} = B$) ou une infinité d'entiers impairs (auquel cas $x \in \limsup A_{2n+1} = B$). Dans les deux cas $x \in B$. Soit à présent $x \in B$. Comme $\liminf A_{2n} = B$, tous les entiers pairs à partir d'un certain rang vérifient $x \in A_{2n}$. Comme $\liminf A_{2n+1} = B$ aussi, tous les entiers impairs à partir d'un certain rang vérifient $x \in A_{2n+1}$. Donc tous les entiers à partir d'un certain rang vérifient $x \in A_n$, c'est-à-dire que $x \in \liminf A_n$, comme désiré.

i **Exercice 4.**

a) Déterminer $\lim_n \left[-\frac{1}{n}, 1\right]$ et $\lim_n \left]-\frac{1}{n}, 1\right]$.

b) Donner un exemple de suite non constante de parties de $\mathbb{R}$ dont la limite est $]0, 1]$.

c) Déterminer les limites supérieure et inférieure de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathbb{R}$ définie par

$$B_{2n-1} = \left]-2 - \frac{1}{n}, 1\right] \quad \text{et} \quad B_{2n} = \left[-1, 2 + \frac{1}{n^2}\right[.$$

d) Existe-t-il une suite d'ensembles de limite supérieure $[-1, 2]$ et de limite inférieure $[-2, 1]$?

e) Trouver une condition portant sur les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$\lim_n \,[a_n, b_n] = [-1, 1[.$$

f) Est-il possible que $\lim_n [a_n, 6]$ n'existe pas quand la suite réelle a converge vers 5 ?

Solution de l'exercice 4.

a) La suite $([-\frac{1}{n}, 1])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, donc elle converge vers $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}[-\frac{1}{n}, 1] = [0, 1]$.
La suite $(]-\frac{1}{n}, 1])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, donc elle converge vers $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, 1] = [0, 1]$.

b) Cherchons une suite de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ de limite $]0, 1]$. Les deux premières constructions qui peuvent venir à l'esprit sont celles de la question précédente, mais leur limite est $[0, 1]$: il faut trouver autre chose. Si l'on veut éviter 0, l'intuition suggère qu'il faut s'en rapprocher *par la droite.*
Soit $A_n = \left]\frac{1}{n}, 1\right]$. Cette suite est croissante, et son union est clairement $]0, 1]$. On a donc, toujours par la même technique, que la suite converge vers $]0, 1]$.

c) Un dessin suggère la solution. Tout le truc est de ne pas s'effrayer des indices et de séparer le cas n pair/n impair pour déterminer les unions et intersections.
La suite des $C_n = B_{2n}$ est clairement décroissante ; on a $\bigcup_{m\geq n} C_m = C_n$. En outre $\bigcap_{m\geq n} C_m = [-1, 2]$ comme on s'en convainc sans peine. D'autre part la suite des $D_n = B_{2n+1}$ est tout aussi clairement décroissante ; cette fois $\bigcap_{m\geq n} D_m = [-2, 1]$.
Ceci étant dit, on voit que si $n = 2k$ est pair, $\bigcup_{m\geq n} B_m = C_k \cup D_{k+1}$ mais que si $n = 2k+1$ est impair, $\bigcup_{m\geq n} B_m = D_k \cup C_{k+1}$. En revanche, quel que soit n, $\bigcap_{m\geq n} B_m = [-1, 2] \cap [-2, 1] = [-1, 1]$. Ainsi, $\liminf B_n = [-1, 1]$ et $\limsup B_n = [-2, 2]$.

d) C'est évidemment impossible ! On sait que pour toute suite (A_n), on a $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$. Si ce n'est plus clair, il faut savoir le redémontrer en revenant aux définitions.

e) Un dessin finit par donner quelques idées. Il est clair que a_n doit tendre vers -1 et b_n vers 1 (intuition compréhensible) ; reste à trouver les bornes requises. Il peut sembler raisonnable de penser d'abord qu'il faut que a_n et b_n croissent vers leur limite, mais un dessin (ou le fait de ne pas arriver à faire la démonstration) suggère que la condition n'est en fait pas bonne. En revanche, on imagine que vu les bornes, il faut que $a_n \le -1$ et $b_n < 1$, du moins - puisqu'il s'agit de limites - *à partir d'un certain rang*. Formulons la condition : (a_n) tend vers -1, (b_n) tend vers 1, et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \ge n_0 \Rightarrow a_n \le -1 \wedge b_n < 1$ (on dit que (a_n) est à valeurs ultimement inférieures ou égales à -1 et (b_n) à valeurs ultimement strictement inférieures à 1.

Reste à montrer la chose. Un peu de théorie : une suite (A_n) de parties converge si et seulement si $\liminf A_n = \limsup A_n$. Et plus précisément, (A_n) converge vers B si et seulement si $\limsup A_n \subseteq B \subseteq \liminf A_n$ (vérifier cette équivalence). Posons $A_n = [a_n, b_n]$ et $B = [-1, 1[$. Nous pouvons montrer :

$$[a_n, b_n] \to [-1, 1[\Leftrightarrow \begin{cases} a_n \to -1 \\ b_n \to 1 \\ \exists n_0 \ \forall n \ge n_0 \ a_n \le -1 \wedge b_n < 1 \end{cases}$$

- La condition est suffisante. En effet si elle est vérifiée, nous montrons que $\limsup A_n \subseteq B \subseteq \liminf A_n$. Soit $x \in \limsup A_n$. Si $x < -1$, alors comme $a_n \to -1$, il existe n_1 tel que $n \ge n_1 \Rightarrow a_n > x$, donc $x \notin \bigcup_{n \ge n_1} A_n$ et ainsi $x \notin \limsup A_n$: contradiction. Si $x \ge 1$, alors comme pour $n \ge n_0$ (n_0 donné par l'hypothèse) on a $b_n < 1 \le x$, on a $x \notin \bigcup_{n \ge n_0} A_n$, et ainsi $x \notin \limsup A_n$: encore contradiction. Ceci montre bien que $\limsup A_n \subseteq B$.
  Soit à présent $x \in B = [-1, 1[$; on montre que $x \in \liminf A_n$. Comme $x \ge -1$, on a $n \ge n_0 \Rightarrow x \ge a_n$. Comme $x < 1$ et que b_n tend vers 1, il existe n_1 tel que $n \ge n_1 \Rightarrow x < b_n$. Donc si $n \ge n_2 = \max(n_0, n_1)$, on a $x \in [a_n, b_n[= A_n$. Ainsi $x \in \bigcap_{n \ge n_2} A_n \subseteq \liminf A_n$.
- La condition est nécessaire. Supposons que $[a_n, b_n] \to [-1, 1[$. Montrons que $a_n \to -1$ par valeurs (ultimement) inférieures ou égales.
  Supposons $\forall n_1 \in \mathbb{N} \ \exists n \ge n_1 \ a_n > -1$. Ceci implique : $\forall n_1 \in \mathbb{N} \ \exists n \ge n_1 \ -1 \in {}^c[a_n, b_n]$, donc

$$-1 \in \bigcap_{n_1} \bigcup_{n \ge n_1} {}^c[a_n, b_n] = {}^c\left(\bigcup_{n_1} \bigcap_{n \ge n_1} [a_n, b_n]\right)$$

  c'est-à-dire $-1 \notin \liminf [a_n, b_n]$: contradiction. On a donc en fait $\exists n_1 \ \forall n \ge n_1 \ a_n \le -1$. On montre de même que $\exists n_2 \ \forall n \ge n_2 \ b_n < 1$. En prenant $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a montré qu'ultimement, $a_n \le -1 \wedge b_n < 1$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Comme $-1-\varepsilon \notin [-1, 1[= \limsup A_n$, il existe n_t tel que $n \ge n_t \Rightarrow -1-\varepsilon \notin [a_n, b_n]$, c'est-à-dire $a_n > -1-\varepsilon$ ou $-1-\varepsilon > b_n$. Nous devons montrer que c'est le premier cas qui se produit et pas l'autre. Supposons que $-1 > -1-\varepsilon > b_n$ se produise infiniment souvent. Alors infiniment souvent, $-1 \in {}^c[a_n, b_n]$, donc $-1 \in \limsup {}^c[a_n, b_n] = {}^c(\liminf [a_n, b_n]) =]-\infty, -1[\cup [1, \infty[$: contradiction. Donc $-1-\varepsilon > b_n$ ne se produit que finiment souvent. Cela signifie que quitte à augmenter n_t, on peut supposer $n \ge n_t \Rightarrow -1-\varepsilon < a_n$. Pour tout ε, on a trouvé un tel n_t : comme d'autre part la suite (a_n) est ultimement bornée par -1, elle converge vers -1. On montre de même que b_n tend vers 1.

f) Cela peut vous étonner, mais il est en effet possible que a_n converge vers 5 sans que $A_n = [a_n, 6]$ ait de limite. Pourquoi ? Je conseille de faire un dessin ; on peut faire en sorte qu'à chaque rang l'union $\bigcup_{m \ge n} A_m$ contienne 5, mais que l'intersection $\bigcap_{m \ge n} A_m$ l'évite. *Il suffit de faire osciller (a_n) autour de sa limite.*

Soit $a_n = 5 + (-1)^n \frac{1}{n}$. Il est clair que (a_n) tend vers 5. Pourtant on voit que $\liminf A_n =]5, 6]$ mais $\limsup A_n = [5, 6]$. Pour une fois il peut être utile de penser en termes de fonctions indicatrices : on voit bien que la suite des 1_{A_n} ne converge pas simplement en 5.

Nous pensons toujours aux mêmes objets, c'est notre problème ; par exemple, dès qu'on nous dit "suite", nous pensons "suite monotone". Et c'est un tort.

Pour aller plus loin...

Exercice 5. Existe-t-il une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ infinis et deux-à-deux disjoints ?

Solution de l'exercice 5. La réponse peut surprendre la première fois, mais oui, cela existe. Soit A_2 l'ensemble des nombres pairs, qui est infini. Soient B_3 l'ensemble des mutiples de 3 puis $A_3 = B_3 \setminus A_2$; A_3 est infini et disjoint de A_2. On continue ainsi par récurrence, récurrence que nous formalisons pour donner de bonnes habitudes.
Soit $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une énumération des nombres premiers ; nous savons depuis Euclide que cette énumération est bien infinie. On a ainsi $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, etc.
Posons $A_0 = 2\mathbb{N}$. Supposons les A_i' construits pour tout $i \leq n$ et construisons A_{n+1}. Formons donc $A_{n+1} = p_{n+1}\mathbb{N} \setminus (\cup_{i=1}^{n} A_i)$; il est clair par construction que A_{n+1} est disjoint des A_i pour $i \leq n$; on montre sans difficulté que $A_{n+1} = p_{n+1}\mathbb{N} \setminus (\cup_{i=1}^{n} p_i\mathbb{N})$ est infini.
Poursuivant par récurrence, on obtient ainsi une suite infinie d'ensembles infinis deux-à-deux disjoints.

Remarque. On peut même montrer qu'il existe une famille $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ telle que :
– si $X \neq Y$ sont dans $\mathcal{A}$, alors $X \cap Y$ est fini
– la famille $\mathcal{A}$ a le cardinal de $\mathbb{R}$!