TD4. Tribus.

Échauffements

i **Exercice 1.** Soit X un ensemble. Donner des conditions sur X pour que les classes suivantes soient des tribus.

a) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$.

b) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

c) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{x\}, X\}$ où $x \in X$.

d) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{x\}, {}^c\{x\}, X\}$ où $x \in X$.

e) La classe des parties finies de X.

f) La classe des parties dénombrables (sous-entendu finies ou infinies) de X.

g) La classe des parties finies ou cofinies de X.

h) La classe des parties dénombrables ou codénombrables de X.

Solution de l'exercice 1.

a) Il est immédiat de vérifier qu'il s'agit d'une tribu, pour tout X. C'est la plus petite tribu sur X, appelée tribu grossière.

b) Il est immédiat de vérifier qu'il s'agit d'une tribu, pour tout X. C'est la plus grosse tribu sur X, appelée tribu triviale.

c) Si $\mathcal{A}$ est une tribu, elle est stable par passage au complémentaire donc ${}^c\{x\} \in \mathcal{A}$. Comme $\emptyset$ est le seul élément de $\mathcal{A}$ ne contenant pas $\{x\}$, on a ${}^c\{x\} = \emptyset$ et on voit donc que $\mathcal{A}$ n'est une tribu que si $X = \{x\}$.

d) Quel que soit X, $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable et passage au complémentaire donc c'est toujours une tribu.

e) Si X est fini, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ donc c'est une tribu (la tribu triviale). Si X est infini et que $A \in \mathcal{A}$, alors A est fini donc ${}^cA$ est infini et n'appartient pas à $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{A}$ n'est pas une tribu.

f) Si X est dénombrable (ce qui inclut le cas fini), $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ donc c'est une tribu (la tribu triviale). Si X est non dénombrable et que $A \in \mathcal{A}$, alors A est dénombrable (par définition de $\mathcal{A}$) donc ${}^cA$ est indénombrable (sinon $X = A \cup {}^cA$ serait dénombrable comme union de deux dénombrables) et n'appartient donc pas à $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{A}$ n'est pas une tribu.

g) Si X est fini, c'est bon car c'est la classe des parties finies de X. Si X est dénombrable, on peut se ramener à $\mathbb{N}$ par équipotence. Comme $\mathcal{A}$ contient les singletons, elle doit contenir $2\mathbb{N}$ par stabilité par union dénombrable. Or $2\mathbb{N}$ n'est ni fini ni cofini, donc $\mathcal{A}$ n'est pas une tribu. Enfin, si X est indénombrable, X contient une partie infinie dénombrable qui est dans $\mathcal{A}$ (en tant qu'union dénombrable de singletons) qui n'est ni finie ni cofinie, donc $\mathcal{A}$ n'est pas non plus une tribu.

h) Quel que soit X, on montre que $\mathcal{A}$ est une tribu. En effet, elle contient $\emptyset$ (fini donc dénombrable) et X (cofini donc codénombrable), et elle est stable par passage au complémentaire (trivial). Pour la stabilité par union dénombrable : soient $(A_i)_i \in \mathcal{A}$. Si tous les A_i sont dénombrables, alors $\bigcup A_i$ est dénombrable comme réunion dénombrable de dénombrables. S'il y a un A_{i_0} codénombrable, alors ${}^c\left(\bigcup A_i\right) \subseteq {}^cA_{i_0}$ est dénombrable.

Exercice 2.

a) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des classes de parties de E telles que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$.

b) Montrer que la réunion de deux tribus n'est pas en général une tribu (trouver un contre-exemple).

c) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus sur E. Montrer que

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sigma(\{A \cup B | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}) = \sigma(\{A \cap B | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

Solution de l'exercice 2.

a) C'est évident mais il faut s'en souvenir car cela sert souvent. La tribu $\sigma(\mathcal{B})$ contient $\mathcal{B}$ donc $\mathcal{A}$, elle contient donc la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$, à savoir $\sigma(\mathcal{A})$.

b) Nous définissons les objets suivants :
$E := \{a, b, c\}$, $\mathcal{A}_1 := \sigma(\{\{a\}, \{b, c\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, E\}$, $\mathcal{A}_2 := \sigma(\{\{a, b\}, \{c\}\}) = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, E\}$
Donc $\mathcal{A}_1 \bigcup \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, E\}$ et ce n'est pas une tribu. Il manque entre autres $\{a, c\}$ pour avoir $\sigma(\mathcal{A}_1 \bigcup \mathcal{A}_2)$ la plus petite tribu engendrée.

c) La première égalité vient du fait que, d'une part $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subseteq \{A \cup B | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ car les unions triviales $A \cup \emptyset, A \in \mathcal{A}$ et $\emptyset \cup B, B \in \mathcal{B}$ décrivent les éléments de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ donc $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \subseteq \sigma(\{A \cup B | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\})$. D'autre part, $\{A \cup B | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \subseteq \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$.
Ensuite la deuxième égalité est entrainée par la stabilité d'une tribu par passage au complémentaire et la formule de De Morgan usuelle $A \cap B = {}^c({}^cA \cup {}^cB)$.

Tribus engendrées

i **Exercice 3.** Soit E un ensemble infini.

a) Décrire la tribu engendrée par la classe $\mathcal{S}$ des singletons de E.

b) Décrire la tribu engendrée par la classe $\mathcal{F}$ des parties finies de E.

Solution de l'exercice 3.
Voici une méthode pour trouver la tribu $\sigma(\mathcal{A})$ engendrée par une classe de parties $\mathcal{A}$ est la suivante. On part de $\mathcal{A}$ et on ajoute des parties à l'aide des axiomes d'une tribu, de telle sorte que la classe devienne stable par union dénombrable et par passage au complémentaire. On parvient alors à caractériser un candidat $\mathcal{B}$. On a $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ car toute tribu qui contient $\mathcal{A}$ (en particulier $\sigma(\mathcal{A})$) contient nécessairement $\mathcal{B}$. Pour montrer l'inclusion inverse, il reste ensuite à montrer que $\mathcal{B}$ est une tribu. Comme $\sigma(\mathcal{A})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$ et que $\mathcal{B}$ est alors une tribu contenant $\mathcal{A}$, on a bien $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$ donc $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.
Bien que cette méthode fonctionne dans la majorité des exercices de ce cours, elle n'est en rien générale. Il est en réalité rare que l'on puisse décrire une tribu explicitement. Par exemple, la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ contient bien plus de parties que ce que l'on peut décrire explicitement à l'aide des notations mathématiques usuelles.

a) La tribu engendrée par les singletons doit contenir leurs unions dénombrables, donc toutes les parties dénombrables. Par ailleurs, elle doit contenir les complémentaires de ces parties dénombrables. Notons donc $\mathcal{B}$ la classe des parties dénombrables ou codénombrables de E. On a montré que c'était une tribu dans $1f$), donc c'est la tribu engendrée par les singletons de E.

b) On montre que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{F}$ engendrent la même tribu. Les singletons sont des parties finies donc $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$, d'où $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. Par ailleurs $\sigma(\mathcal{S})$ contient les parties dénombrables, et notamment les parties finies, donc $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$ d'où $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{S})$. Finalement $\sigma(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{F})$.

i **Exercice 4.** Soit E un ensemble.

a) Décrire et donner le cardinal de la tribu engendrée par une partition finie de E.

b) Même question pour une partition infinie dénombrable.

Solution de l'exercice 4.

a) Soit $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ une partition finie de E, avec tous les A_i non vides et disjoints deux à deux. La tribu engendrée par $\mathcal{A}$ contient tous les A_i, toutes leurs réunions dénombrables (donc finies ici) et tous leurs complémentaires. Quelques instants de réflexion montrent que, du fait que les A_i forment une partition, toutes ces parties sont toujours de la forme $\bigsqcup_{i \in I} A_i$. On essaie donc le candidat suivant :

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigsqcup_{i \in I} A_i | I \subseteq \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Le raisonnement précédent montre que l'on a de manière nécessaire $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Il reste à montrer que $\mathcal{B}$ est une tribu. Pour cela, on voit d'abord que $\emptyset \in \mathcal{B}$ en prenant $I = \emptyset$, que $X \in \mathcal{B}$ en prenant $I = \{1, \ldots, n\}$. Ensuite, $\mathcal{B}$ est stable par union dénombrable (il suffit de prendre la réunion des I_k) et par passage au complémentaire (en prenant $\{1, \ldots, n\} \backslash I$). Donc $\mathcal{B}$ est bien la tribu engendrée par la partition finie $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Pour le cardinal : $\mathcal{B}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ donc est de cardinal 2^n.

b) Tout pareil mais en remplaçant partout $\{1, \ldots, n\}$ par $\mathbb{N}$. Pour le cardinal : la tribu est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ donc elle a la puissance du continu.

Exercice 5. Soit E un ensemble et $A \subseteq E$. On définit la classe $\mathcal{C} = \{B \subseteq E : A \subseteq B\}$.

a) Caractériser $\sigma(\mathcal{C})$.

b) Donner des conditions sur A pour que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(E)$ (tribu triviale).

c) Donner des conditions sur A pour que $\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, E\}$ (tribu grossière).

Solution de l'exercice 5.

a) Il est facile de voir que $\sigma(\mathcal{C}) = \{B \subseteq E : A \subseteq B \text{ ou } B \subseteq {}^cA\}$. En effet, tout B tel que $\mathcal{A} \subseteq B$ doit être dans $\sigma(\mathcal{C})$, ainsi que ${}^cB \subseteq {}^cA$. Réciproquement on montre facilement que cette classe est une tribu.

b) $\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, E\} \Rightarrow \mathcal{C} \subseteq \{\emptyset, E\} \Rightarrow A = E$ sauf si E est réduit à un élément. Le cas échéant nous pouvons en plus de $A = E$ avoir comme possibilité $A = \emptyset$. La réciproque quant à elle est évidente.

c) Montrons que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(E)$ implique que A est vide ou est un singleton. La réciproque étant évidente.
Par contraposée, si A contient deux éléments, disons a et b, alors $\mathcal{C} \subseteq \{B \subseteq E; \{a,b\} \subseteq B\}$. En conséquence, $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\{B \subseteq E; \{a,b\} \subseteq B\}) = \{B \subseteq E; B \cap \{a,b\} = \emptyset \text{ ou } \{a,b\}\} \subsetneq \mathcal{P}(E)$, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ. Le seul point qui serait à détailler serait l'assertion

$$\sigma(\{B \subseteq E; \{a,b\} \subseteq B\}) = \{B \subseteq E; B \cap \{a,b\} = \emptyset \text{ ou } \{a,b\}\}$$

Cela se démontre en remarquant que le membre de droite est une tribu (facile), et engendrée par les éléments générateurs du membre de gauche (par passage au complémentaire si besoin).

Tribus et fonctions

Exercice 6. Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que l'ensemble suivant est une tribu sur X :

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X) | A = f^{-1}(f(A))\}.$$

Solution de l'exercice 6. On peut prendre comme définition $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X) | f^{-1}(f(A)) \subseteq A\}$ vu que l'autre inclusion est toujours vraie. Nous vérifions alors les axiomes d'une tribu :

a) $X \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$

b) Stabilité par union dénombrable : Soit une famille $A_i, i \in I$ dans $\mathcal{T}$ avec I dénombrable. L'union se comporte bien par rapport à l'image réciproque ET l'image directe par une application donnant alors

$$f^{-1}(f(\bigcup_{i\in I} A_i)) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(f(A_i)) = \bigcup_{i\in I} A_i$$

On a donc montré que $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

c) Stabilité par passage au complémentaire : soulignons qu'en toute généralité l'image directe n'a aucune raison de bien se comporter vis-à-vis du passage au complémentaire. Soit $A \in \mathcal{T}$ non vide et $x \in f^{-1}(f({}^cA))$. Cela signifie qu'il existe $y \in {}^cA$ tel que $f(x) = f(y)$. Mais si $x \in f^{-1}(f(A))$ c'est-à-dire qu'il existe $z \in A$ tel que $f(x) = f(z)$ alors nous aurions $f(y) = f(z)$ d'où $y \in f^{-1}(f(A)) = A$. Par contraposée, $x \in {}^cf^{-1}(f(A)) = {}^cA$. On a donc montré que $x \in {}^cA$, donc $f^{-1}(f({}^cA)) \subseteq {}^cA$ et ${}^cA \in \mathcal{T}$.

i **Exercice 7.** Soit $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Montrer par un contre-exemple que la classe des images directes $\{f(A)|A \in \mathcal{A}\}$ n'est en général pas une tribu sur Y.

Solution de l'exercice 7. Les contre-exemples sont multiples et peuvent relever de plusieurs causes sous-jacentes. Nous en donnons deux :
- Il suffit que f ne soit pas surjective. Alors $\{f(A)|A \in \mathcal{A}\}$ ne contiendra pas Y.
- Rajouter la surjectivité en restreignant l'espace d'arrivée ne règle pas le problème. En effet, soient $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$ et $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$. On définit f par $f(a) = f(c) = a$ et $f(b) = b$. Alors $f(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ qui n'est pas une tribu vu qu'il manque $\{b\}$.

Exercice 8. Soient $(Y_i, \mathcal{B}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces mesurables. Soit Y un ensemble et $f_i : Y \to Y_i$ des fonctions. On note $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par la famille des fonctions $(f_i)_{i\in I}$, c'est à dire la plus petite tribu pour laquelle les f_i sont mesurables. Montrer que $f : (E, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est mesurable si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ f : (E, \mathcal{A}) \to (Y_i, \mathcal{B}_i)$ est mesurable.

Solution de l'exercice 8. Comme $\mathcal{B} = \sigma(\bigcup_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{B}_i))$, f est mesurable ssi

$$\forall i \in I, \forall A \in \mathcal{B}_i, f^{-1}(f_i^{-1}(A)) \in \mathcal{B}.$$

“Chaque $f_i \circ f$ est mesurable” s'écrit :

$$\forall i \in I, \forall A \in \mathcal{B}_i, (f \circ f_i)^{-1}(A) \in \mathcal{B}.$$

Comme $(f_i \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\left(f_i^{-1}(A)\right)$, il est maintenant facile de voir que cela est équivalent à la mesurabilité de f.

Tribus sur $\mathbb{R}$

i **Exercice 9.** Une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est dite symétrique si $A = -A$, où $-A = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A, x = -y\}$. Soit $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ l'ensemble des parties symétriques de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $\mathcal{A} = \{A \cup (-A) : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$.

b) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu de $\mathbb{R}$.

c) Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

d) Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

e) Montrer que $\mathcal{A}$ est la tribu image réciproque de la tribu grossière $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par la fonction valeur absolue $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

f) Décrire la tribu engendrée par $\{\{a, -a\} : a \in \mathbb{R}\}$.
Indication : *On pourra commencer par montrer qu'elle est incluse dans $\mathcal{A}$ ainsi que dans la tribu engendrée par les singletons.*

Solution de l'exercice 9.

a) D'une part tout $A \cup (-A)$ est symétrique de manière immédiate. Inversement, une partie symétrique A vérifie $A = A \cup (-A)$ car $A = -A$.

b) est trivial, il suffit de vérifier les axiomes.

c) On considère les A de la forme $\{y, -y\}$. Leurs préimages sont dans $\mathcal{A}$, d'où on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(-x)| = |f(x)|$. Réciproquement les fonctions vérifiant ceci conviennent : si $A = -A$ et f comme ci dessus alors $f(x) \in A \Leftrightarrow f(-x) \in A$, et donc $-f^{-1}(A) = \{x : f(-x) \in A\} = \{x : f(x) \in A\} = f^{-1}(A)$.

d) On considère les préimages des singletons de la forme $\{f(x)\}, x \in \mathbb{R}$, et on obtient qu'il s'agit des fonctions paires.

e) Il suffit de l'écrire !

f) $\sigma(\{\{a, -a\} : a \in \mathbb{R}\}) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A = -A \text{ dénombrable ou codénombrable}\}$
En effet, on réitère religieusement le même argument que d'habitude : le membre de droite est facilement une tribu contenant les générateurs du membre de gauche. Et ces mêmes générateurs engendrent les $A = -A$ qui sont dénombrables.

Pour aller plus loin...

Exercice 10. On souhaite montrer qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable. Soit donc X un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu dénombrable sur X. On va montrer que X est finie. Pour tout $x \in X$, soit $A(x) = \bigcap_{x \in A, A \in \mathcal{A}} A$.

a) Montrer que $A(x) \in \mathcal{A}$.

b) Montrer que $A(x)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$ contenant x.

c) Montrer que $y \in A(x) \Rightarrow A(y) = A(x)$.

d) Soit x et x' deux éléments de X. Montrer que $A(x) = A(x')$ ou bien $A(x) \cap A(x') = \emptyset$.

e) Soit $\mathcal{E} = \{B \subseteq X | \exists x \in X, B = A(x)\}$. Montrer que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$.

f) En déduire que toute tribu dénombrable est finie.

Solution de l'exercice 10. “Dénombrable” signifie “qui s'injecte dans $\mathbb{N}$”. $\bigsqcup$ précise que l'union est disjointe.

a) L'intersection qui définit $A(x)$ porte sur un nombre dénombrable d'ensembles car $\mathcal{A}$ est dénombrable. Par stabilité de la tribu $\mathcal{A}$ par intersection dénombrable on a que pour tout x, $A(x) \in \mathcal{A}$.

b) $A(x)$ est un élément de $\mathcal{A}$ contenant x par définition même. Pour montrer que c'est le plus petit vérifiant cette propriété, soit $B \in \mathcal{A}$ avec $x \in B$. Supposons $B \subseteq A(x)$. Alors B apparaît dans la grosse intersection définissant $A(x)$, donc $A(x) \subseteq B$ et finalement $B = A(x)$, donc il n'existe pas d'élément de $\mathcal{A}$ contenant x strictement plus petit que $A(x)$.

c) Soit $y \in A(x)$. Alors $A(x)$ est un élément de $\mathcal{A}$ contenant y donc $A(y) \subseteq A(x)$. On montre maintenant que $x \in A(y)$ ce qui implique que $A(x) \subseteq A(y)$ et termine donc la démonstration. Par l'absurde, on suppose que $x \notin A(y)$. Alors par stabilité d'une tribu par différence ensembliste, $A(x) \backslash A(y) \in \mathcal{A}$ et contient donc x. Ainsi par définition de $A(x)$ comme plus petit élément de $\mathcal{A}$ contenant x, on a $A(x) \subseteq A(x) \backslash A(y) = A(x) \cap {}^{c}A(y)$, ce qui est absurde car $y \in A(x)$ mais $y \notin {}^{c}A(y)$.

d) Si $x' \in A(x)$ alors $A(x') = A(x)$ par la question précédente. Sinon, $x' \notin A(x)$. Si $A(x') \cap A(x) \neq \emptyset$, alors $y \in A(x') \cap A(x)$ vérifie $y \in A(x')$ donc $A(y) = A(x')$, et $y \in A(x)$ donc $A(y) = A(x)$ donc $A(x) = A(x')$, et $x' \in A(x)$: contradiction. Donc $A(x') \cap A(x) = \emptyset$.

e) D'abord nous commencons par mieux décrire la tribu $\mathcal{A}$. La famille $(A(x))_{x \in E}$ est en fait dénombrable et partitionne E par la question précédente. Ce sont les atomes de ma tribu. Il existe alors une famille dénombrable de points distincts $(x_i)_{i \in I}$ que l'on exhibe choisissant un x_i dans chaque classe d'équivalence de la relation “être dans le même $A(x)$“ (Axiome du choix dénombrable). Cette famille vérifie que

$$E = \bigsqcup_{i \in I} A(x_i)$$

et

$$\forall A \in \mathcal{A}, A = \bigcup_{x \in A} A(x) = \bigsqcup_{x_i \in A} A(x_i)$$

Une telle tribu a une description complètement explicite car elle est atomique : tout élément est union disjointe d'atomes.

$$\mathcal{A} = \{\bigsqcup_{j \in J} A(x_j); J \subseteq I\}$$

On en déduit facilement $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$.

f) Si I est dénombrable infini, on prend $I = \mathbb{N}$ (à une bijection près) et alors $\mathcal{A} = \{\bigsqcup_{j \in J} A(x_j); J \subseteq I\}$ en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Un cardinal ayant la puissance du continu contredit l'hypothèse de départ. Donc I est fini, et la tribu aussi pour le coup.

Le coin du curieux. Dans les exercices au programme, trouver la tribu engendrée par une classe $\mathcal{C}$ de parties d'un ensemble E se fait généralement en ajoutant à $\mathcal{C}$ les unions dénombrables et les complémentaires des parties de $\mathcal{C}$. Si l'on obtient ainsi une tribu, on a bien trouvé la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{C})$. Manque de chance, cela ne marche pas toujours, notamment pour le cas de la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. Si l'on procède de la sorte en partant des intervalles réels, on ne tombe en effet pas sur une tribu. Il faut en fait itérer ce processus par récurrence transfinie pour obtenir la tribu des boréliens. Cela explique pourquoi il est impossible de fournir une description explicite complète des boréliens de $\mathbb{R}$. On peut montrer que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ a la puissance du continu, ce qui montre l'existence de non-boréliens (car $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a une puissance strictement supérieure à celle du continu).