Université Pierre & Marie Curie (Paris 6) — Licence de Mathématiques L3
UE LM364 – Intégration 1 — Année 2011–12

TD5. Fonctions en escalier, fonctions étagées, fonctions réglées, fonctions boréliennes.

Remarque 1 *Pour rappel, une fonction sur un segment est réglée c'est-à-dire limite uniforme de fonction en escaliers si et seulement si elle admet une limite à droite et à gauche en tout point. Ce critère pourra être utilisé pour tous les exercices suivants, et sa preuve fait l'objet du dernier exercice.*

Échauffements

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = x$.

a) Décrire la tribu image réciproque de $\mathcal{B}$ par f, $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}\}$, où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

b) Décrire la tribu image directe par f de la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $\{A \in P(\mathbb{R}) : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}^2\}$ avec $\mathcal{B}^2$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$.

Solution de l'exercice 1.

a) C'est l'ensemble des $A \times \mathbb{R}$ où A décrit $\mathcal{B}$.

b) C'est $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est mesurable si et seulement si pour tout a, b, la restriction de f à $[a, b]$ est mesurable.

Solution de l'exercice 2. Notons $f_{a,b}$ la restriction de f à $[a, b]$. Supposons f mesurable. Soit A un borélien. Alors $f_{a,b}^{-1}(A) = f^{-1}(A) \bigcap [a, b]$ est borélien, ce qui montre que $f_{a,b}$ est mesurable. Réciproquement, supposons que les $f_{a,b}$ soient tous mesurables. Soit A un borélien. $f^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_{-n,n}^{-1}(A)$ est borélien, ce qui prouve que f est mesurable.

Fonctions réglées

i **Exercice 3.**

a) Donner un exemple de fonction étagée qui n'est pas réglée.

b) Existe-t-il une suite de fonctions en escalier qui converge simplement vers $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Solution de l'exercice 3.

a) L'exemple est fourni dans la seconde question. En effet il n'existe pas de fonction en escalier f telle que $||f - \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}||_\infty < \frac{1}{2}$.

b) On peut prendre $f_n = \mathbb{1}_{\{p/q : 1\leq q\leq n, -qn\leq p\leq qn\}}$ qui est non nulle sur un ensemble fini (il s'agit des rationnels de $[-n, n]$ qui peuvent s'écrire avec un dénominateur inférieur ou égal à n) et donc en escalier.

Fonctions mesurables

i **Exercice 4.** Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f_n : E \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in E : \text{la suite } (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$$

est un élément de $\mathcal{A}$.

Solution de l'exercice 4. $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. On est ramenés à f_n à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut écrire :

$$\{x \in E : \text{la suite } (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}\} = \bigcap_{\substack{\epsilon > 0 \\ \epsilon \in \mathbb{Q}}} \bigcup_{\substack{a \in \mathbb{Q} \\ b \in \mathbb{Q} \\ a < b < a + \epsilon \\ N \in \mathbb{N}}} \bigcap_{n \geq N} \{x \in E : a < f_n(x) < b\}.$$

Comme les $\{x \in E : a < f_n(x) < b\}$ sont boréliens (par mesurabilité des f_n) et vu que les unions et intersections dénombrables de boréliens sont encore des boréliens, A est bien borélien.

i **Exercice 5.** Soient X et Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application dont l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable. Montrer que f est mesurable (X et Y sont munis de leur tribu borélienne).

Solution de l'exercice 5.
Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f (qui est une réunion dénombrable de fermés -des singletons- donc borélien).
Soit g la restriction de f au complémentaire de D. g est continue pour la topologie trace, donc mesurable pour la tribu trace (qui coïncide précisément avec la tribu engendrée sur le complémentaire de D par la topologie trace).
Soit maintenant $A \in \mathcal{B}$. Alors $f^{-1}(A) = g^{-1}(A) \cup (f^{-1}(A) \cap D)$ est borélien car on l'a écrit comme union de deux boréliens (le premier par mesurabilité de g, le second parce que dénombrable). Et donc f est mesurable.

i **Exercice 6.** Soit $f : E \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{A}_f = f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la tribu image réciproque de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par f.

a) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que $g = h \circ f$ est une fonctions mesurable de $(E, \mathcal{A}_f)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
b) Soit $s : (E, \mathcal{A}_f) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction étagée. Montrer qu'il existe une fonction borélienne t telle que $s = t \circ f$.
c) Montrer que si $g : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors il existe h borélienne telle que $g = h \circ f$.
   Indication : *On pourra approcher g par une suite de fonctions étagées.*

Solution de l'exercice 6.

a) C'est trivial : une composée d'applications mesurables est mesurable, mais c'est justement la réciproque qu'on va montrer ensuite qui est intéressante.
b) Par linéarité, on peut supposer que s est l'indicatrice d'un ensemble $A \in \mathcal{A}_f$. Par définition de $\mathcal{A}_f$, on sait qu'il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $A = f^{-1}(B)$. Il suffit de prendre pour t l'indicatrice de B.
c) On se donne s_n suite de fonction étagées qui converge vers g. On en déduit t_n vérifiant pour chaque n : $s_n = t_n \circ f$. On constate qu'alors, quand n tend vers l'infini, $t_n(x)$ converge vers une limite $h(x)$, du moins en chaque $x \in f(E)$. Et on a $g = h \circ f$.
   Sur l'ensemble (mesurable) M des x tels que $t_n(x)$ ne converge pas, on prend par exemple $h(x) = 0$. h ainsi définie est bien mesurable comme limite de la suite $\mathbb{1}_{E \setminus M} h_n$.

Exercice 7.

a) Soit X un borélien de $\mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est mesurable.

b) Montrer que toute fonction réglée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.

Solution de l'exercice 7.

a) Les préimages d'intervalles sont des intervalles intersectés avec X, et donc a fortiori des boréliens, d'où le résultat. Plus précisément, supposons par exemple la fonction f croissante et vérifions cela dans le cas d'un intervalle $[a, +\infty[$. Soit $b = \inf f^{-1}([a, +\infty[)$. Alors $f^{-1}([a, +\infty[)$ est égal soit à $]b, +\infty[\cap X$ (ouvert en b), soit à $[b, +\infty[\cap X$ (fermé en b). Il y a donc deux inclusions à vérifier :
1) $f^{-1}([a, +\infty[) \subset [b, +\infty[\cap X$
Par construction, b est bien inférieur à tout élément de $f^{-1}([a, +\infty[)$. $f^{-1}([a, +\infty[)$ est donc inclus dans $[b, +\infty[$, ainsi que dans x, d'où le résultat.
2) $f^{-1}([a, +\infty[) \supset]b, +\infty[\cap X$
Réciproquement, soit $x \in]b, +\infty[\cap X$. En raison de la définition de b, il existe $y \in f^{-1}([a, +\infty[)$ tel que $b < y < x$. Comme f est croissante, $f(y) \leq f(x)$. Or $y \in f^{-1}([a, +\infty[)$ se traduit par $f(y) \geq a$. On en déduit que $f(x) \geq a$, ce qui achève la preuve.

b) Une fonction réglée est limite de fonctions en escalier, en particulier boréliennes, donc est borélienne.

i **Exercice 8.**

a) L'application $a = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1_{\{\frac{1}{n}\}} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est-elle une fonction réglée ? Étagée ? Borélienne ?

b) Qu'en est-il de l'application $b = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]} : [0, 1] \to \mathbb{R}$?

c) Répondre aux mêmes questions, concernant les applications suivantes (depuis $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$).

$c = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1_{]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$; $\quad d = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} 1_{]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$; $\quad e(x) = \frac{1}{x} d(x)$ si $x \in]0, 1]$, $= 0$ si $x = 0$;

$f(x) = x d(x)$; $\quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} d(x)$ si $x \in]0, 1]$, $= 0$ si $x = 0$.

Solution de l'exercice 8. On conclut rapidement en utilisant des arguments analogues à ceux des exercices 3 et 9. Il va de soi que toutes les fonctions considérées sont boréliennes. Il est très difficile d'en construire une qui ne le soit pas ! L'aspect réglé se lit en examinant les limites éventuelles à droite et à gauche de tout point. Enfin, le caractère étagé se décide en considérant le nombre de valeurs prises par la fonction.

Pour aller plus loin... Un exercice classique

Exercice 9. Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est réglée si et seulement si elle admet en tout point de $]a, b[$ une limite à gauche et une limite à droite.

Solution de l'exercice 9. Supposons f réglée et soit f_n une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f. On sait que f_n admet des limites à gauche et à droite. On va montrer que f admet une limite à droite en tout point x de $[a, b[$. (En fait, cela découle directement de la convergence uniforme qui implique qu'on peut échanger les deux limites sur n et sur x, mais on peut tout de même redémontrer ceci). la limite ponctuelle de la suite de fonction Soit x_0 un tel point. Soit $\epsilon > 0$. On note $y_n = f_n(x_0^+)$ la limite à droite de f_n en x_0. Montrons que y_n est de Cauchy, ce qui prouvera qu'elle est convergente. Pour p, q assez grand, on a

$$|y_p - y_q| \leq \|f_p - f_q\|_\infty < \epsilon,$$

ce qui démontre que y_n est convergente vers un réel y. Maintenant, montrons que la limite à droite de f en x_0 est y. Pour $\epsilon > 0$, on peut choisir $\delta > 0$ et N tel que

$$n > N,\ x > x_0,\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow \begin{cases} |y_n - y| < \epsilon/3 \\ |f_n(x) - y_n| < \epsilon/3 \\ |f(x) - f_n(x)| < \epsilon/3 \end{cases}$$

et donc

$$|f(x) - y| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - y_n| + |y_n - y| < \epsilon.$$

On a ainsi montré que f à bien une limite à droite en x_0.
Il reste à démontrer la réciproque. Supposons donc que f admet une limite à droite et à gauche en tout point. Soit $\epsilon > 0$, $\forall t \in]a, b[$, il existe[1] α_t, β_t tels que $a < \alpha_t < t < \beta_t < b$ et

$$\forall x, y \in]\alpha_t, t[,\ |f(x) - f(y)| < \epsilon,$$
$$\forall x, y \in]t, \beta_t[,\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

(de plus, il existe α_b tel que $\forall x, y \in]\alpha_b, b[,\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$ et $\forall x, y \in]a, \beta_a[,\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$). On a $[\beta_a, \alpha_b] \subset \cup_{t \in]a,b[}]\alpha_t, \beta_t[$ (car $a < \beta_a < \alpha_b < b$). L'intervalle $[\beta_a, \alpha_b]$ étant compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini $\{]\alpha_t, \beta_t[| t \in J \text{ fini}\}$. On considère alors la subdivision formée de $a, b,\ t \in J$, $\{\alpha_t | t \in J\}$, $\{\beta_t | t \in J\}$. On note $\{a_0, \ldots, a_n\}$ cette subdivision. Pour tout $x \in]a_{i-1}, a_i[$, on pose $\phi_\epsilon(x) = f(\xi_i)$ pour un $\xi \in]a_{i-1}, a_i[$ quelconque (par exemple $\xi_i = \frac{a_{i-1}+a_i}{2}$). On pose aussi $\phi_\epsilon(a_i) = f(a_i)$. On a bien alors

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \phi_\epsilon(x)| < \epsilon.$$

1. Facile à monter avec la définition de la limite et l'inégalité triangulaire.