TD6. Rappels de topologie. Ensemble de Cantor.

Échauffements

i **Exercice 1.** Soient X et Y deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) L'image réciproque par f de tout ouvert est un ouvert.

b) L'image réciproque par f de tout fermé est un fermé.

c) Pour tout x de X, l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x.

Solution de l'exercice 1. Cela doit ne pas poser de problème.
- Supposons a) et montrons b). Soit F un fermé de Y. Comme $Y \setminus F$ est un ouvert de Y, $f^{-1}(Y \setminus F) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(F)$ est un ouvert de X, c'est-à-dire que $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.
- Supposons b) et montrons c). Soient $x \in X$ et $V \subseteq Y$ un voisinage de $f(x)$; V contient un ouvert U auquel appartient $f(x)$. L'ensemble $Y \setminus U$ est donc un fermé de Y ; donc $F = f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ est fermé dans X, c'est-à-dire que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X. Or $f(x) \in U$, donc $x \in f^{-1}(U)$. Ainsi $f^{-1}(U)$ est-il un voisinage de x ; et $f^{-1}(V)$ qui le contient aussi.
- Supposons c) et montrons a). Soient V un ouvert de Y et $U : f^{-1}(V)$; on montre que U est ouvert, c'est-à-dire voisinage de chacun de ses points. Or si $x \in U$, par définition $f(x) \in V$, donc par hypothèse U est bien un voisinage de x. Ceci montre que U est ouvert.

Remarques :

a) On utilise lourdement le fait que les images réciproques préservent les opérations ensemblistes. C'est, rappelons-le, faux des images directes, qui ne respectent ni les intersections ni les complémentaires.

b) Nous n'avons montré que trois implications (prouvant la triple équivalence). Si vous n'êtes toujours pas au point, écrivez une démonstration directe des trois implications qui restent.

Exercice 2. Donner un exemple de suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n, A_n est infini et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Solution de l'exercice 2. C'est un peu facile : prendre $A_n = [n, \infty[$. Ainsi on se paie même le luxe de donner une famille de fermés dont les intersections finies sont non-vides, mais dont l'intersection totale est vide. Morale : $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Exercice 3. Dans un espace métrique E, un ensemble A est dit dense par rapport à un ensemble B, si tout point de B est un point adhérent à A, en d'autres termes si $B \subset \overline{A}$ (ou, ce qui est équivalent, si, pour tout $x \in B$, il existe une suite à valeurs dans A convergeant vers B).
Montrer que si A est dense par rapport à B, et B est dense par rapport à C, alors A est dense par rapport à C.

Solution de l'exercice 3. C'est un peu simple. On sait que l'adhérence dans E d'un ensemble est un fermé de E. En particulier, si A est dense par rapport à B et B dense par rapport à C, on a :

$$C \subseteq \overline{B} \subseteq \overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

donc A est dense par rapport à C. Même pas besoin de métrique sous-jacente !

Topologie générale

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace topologique (ou métrique). Supposons qu'elle converge vers l, et posons $K = \{l\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{u_n\}$. Montrer que K est compact.

Solution de l'exercice 4. C'est assez classique et bien plus facile avec la propriété de Borel-Lebesgue dans un espace topologique, que par la caractérisation séquentielle de la compacité (métrique).

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement par des ouverts de $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Il existe un i_∞ tel que $l \in U_{i_\infty}$. Or U_{i_∞} est un ouvert i.e voisinage de ses points donc voisinage de l. Ainsi, à partir d'un certain rang N, $u_n \in U_{i_\infty}$. Pour les indices précédents, chaque u_k appartient à un U_{i_k}, donc $\left(U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_{N-1}}, U_{i_\infty}\right)$ est un sous-recouvrement fini.

i **Exercice 5.** Soit K un espace topologique compact. Montrer que si $F \subseteq K$ est fermé, alors F est compact. (K n'est pas nécessairement un espace métrique. Il faut donc utiliser la notion de compacité de Borel-Lebesgue.)

Solution de l'exercice 5. La caractérisation séquentielle de la compacité (aussi appelée "compacité de Bolzano-Weierstrass") est souvent la première chose qui vous vient à l'idée. *C'est un tort.* En effet la topologie ne peut pas toujours se ramener à l'étude des suites indexées par $\mathbb{N}$. C'est vrai dans le cas métrique, où toutes vos caractérisations séquentielles sont nécessaires et suffisantes, mais en pure généralité, elles sont seulement nécessaires... et qui a parlé d'espace métrique dans l'énoncé ?
Il faut donc manier la vraie notion, générale, de compacité, dite compacité de Borel-Lebesgue : un espace est compact si et seulement si de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini. Voici la solution.
Montrons que F est un sous-ensemble compact de K : pour cela, montrons que si des ouverts $(U_i)_{i\in I}$ recouvrent F, alors un nombre fini de U_i suffit en fait. L'hypothèse est ainsi $F \subseteq \bigcup_I U_i$. Or il est clair que $K \setminus F$ est un ouvert de K, et que l'on a :

$$K = (K \setminus F) \cup \bigcup_I U_i$$

Ceci est un recouvrement de K par des ouverts. Comme K est compact, un nombre fini d'ouverts dans ce recouvrement suffit : il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que $K = (K \setminus F) \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Et donc $F \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Du recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de F par des ouverts, on a extrait un recouvrement fini : F est compact dans K.
Si vous n'avez pas le sentiment de dominer cet exercice, écrivez une autre démonstration, qui repose sur la "propriété des intersections finies" (caractérisation duale de Borel-Lebesgue, en termes d'intersections de fermés).
Le coin des emmerdeurs : en toute rigueur, on a seulement montré que F est un sous-ensemble compact de K, pas que F est compact en tant qu'espace topologique abstrait. Mais cette différence n'en est pas vraiment une. En effet, la topologie sur F est la topologie dite "induite", dont les ouverts sont les $U \cap F$ pour U ouvert de K. On montre alors que F est compact pour cette topologie ssi F est un sous-ensemble compact de K. Vous pouvez essayer de ré-écrire la démonstration donnée plus haut en termes de topologie induite. Voir l'exercice suivant pour une remarque terminologique (im)pertinente.

i **Exercice 6.**

a) Montrer que l'image continue d'un compact est un compact.
b) On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une topologie en ajoutant aux ouverts usuels $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ les unions d'ouverts de la forme $\Omega\cup]a, +\infty]$ et $\Omega \cup [-\infty, a[$ où a décrit $\mathbb{R}$ et Ω décrit $\mathcal{O}$. Montrer que $\overline{\mathbb{R}}$, muni de cette topologie, est homéomorphe à $[0, 1]$.
c) En déduire que $\overline{\mathbb{R}}$ est compact.

Solution de l'exercice 6.

a) Soient $f : X \to Y$ une fonction entre deux espaces topologiques ; on suppose f continue et X compact. Montrons que $f(X)$ est un espace compact ; par définition de la topologie induite, cela revient à montrer que $f(X)$ est un sous-ensemble compact de Y.

   Soit $f(X) \subseteq \bigcup_I V_i$ un recouvrement de $f(X)$ par des ouverts V_i de Y. Comme f est continue, chaque $f^{-1}(V_i)$ est ouvert dans X. Or pour tout $x \in X$, $f(x) \in f(X) \subseteq \bigcup_I V_i$, donc il existe $i \in I$ tel que $f(x) \in V_i$, ce qui signifie $x \in f^{-1}(V_i)$. En symboles,

$$X = \bigcup_I f^{-1}(V_i)$$

   Comme X est compact, on peut extraire de ce recouvrement par des ouverts, un recouvrement fini : il existe $i_1, \ldots, i_N \in I$ tels que $X = f^{-1}(V_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{i_n})$. Passant aux images, on a $f(X) \subseteq V_{i_1} \cup \ldots V_{i_n}$: $f(X)$ est bien compact dans Y.

   Le coin des emmerdeurs : en Français, compact signifie : Borel-Lebesque *et séparé* (au sens de Hausdorff). Donc, si vous lisez littéralement l'énoncé, il reste à montrer que l'image de X est un espace séparé. Et c'est faux ! en voici un contre-exemple. On prend $X = \{a, b\}$ discret, et $Y = \{a, b\}$ grossier ; f est l'identité. X et Y sont compacts, f est continue d'image Y... mais Y n'est pas séparé.

   Comment gérer ce genre d'erreur d'énoncé, essentiellement terminologique ? À l'écrit, ne rien faire. À l'oral, y aller *très poliment.* Un espace compact non séparé est, en Français, appelé *quasi-compact.* La raison de l'erreur dans l'énoncé est tout simplement la terminologie de nos voisins d'outre-Manche, qui appellent "compact" un quasi-compact, et "Hausdorff compact" un vrai compact. Honnis soient-ils !

b) Pour montrer que $\overline{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $[0, 1]$, on exhibe une bijection bicontinue. Il semble absolument naturel d'envoyer $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$, et d'identifier les bornes. On prend donc un homoéomorphisme de $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$ (par exemple, la fonction $\tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$), que l'on étend en envoyant -1 sur $-\infty$ et 1 sur $+\infty$. Soit $f : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ la fonction ainsi définie : nous montrons que c'est un homéomorphisme.

   f est bijective : c'est clair. f est continue : soit U un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}$, il n'y a pas grand'chose à faire. Si $U = V \cup \{+\infty\}$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(U) = f^{-1}(V) \cup \{1\}$ qui est bien ouvert dans $[0, 1]$. Les autres cas sont identiques ; f est donc continue. Enfin, on utilise un truc classique pour montrer que la réciproque g de f est, elle aussi, continue – mais sans se fouler. Soit F un fermé de $[0, 1]$; on veut montrer que $g^{-1}(F)$ est fermé. Or $g^{-1}(F) = f(F)$. Mais F est fermé dans le compact $[0, 1]$, donc compact. Son image est donc (quasi-)compacte. Mais un quasi-compact d'un espace séparé (c'est le cas de $\overline{\mathbb{R}}$) y est fermé. Donc $f(F)$ est fermé : g est continue, et f est un homéomorphisme.

   Si vous vous sentez mystifié(e), vous pouvez montrer la continuité de g à la main : vous en avez sans doute besoin.

c) En particulier, $\overline{\mathbb{R}}$, homéomorphe à un compact, est compact.

Exercice 7. Soit E un espace métrique, et $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. On définit $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

a) Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est continue.

b) Établir que pour tout $x \in E$, $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.

c) Que dire de x tel que $d(x, A) = 0$?

Solution de l'exercice 7.

a) La fonction proposée est 1-lipschitzienne. Soient en effet $x, y \in E$ et $a \in A$. Alors $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$, donc par définition $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, on a $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. Ainsi $d(x, y) \leq d(x, A) - d(y, A)$; par symétrie on peut mettre des valeurs absolues, et la fonction est bien 1-lipschitzienne – à plus forte raison continue.

b) Comme $A \subseteq \overline{A}$, il est clair que $d(x, \overline{A}) \leq d(x, A)$. Montrons l'inégalité réciproque. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $b \in \overline{A}$ tel que $d(x, b) \leq d(x, \overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$.

c) Supposons $d(x, A) = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $a_n \in A$ tel que $d(x, a_n) < \frac{1}{n}$. La suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ d'éléments de A admet donc x pour limite, et par définition (ou propriétés équivalentes) de l'adhérence, $x \in \overline{A}$.
Bilan : $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow d(x, \overline{A}) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

Pour aller plus loin...

i **Exercice 8.** [L'ensemble triadique de Cantor]
On construit une suite d'ensembles récursivement comme suit :

$$F_0 := [0, 1]$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} := \frac{F_n}{3} \cup \frac{2 + F_n}{3}$$

a) Montrer qu'il s'agit d'une suite décroissante de fermés.
b) Donner rigoureusement un sens à F_∞.
c) Montrer que F_∞ est compact.
d) Montrer que F_∞ est totalement discontinu (ne contient aucun segment d'intérieur non vide).
e) Caractériser les points de F_∞.
f) Montrer que F_∞ est sans point isolé ($x \in F_\infty$ est dit isolé s'il possède un voisinage V tel que $V \cap F_\infty = \{x\}$).
g) Montrer que F_∞ est équipotent à $\mathbb{R}$.
h) Montrer que F_∞ est homéomorphe à $2^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit (de Tychonoff).

Solution de l'exercice 8. Le très-célèbre ensemble de Cantor. Il est bizarre mais *c'est votre ami.* Avec ses propriétés étranges, c'est une mine de contre-exemples – si vous devez un jour donner un contre-exemple (type leçon de concours d'enseignement), ou si au contraire vous avez une idée qui vous semble douteuse. *Essayez toujours vos idées sur l'ensemble de Cantor.*
Comme pour tout exercice pré-découpé, on peut se lancer dans la résolution sans vraiment saisir l'idée. Mais il vaut tout de même mieux réfléchir un peu pour comprendre la construction. Un dessin aide. F_0 est le segment $[0, 1]$. $F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ est le segment dont on a effacé le tiers médian. Et l'on répète cette construction. À la limite, on trouve une fine poussière aux propriétés inattendues.

a) Montrons par récurrence que les F_n sont des fermés emboîtés. F_0 est un fermé. Supposons que F_n soit un fermé inclus dans F_{n-1}, et montrons que F_{n+1} est un fermé inclus dans F_n. Les fonctions $x \mapsto 2 + x$ et $x \mapsto \frac{x}{3}$ étant des homémorphismes de $\mathbb{R}$, on a que $\frac{F_n}{3}$ et $\frac{2+F_n}{3}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$, et F_{n+1}, union de *deux* fermés, est aussi un fermé. En outre comme $F_n \subseteq F_{n-1}$, on a

$$F_{n+1} = \frac{F_n}{3} \cup \frac{2 + F_n}{3} \subseteq \frac{F_{n-1}}{3} \cup \frac{2 + F_{n-1}}{3} = F_n$$

b) On cherche à formaliser la notion de limite pour un ensemble de parties. On a vu dans le cours qu'en général, on a plutôt deux notions (limites inférieure et supérieure) qu'une. Comme ici la suite est décroissante, on pose

$$F_\infty = \bigcap_{\mathbb{N}} F_n$$

On sait alors – voir cours – que F_∞ est la limite des F_n, au sens d'une limite de sous-ensembles.

c) F_∞ est fermé, car intersection de fermés. Il est borné dans $\mathbb{R}$: c'est donc un compact, grâce à Bolzano-Weierstrass.

d) Soit I un intervalle non-trivial inclus dans $[0,1]$: on montre que I n'est pas inclus dans le Cantor. En effet I possède une longueur $\ell \neq 0$; comme F_n a un nombre fini (2^n) de composantes connexes de longueur $\frac{1}{3^n}$, dès que n est assez grand (de l'ordre du logarithme en base 3 de $\frac{1}{\ell}$!), I ne peut être dans aucune composante connexe de F_n. Mais comme I est connexe, I n'est pas inclus dans F_n ; donc pas dans F_∞.

e) À retenir, parce que pas forcément facile à réinventer à tous les coups. Reprenons les dessins : l'ensemble de Cantor s'obtient en itérant la construction "j'enlève le tiers médian". Ceci suggère de passer en base 3. Enlever le tiers médian revient à ne considérer que les nombres dont le développement en base 3 ne contient que des 0 et des 2. Démontrons-le.

Un petit mot de mise en garde avant les détails. Un élément de $[0,1]$ peut posséder 2 développements en base 3 : par exemple $0{,}101222\cdots = 0{,}102$. Ce que nous montrons exactement est l'énoncé suivant :

$x \in F_\infty$ ss'il existe un développement en base 3 de x qui ne possède que des 0 et des 2.

Pour cela nous montrons que $x \in F_n$ ss'il possède un développement en base 3 dont les n premiers termes sont 0 et 2 seulement. Par récurrence. C'est évident pour $n = 0$. Supposons la propriété vraie en n, et montrons-la pour $n+1$.

Si $x \in F_{n+1}$, alors on peut supposer (autre cas identique) que $x \in \frac{2+F_n}{3}$, c'est-à-dire qu'il existe $y \in F_n$ tel que $x = \frac{2+y}{3}$. Alors on sait par récurrence qu'il existe un développement trinaire $y = 0{,}c_1 \dots c_n \dots$ tel que les $(c_i)_{1\leq i\leq n}$ sont dans $\{0,2\}$. Comme $x = \frac{2+y}{3}$, on a un développement trinaire de x qui commence par $0{,}2c_1 \dots c_n$: les $n+1$ premiers chiffres sont bien dans $\{0,2\}$.

Supposons réciproquement qu'il existe un développement trinaire $x = 0{,}b_1 \dots b_{n+1} \dots$ dont les $n+1$ premiers chiffres sont dans $\{0,2\}$ (i.e., $b_i = 0$ ou 2 pour $i \leq n+1$). Si $b_1 = 0$, il est clair par récurrence que $3x \in F_n$, et donc que $x \in F_{n+1}$. Si $b_1 = 2$, on considère $x' = x - \frac{2}{3}$ dont la première trécimale est 0. On raisonne alors de même.

Ceci achève de montrer que $x \in F_n$ ss'il admet un développement en base 3 dont les n premiers chiffres après la virgule sont pairs. Or $x \in F_\infty$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}\ x \in F_n$: ce qu'on voulait démontrer.

Remarque : Du coup se profile sur l'ensemble de Cantor une belle structure d'arbre *binaire*. À chaque nœud, on peut aller à gauche (trécimale suivante = 0) ou à droite (trécimale suivante = 2). On n'a pas fini de rigoler avec l'ensemble de Cantor.

f) Soit $x \in F_\infty$: on montre que x n'est pas isolé dans F_∞. Pour cela on construit une suite d'éléments de F_∞ tous différents de x qui converge vers x. Soit $x = 0, b_1 \dots b_n$ le développement de x en base 3. On suppose qu'il est infini, et l'on considère les troncatures successives : ces points sont bien dans le Cantor, différents de x (car son développement est infini !), et convergent vers x. Et si le développement de x est fini ? Alors on considère la suite $x + \frac{2}{3^n}$, qui convient.

g) C'est immédiat quand on a compris le coup du développement en base 3. Car alors, F_∞ est en bijection avec les suites de 0 et de 2, i.e. $F_\infty \simeq \{0,2\}^{\mathbb{N}} \simeq P(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{R}$.

h) De même, à tout élément de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ on associe un élément de $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ en remplaçant 1 par 2 : on a ainsi une bijection f ; montrons que c'est un homéomorphisme. On sait fort heureusement que chacun des deux espaces est compact (pour le Cantor, on l'a montré ; pour $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, c'est parce qu'un produit de compacts est compact). Or f est continue, donc un homéomorphisme (ça ne marche qu'entre compacts).

Le coin du curieux

Il peut être prouvé que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est du cardinal de $\mathbb{R}$ seulement, et non du cardinal ses parties $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Ainsi il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non boréliens.

Si la mesure de Lebesgue est bien définie sur la tribu borélienne, on peut la compléter avec les parties incluses dans des boréliens de mesure nulle. La mesure de Lebesgue est alors définie sur une tribu *complétée* L, dite de Lebesgue.
Cette tribu est bien plus grande que la tribu borélienne. Pour le voir, comme l'ensemble triadique de Cantor F_∞ est un borélien de mesure nulle, $\mathcal{P}(F_\infty) \subset L \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, ce qui implique une inégalité sur les cardinaux. De plus F_∞ a la puissance du continu, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(F_\infty)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$, et l'égalité $\mathrm{Card}(L) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ est prouvée.

A ce niveau, l'argument de cardinalité ne permet plus d'affirmer qu'il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dans la tribu complétée. Des constructions existent comme l'ensemble de Vitali donné dans le polycopié ou le paradoxe de Banach-Tarski, mais font toutes appel à l'axiome du choix ! A cet égard, on peut se demander si l'axiome du choix est essentiel.

Le surprise fut au rendez-vous : Robert Solovay a répondu de façon satisfaisante au problème en démontrant que la proposition "Tout ensemble de réels est Lebesgue mesurable" est consistante avec les axiomes ZF sans l'axiome du choix ! Ainsi dans le seul cadre des axiomes ZF, l'existence de non-mesurables réels est une proposition indécidable.