

TD7. Mesures.

Échauffements

Exercice 1. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, (Y, \mathcal{B}) un espace mesurable et $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\begin{aligned} \mu_f &: \mathcal{B} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ B &\mapsto \mu(f^{-1}(B)) \end{aligned}$$

est une mesure sur (Y, \mathcal{B}) .

Solution de l'exercice 1.

- $\mu_f(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ car μ est une mesure.
- Pour toute famille $(B_i)_{i \in I}$ dénombrable d'éléments de \mathcal{B} deux à deux disjoints on sait que (exercice 4 du Td 1)

$$\mu \left(f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \right) = \mu \left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \right).$$

Puisque les $f^{-1}(B_i)$ sont deux à deux disjoints et puisque μ est une mesure on a alors

$$\mu \left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \right) = \sum_{i \in I} \mu(f^{-1}(B_i)).$$

Exercice 2. On considère sur \mathbb{R} la tribu $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); A \text{ est dénombrable ou } {}^c A \text{ est dénombrable}\}$. On définit alors

$$\begin{aligned} \mu &: \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ A &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que μ est une mesure.

Solution de l'exercice 2.

- $\mu(\emptyset) = 0$ car \emptyset est de cardinal nul.
- Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathcal{A} deux à deux disjoints.
 - (i) Si tous les B_i sont dénombrables, alors $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ est dénombrable et

$$\mu(B) = 0 = \sum_{i \in I} 0 = \sum_{i \in I} \mu(B_i).$$

- (ii) S'il existe un indice $j \in I$ tel que B_j soit non dénombrable, alors B est non dénombrable et ${}^c B_j$ est dénombrable (car $B_j \in \mathcal{A}$). On sait que $\forall i \in I, i \neq j, B_i \subseteq {}^c B_j$ et donc B_i dénombrable. Finalement on a

$$\mu(B) = 1 = 0 + 1 = \sum_{i \neq j, i \in I} \mu(B_i) + \mu(B_j) = \sum_{i \in I} \mu(B_i).$$

Exercice 3. Dans cet exercice on considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Un ouvert de \mathbb{R} de mesure finie est-il nécessairement borné ?

Solution de l'exercice 3. La réponse est non. Posons pour tout entier naturel non nul n , $A_n =]n, n+2^{-n}[$. λ étant la mesure de Lebesgue, on a, pour tout $n \geq 1$, $\lambda(A_n) = 2^{-n}$. Si on pose $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, A est un ouvert (comme réunion d'ouverts) non borné et, puisque les $(A_n)_{n \geq 1}$ sont deux à deux disjoints,

$$\lambda(A) = \sum_{n \geq 1} \lambda(A_n) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} = 1.$$

Quelques exercices classiques

Exercice 4.

- Soient (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de mesures positives sur \mathcal{A} (pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mu_j(A) \leq \mu_{j+1}(A)$). Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose $\mu(A) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \mu_j(A)$. Montrer que μ est une mesure.
- Sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on définit, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\nu_j(A) = \text{card}(A \cap [j, +\infty[)$. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$ ν_j est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\nu_j(A) \geq \nu_{j+1}(A)$.
- Soit ν la mesure positive définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ par $\nu(A) = \inf_{j \in \mathbb{N}} \nu_j(A)$ pour toute partie A de \mathbb{N} . Déterminer $\nu(\mathbb{N})$ et $\nu(\{k\})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dire si ν est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Solution de l'exercice 4.

- On a $\mu(\emptyset) = 0$ puisque pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mu_j(\emptyset) = 0$.
– Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{A} deux à deux disjoints et $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$. D'une part, $\mu(A) = \lim_j \uparrow \mu_j(A) = \lim_j \uparrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_j(A_n)$, d'autre part $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lim_j \uparrow \mu_j(A_n)$. Comme les termes sont tous positifs, on peut échanger la somme avec la limite croissante. Plus précisément :
• Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_j(A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$. En faisant tendre j vers l'infini, il vient $\mu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.
• Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n \leq N} \mu(A_n) = \lim_j \uparrow \sum_{n \leq N} \mu_j(A_n) \leq \mu(A)$. En faisant tendre N vers l'infini, il vient $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu(A)$.
- Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\nu_j(\emptyset) = \text{card}(\emptyset) = 0$.
– Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de \mathbb{N} deux à deux disjointes,

$$\begin{aligned} \nu_j \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) &= \text{card} \left(\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) \cap [j, +\infty[\right) = \text{card} \left(\bigcup_{n \geq 1} (A_n \cap [j, +\infty[) \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{card}(A_n \cap [j, +\infty[), \end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant du fait que les ensembles qui interviennent dans la réunion sont deux à deux disjoints.

Puisque pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $j \in \mathbb{N}$ on a $A \cap [j, +\infty[\supseteq A \cap [j+1, +\infty[$, on en déduit que $\nu_j(A) \leq \nu_{j+1}(A)$.

- c) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\text{card}(\mathbb{N} \cap [j, +\infty]) = +\infty$ donc $\nu(\mathbb{N}) = \infty$. Si $k \in \mathbb{N}$, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $j > k$ et donc $\{k\} \cap [j, +\infty] = \emptyset$. On en déduit $\nu(\{k\}) = 0$. Si ν était une mesure on aurait $\nu(\mathbb{N}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(\{k\})$ ce qui n'est pas le cas.

Exercice 5. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. On suppose que $A \in \mathcal{A}$ est un atome de \mathcal{A} , c'est-à-dire que A est non vide et pour tout $B \in \mathcal{A}$

$$B \subseteq A \Rightarrow (B = \emptyset \quad \text{ou} \quad B = A).$$

On définit alors

$$\begin{aligned} \mu_A &: \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ B &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } A \subseteq B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que μ_A est une mesure.

Solution de l'exercice 5.

- Puisque A est non vide, on a immédiatement $\mu_A(\emptyset) = 0$.
- Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{A} deux à deux disjoints.
 - (i) Soit $\mu_A(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = 0$. Dans ce cas, A n'est pas inclus dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et n'est donc nécessairement inclus dans aucun des B_n , $n \in \mathbb{N}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_A(B_n) = 0$ et donc

$$\mu_A\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_A(B_n).$$

- (ii) Soit $\mu_A(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = 1$. Dans ce cas, $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap B_n \in \mathcal{A}$ et $A \cap B_n \subseteq A$. Puisque A est un atome on a donc soit $A \cap B_n = \emptyset$ ou $A \cap B_n = A$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq B_n$ ou $A \subseteq B_n^c$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A \subseteq B_{n_0}$ car sinon on aurait $A \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n^c = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n)^c$, ce qui est absurde. Ce n_0 est unique car s'il existait $n_1 \in \mathbb{N}$ différent de n_0 tel que $A \subseteq B_{n_1}$, on aurait $A \subseteq B_{n_0} \cap B_{n_1}$, ce qui est absurde car A est non vide et les $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints.

Exercice 6. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

- a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{|f| \leq n\}$. Montrer que, si $\mu(X) \neq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_n) \neq 0$.
- b) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\mu(A) \neq 0$ et pour tout $x \in A$, $|f(x)| \geq \varepsilon$.

Solution de l'exercice 6.

- a) $X = f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} [-n, n]) = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ et donc $\mu(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$ et l'implication est évidente.
- b) Si on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_{\frac{1}{n}}$ on dispose d'une suite croissante $({}^c B_n)_{n \geq 1}$ et donc $\sup_{n \geq 1} \mu({}^c B_n) = \mu(\bigcup_{n \geq 1} {}^c B_n) = \mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu({}^c B_n) \neq 0$ et on a le résultat désiré avec $A = {}^c B_n$ et $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

Exercice 7. [Lemme de Borel-Cantelli] Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{A} telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty.$$

Montrer que $\mu(\limsup_n A_n) = 0$

Solution de l'exercice 7. Par définition de la limite supérieure,

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\limsup_n A_n \subseteq \bigcup_{k \geq n} A_k$ et donc $\mu(\limsup_n A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)$. La mesure μ étant sous σ -additive, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \mu\left(\limsup_n A_n\right) \leq \sum_{k \geq n} \mu(A_k).$$

Le terme de droite est le reste d'une série convergente et tend donc vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8. Soient μ une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $F(x) = \mu([x, +\infty[)$.

- Montrer que F est décroissante et continue à gauche sur \mathbb{R} et calculer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que F est continue en x si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.
En déduire que $\{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) \neq 0\}$ (l'ensemble des atomes de μ) est dénombrable.

Solution de l'exercice 8.

- Si x et y sont deux réels tels que $x \leq y$, on a $[y, +\infty[\subseteq [x, +\infty[$ et donc F décroissante.
Soit $x \in \mathbb{R}$, calculons la limite à gauche en x . Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite croissante, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n < x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = x$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [y_n, +\infty[$. La suite $(A_n)_{n \geq 0}$ est donc décroissante et $\mu(A_1) < +\infty$ donc

$$\lim_n F(y_n) = \lim_n \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \mu([x, +\infty[) = F(x).$$

On calcule de la même façon (en prenant une suite croissante (resp. décroissante) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et en considérant les suites de parties définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [x_n, +\infty[$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \mu(\emptyset) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \mu(\mathbb{R})$.

- Encore de la même manière (en prenant $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite décroissante tendant vers x avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n > x$), on montre que F a une limite à droite en x , et que l'on a $f(x^+) = \mu(]x, +\infty[)$. En particulier $F(x) - F(x^+) = \mu(\{x\})$, et F est continue en x si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$. Une fonction monotone de \mathbb{R} dans \mathbb{R} a un nombre dénombrable de points de discontinuité (voir l'exercice 2 du TD 3) donc $\{x \in \mathbb{R} ; \mu(\{x\}) \neq 0\}$ est dénombrable.

Pour aller plus loin...

Exercice 9. [Théorème d'Egoroff] Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de (X, \mathcal{A}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

- Montrer que l'ensemble de convergence C de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est mesurable.
- On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge μ -p.p. vers une fonction mesurable f , au sens où $\mu({}^c C) = 0$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, soit $E_n^k = \bigcap_{i \geq n} \{|f_i - f| \leq \frac{1}{k}\}$.

Montrer que $C \subseteq \bigcup_{n \geq 1} E_n^k$. En déduire que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_{k,\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu\left({}^c E_{n_{k,\varepsilon}}^k\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

- c) (Théorème d'Egoroff) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $E_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur E_ε et tel que $\mu({}^c E_\varepsilon) < \varepsilon$.
- d) Donner un contre-exemple lorsque $\mu(X) = +\infty$.

Solution de l'exercice 9.

- a) C'est du cours !
- b) Soit $x \in C$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on prend $\varepsilon = \frac{1}{k}$ et alors $x \in E_N^k$, donc $C \subset \bigcup_{n \geq 1} E_n^k$.

Puisque pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f_i - f$ est mesurable, les ensembles E_n^k , $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$ sont mesurables. On a $C \subseteq \bigcup_{n \geq 1} E_n^k$ et donc $\bigcap_{n \geq 1} {}^c E_n^k \subseteq {}^c C$ on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu({}^c E_n^k) = 0$ puisque $\mu({}^c C) = 0$ et μ est finie. Alors pour $\frac{\varepsilon}{2^k}$ donné, il existe $n_{k,\varepsilon}$ tel que pour tout $n \geq n_{k,\varepsilon}$, $\mu({}^c E_n^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Ceci implique $\mu({}^c E_{n_{k,\varepsilon}}^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

- c) On prend $E_\varepsilon = \bigcap_{k \geq 1} E_{n_{k,\varepsilon}}^k \in \mathcal{A}$ et $\mu({}^c E_\varepsilon) = \mu\left(\bigcup_{k \geq 1} {}^c E_{n_{k,\varepsilon}}^k\right) \leq \sum_{k \geq 1} \mu({}^c E_{n_{k,\varepsilon}}^k) \leq \sum \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.
- d) Soient $X = [0, +\infty[$, \mathcal{A} la tribu trace sur X de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, μ la mesure de Lebesgue et $f_n = \mathbb{1}_{A_n}$ où $A_n = [n, +\infty[$. Alors $f_n \rightarrow f = 0$ partout mais $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 presque uniformément.

Exercice 10. [Application du théorème d'Egoroff] Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de (X, \mathcal{A}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en mesure vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_n \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0.$$

- a) Montrer que si $\mu(X) < +\infty$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge μ -p.p. vers f , alors elle converge en mesure vers f .
- b) Réciproquement, supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en mesure vers f :
- i) Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que

$$\forall k \geq 1, \mu\left(\left\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\right\}\right) < \frac{1}{k^2}.$$

- ii) Soit $A = \liminf_k \{|f_{n_k} - f| \leq \frac{1}{k}\}$. Montrer que $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ converge vers f sur A et que $\mu({}^c A) = 0$ (en d'autres termes, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui converge μ -p.p. vers f).

Solution de l'exercice 10.

- a) Fixons $\varepsilon > 0$. D'après l'exercice 9, pour tout $\eta > 0$, il existe $E_\eta \in \mathcal{A}$ tel que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur E_η et $\mu({}^c E_\eta) < \eta$. La convergence uniforme nous assure l'existence d'un N_η tel que pour $n \geq N_\eta$, la norme infinie de la fonction $f - f_n$ restreinte à E_η est inférieure à ε . Alors, pour $n \geq N_\eta$, on a $\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \mu({}^c E_\eta) < \eta$. Cela prouve que $\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\})$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
- b) i) Pour tout $k \geq 1$, on a $\mu(\{|f_n - f| > \frac{1}{k}\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc il existe n_k tel que $\mu(\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\}) \leq \frac{1}{k^2}$.
- ii) Pour tout $k \geq 1$, on pose $E_k = \{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\}$. Puisque $\sum_k \mu(E_k) < +\infty$ alors $\mu(\limsup_k E_k) = 0$. Soit $E = \limsup_k E_k$, si $x \in {}^c E$, il existe $k_x \geq 1$ tel que pour tout $k \geq k_x$, $x \in {}^c E_k$ et donc $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ converge vers f sur ${}^c E$.