TD 8. Mesures. Mesure de Lebesgue. Intégrale des fonctions positives.

Echauffements

Exercice 1. Soit a un réel. On note δ_a la mesure de Dirac en a sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, définie par, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A$ et 0 sinon. Pour toute fonction mesurable positive $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, déterminer $\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\delta_a$.

Solution de l'exercice 1. Montrons que

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\delta_a = f(a)\,.$$

Pour cela nous commençons par montrer le résultat pour les fonction étagées. Il suffit de le faire pour une fonction indicatrice, le résultat général en découlant immédiatement par linéarité. Supposons que $f = \mathbb{1}_A$, où $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\delta_a = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \mathrm{d}\delta_a = \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a donc bien $\int \mathbb{1}_A \mathrm{d}\delta_a = \mathbb{1}_A(a)$. Si f est une fonction mesurable positive, il existe une suite croissante de fonctions étagées positives $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers f. D'après ce que l'on vient d'écrire pour les fonctions étagées, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\delta_a = f_n(a)$. D'après le thérorème de convergence monotone,

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\delta_a = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\delta_a = \lim_{n\to+\infty} f_n(a) = f(a)\,.$$

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ une mesure non nulle et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) > 0$ tel que pour tout $x, y \in A$,

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Solution de l'exercice 2. Pour tout $q \in \mathbb{Q}$, notons $A_q = f^{-1}(]q-\frac{\epsilon}{2}, q+\frac{\epsilon}{2}[)$. Alors $\cup_{q\in\mathbb{Q}} A_q = f^{-1}(\mathbb{R}) = X$. Supposons que $\mu(A_q) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$, alors $\mu(X) \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mu(A_q) = 0$. Comme μ est non nulle il existe $q \in \mathbb{Q}$ telle que $\mu(A_q) > 0$, A_q vérifie les propriétés demandées.

i **Exercice 3.** On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.

a) Montrer que λ est σ-finie, c'est-à-dire qu'il existe une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables tels que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\geq1} E_n$ et $\lambda(E_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout compact K de $\mathbb{R}$, $\lambda(K) < +\infty$.

c) Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il forcément borné ?

Solution de l'exercice 3. a) Poser par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n = [-n, n]$.
b) Le compact K est fermé, il est donc mesurable. Il est borné, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que K soit inclus dans un E_n et K est donc de mesure finie.
c) Non. $\bigcup_{n\geq1}]n, n + 1/2^n[$ est un contre-exemple. Il existe même un ouvert de mesure aussi petite que l'on veut et dense dans $\mathbb{R}$ (voir exercice **??**).

Mesures

i **Exercice 4.** Soit $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k\alpha_k \leq 1$. L'ensemble de Cantor associé à cette suite est défini de la manière suivante : on pose $A_0 = [0,1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_{n+1} s'obtient de A_n en retranchant, de chacun des 2^n intervalles le composant, un intervalle ouvert, centré, de longueur α_n. On définit alors l'ensemble de Cantor par $K = \bigcap_{n\geq 0} A_n$. En particulier, l'ensemble triadique de Cantor est obtenu pour la suite $\alpha_n = \frac{1}{3^{n+1}}$, $n \geq 0$.

a) Calculer la mesure de Lebesgue de K. En déduire que l'ensemble triadique de Cantor est d'intérieur vide.

b) Montrer que K est toujours d'intérieur vide. Comparer la mesure de K à celle de son intérieur.

Solution de l'exercice 4.

a) Par récurrence, on montre que la propriété suivante est satisfaite pour tout $n \geq 0$:
A_n est une réunion disjointe de 2^n intervalles fermés d'égale longueur notée l_n. La mesure de A_n est donnée par $\lambda(A_n) = 2^n l_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k\alpha_k$.
D'une part, cette propriété justifie la construction par récurrence de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (justifie qu'on ne retire jamais un intervalle d'un intervalle plus petit...). D'autre part, K est la limite décroissante de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, constituée d'ensembles de mesure finie, donc

$$\lambda(K) = \lim_n \downarrow \lambda(A_n) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k\alpha_k.$$

Dans le cas de l'ensemble triadique, on obtient $\lambda(K) = 0$. A fortiori $\lambda(Int(K)) \leq \lambda(K) = 0$. Un *ouvert* de mesure nulle est vide, donc l'ensemble triadique de Cantor est d'intérieur vide.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n ne contient aucun intervalle de longueur plus grande que 2^{-n}, donc il en est de même pour K. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, le compact K est d'intérieur vide. A fortiori, dès que $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k\alpha_k < 1$, l'ensemble K est un exemple d'ensemble de mesure strictement plus grande que la mesure de son intérieur.

i **Exercice 5.** Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, telle que μ soit finie sur les compacts de $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit

$$F_a(t) = \begin{cases} \mu([a,t[), & \text{si } t > a, \\ -\mu([t,a[), & \text{si } t \leq a. \end{cases}$$

Montrer que F_a est croissante et continue à gauche.

Solution de l'exercice 5. La croissance de F_a est évidente.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que F_a est continue à gauche sur $]-\infty, a]$.
Pour cela, il suffit de montrer que pour tout t dans $]-\infty, a]$ et toute suite $(t_n)_{n\geq 0}$ croissante et convergeant vers t, $F_a(t_n) \to F_a(t)$. Or, pour un tel t et une telle suite $(t_n)_{n\geq 0}$, l'intervalle $[t_n, a[$ décroît vers l'intervalle $[t, a[$ et l'intervalle $[t_0, a[$ est de mesure finie. Donc $\mu([t_n, a[) \to \mu([t,a[)$ *(continuité pour les suites décroissantes de mesure finie)* et on a bien $F_a(t_n) \to F_a(t)$.
On traite de la même manière la continuité à gauche sur $]a, +\infty[$, en utilisant la continuité pour les suites croissantes (la "continuité à gauche" de μ), sans avoir besoin de l'argument "de mesure finie".

Exercice 6. En utilisant l'exercice 4, montrer qu'il est possible de construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue 5. Proposer également une méthode directe.

Solution de l'exercice 6. Le point qui peut surprendre est l'existence d'un ouvert dense de mesure "petite". Mais cela ne devrait plus nous surprendre après l'exercice **??**, puisque le complémentaire de K dans $[0,1]$ est un ouvert, dense dans $[0,1]$, de mesure $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k\alpha_k$, qui peut être rendue aussi petite que l'on veut. Il est possible d'étendre cette construction à un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue 5.
Voici un exemple plus direct, plus simple.
Soit $\{q_0, q_1, \ldots\}$ une énumération de $\mathbb{Q}$. Introduisons $\Omega = \bigcup_{n\geq 1}]q_n - 2^{-n}, q_n + 2^{-n}[$. Alors Ω est ouvert et il est dense (car il contient $\mathbb{Q}$). D'autre part, $2 \leq \lambda(\Omega) \leq 4$.

On considère maintenant, l'ensemble

$$\frac{5}{\lambda(\Omega)}.\Omega := \left\{ \frac{5x}{\lambda(\Omega)};\, x \in \Omega \right\}.$$

C'est un ouvert dense et de mesure de Lebesgue égale à 5.

Intégration

i **Exercice 7.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction étagée positive. On définit pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu_f(A) = \int_X f \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu.$$

Montrer que μ_f est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

Solution de l'exercice 7. Il s'agit d'un simple jeu de définitions. Une combinaison linéaire finie (et même dénombrable) à coefficient positifs, de mesures, est une mesure, donc il suffit de le montrer pour f fonction indicatrice d'un ensemble mesurable – notons-le B. Mais alors $\mu_f(A) = \mu(A \cap B)$. Il est clair que $\mu_f(\emptyset) = 0$, il reste à montrer la σ-additivité. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{A}$ deux à deux disjoints. Alors

$$\mu_f\left(\bigcup A_n\right) = \mu\left(\left(\bigcup A_n\right) \cap B\right) = \mu\left(\bigcup (A_n \cap B)\right) = \sum \mu(A_n \cap B) = \sum \mu_f(A_n),$$

où nous avons utilisé le fait que les $A_n \cap B$ sont deux à deux disjoints.

i **Exercice 8.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : X \to [0, +\infty]$ des applications mesurables et positives. Montrer que :

a) Pour tout $a > 0$, $\mu(\{f > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_X f \mathrm{d}\mu$.
b) Si $\int_X f \mathrm{d}\mu < +\infty$, alors f est finie μ-p.p.
c) $\int_X f \mathrm{d}\mu = 0$ si et seulement si f est nulle μ-p.p.
d) Si $f = g$ μ-p.p., alors $\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X g \mathrm{d}\mu$;

Solution de l'exercice 8.

a) On a $f \geq a\mathbb{1}_{\{f>a\}}$ (car f est positive), donc $\int_X f \mathrm{d}\mu \geq \int_X a\mathbb{1}_{\{f>a\}} \mathrm{d}\mu = a\mu(\{f > a\})$.
b) D'après a), $\int_X f \mathrm{d}\mu \geq a\mu(\{f = +\infty\})$ pour tout $a > 0$, donc

$$\int_X f \mathrm{d}\mu < +\infty \Rightarrow \mu(\{f = +\infty\}) = 0.$$

c) Supposons $\int_X f \mathrm{d}\mu = 0$. D'après a), on a $\mu(\{f > a\}) = 0$ pour tout $a > 0$. Par "continuité à gauche de μ", on a donc $\mu(\{f > 0\}) = 0$. Réciproquement, supposons que f est nulle presque partout, et soit A l'ensemble des points où f n'est pas nulle. Alors $\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X +\infty.\mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = 0$.
d) Si $f = g$ μ-p.p., alors $f = g = f \wedge g$ μ-p.p., alors $f - f \wedge g$ (comme $g - f \wedge g$) est positive et nulle presque partout. En utilisant c) (et la linéarité de l'intégrale), on déduit

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X f \wedge g \mathrm{d}\mu = \int_X g \mathrm{d}\mu.$$