TD9. Intégration. Convergence monotone. Lemme de Fatou.

Echauffements

Exercice 1. Vrai ou Faux ? Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Si $f = \mathbb{1}_A$, avec $A \in \mathcal{A}$, alors $\int_X f d\mu = \mu(A)$.
b) Si $f : X \to [0, +\infty]$ est mesurable et vérifie $\mu(f^{-1}\{+\infty\}) = 0$, alors f est intégrable.
c) Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.
d) Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions mesurables positives et f sa limite.
   i) $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$ toujours.
   ii) $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$ si $\exists N$ tel que $\int f_N d\mu < \infty$.
   iii) $\int f d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$ ssi $\exists N$ tel que $\int f_N d\mu < \infty$.
   iv) $\int f d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$ toujours.

Solution de l'exercice 1.a) oui b) non c) non d) i)non ii) oui iii) non iv) oui.

Exercice 2. Soit (f_n) une suite d'applications boréliennes de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$. Dans les quatre cas suivants, montrer que la suite $(\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda)_n$ converge et déterminer sa limite (aucun calcul d'intégrale n'est exigé).

a) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{\sqrt{1 + n^2x^2}}$,
b) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-nx}}{\sqrt{1 + n^2x^2}}$,
c) $f_n(x) = \sin(nx)\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$,
d) $f_n(x) = |cos(x)|^{1/n}e^{-x}$.

Solution de l'exercice 2.

a) On voit que la suite (f_n) est une suite croissante de fonctions boréliennes positives, croissant vers f, où $f(x) = e^{-x}/x$ $(x \geq 0)$, qui n'est PAS λ-intégrable. Donc la limite de la suite $(\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda)_n$ vaut $+\infty$. On peut aussi utiliser le lemme de Fatou, qui ne nécessite pas de prouver que la suite (f_n) est croissante.
b) par le changement de variable $u = nx$ (dans l'intégrale de Riemann qui est égale à l'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue), on voit que pour tout n, $\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}^+} (1+u^2)^{-1/2}e^{-u}d\lambda(u)$.
c) comme f_n est bornée et que $g'_n = f_n$, où $g_n(x) = -n^{-1}\cos(nx)1[0, n](x)$, on peut calculer directement $\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda = \int_{[0,n]} f_n d\lambda = g_n(n) - g_n(0) = (1 - \cos(n^2))/n$, et donc la suite $(\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda)_n$ a pour limite 0.
d) soit $A := \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$, qui est dénombrable, donc λ-négligeable. Alors pour tout $x \notin A$, $|\cos(x)| \in]0, 1]$ et par conséquent $(|\cos(x)|^{1/n})$ converge vers 1 en croissant. Donc la suite (f_n) croît λ-p.p. sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction f, avec $f(x) = e^{-x}$. On peut utiliser au choix le théorème de convergence monotone ou le théorème de convergence dominée (avec domination par f) pour montrer que la suite $(\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda)_n$ converge vers $\int_{\mathbb{R}^+} f d\lambda = 1$.

i **Exercice 3.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction $\mathcal{A}-$mesurable positive. Montrer qu'alors :

$$\int_X f d\mu = 0 \text{ si, et seulement si, } f \text{ est négligeable, c'est-à-dire } f = 0\ \mu - p.p..$$

Solution de l'exercice 3. Deux méthodes de résolution (au moins) sont possibles :
– preuve directe en revenant aux définitions élémentaires, voir le corrigé de la première question de l'exercice 5.
– preuve par l'inégalité de Markov, voir fin de la feuille précédente.

Quelques applications du théorème de convergence monotone

i **Exercice 4.** **Ensembles de niveau.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Pour $t > 0$, on pose $S_f(t) = \{x \in X, f(x) > t\}$ et $\Psi_f(t) = \mu(S_f(t))$. Montrer que

$$\int_X f d\mu = \int_0^\infty \Psi_f(t)dt.$$

Solution de l'exercice 4. Si f est nulle μ-p.p., le résultat est clair car $\forall t > 0$, l'ensemble $S_f(t)$ est de mesure nulle. Supposons désormais f non nulle μ-p.p..

Etape 1 : on commence par traiter le cas où f est étagée, puis on raisonnera par approximation par le lemme fondamental. Soit f étagée, elle s'écrit $f = \sum_{1 \leq i \leq N} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec $\{A_i\}_{1 \leq i \leq N}$ partition mesurable de X. D'une part, on peut supposer les α_i deux à deux distincts quitte à faire des réunions sur les A_i. (remarque : on peut montrer que l'écriture d'une fonction étagée sous cette forme est alors unique). D'autre part, quitte à réindexer, on peut supposer que les α_i sont indexés par ordre croissant : $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_N$. Le membre de gauche s'évalue facilement par linéarité

$$\int_X f d\mu = \int_X \sum_{1 \leq i \leq N} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} d\mu = \sum_{1 \leq i \leq N} \alpha_i \mu(A_i).$$

Pour estimer le membre de droite, on commence par calculer $S_f(t)$ pour tout $t > 0$. Alors

$$S_f(t) = \{x \in X, f(x) > t\} = \{x \in X, \sum_{1 \leq i \leq N} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} > t\} = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq N \\ \alpha_i > t}} A_i.$$

Compte-tenu que $\{A_i\}_{1 \leq i \leq N}$ est une partition mesurable de X (les ensembles A_i sont en particulier deux à deux disjoints), on peut expliciter l'expression de $S_f(t)$ pour en déduire $\Psi_f(t)$.

$$S_f(t) = \begin{cases} X & \text{si } 0 \leq t < \alpha_1, \\ \bigcup_{i+1 \leq j \leq N} A_j & \text{si } \alpha_i \leq t < \alpha_{i+1}, 1 \leq i \leq N-1, \\ \emptyset & \text{si } t \geq \alpha_N + 1, \end{cases} \quad \Psi_f(t) = \begin{cases} \mu(X) & \text{si } 0 \leq t < \alpha_1, \\ \sum_{i+1 \leq j \leq N} \mu(A_j) & \text{si } \alpha_i \leq t < \alpha_{i+1}, 1 \leq i \leq N-1, \\ 0 & \text{si } t \geq \alpha_N + 1, \end{cases}$$

Nous allons distinguer deux cas. S'il existe A_{i_0} tel que $\alpha_{i_0} > 0$ et $\mu(A_{i_0}) = +\infty$, alors $\mu(X) = +\infty$ et par positivité de la fonction $\Psi_f(t)$, on peut écrire

$$\int_0^\infty \Psi_f(t)dt \geq \int_0^{\alpha_1} \mu(X)dt = \alpha_1 \mu(X) = +\infty \text{ et } \int_X f d\mu = +\infty$$

ce qui donne le résultat. Sinon, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = 0$ ou $\mu(A_i) < +\infty$. Le seul A_i qui peut être de mesure $+\infty$ est A_1 si $\alpha_1 = 0$ (avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$). On voit qu'on peut toujours écrire

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Psi_f(t)dt &= \alpha_1 \mu(X) + \sum_{1 \leq i \leq n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \sum_{j \geq i+1} \mu(A_j) = \alpha_1 \mu(X) + \sum_{2 \leq i \leq n} \alpha_i \sum_{j \geq i} \mu(A_j) - \sum_{1 \leq i \leq n-1} \alpha_i \sum_{j \geq i+1} \mu(A_j) \\ &= \alpha_1 \mu(X) + \alpha_n \sum_{j \geq n} \mu(A_j) - \alpha_1 \sum_{j \geq 2} \mu(A_j) + \sum_{2 \leq i \leq n-1} \alpha_i (\sum_{j \geq i} \mu(A_j) - \sum_{j \geq i+1} \mu(A_j)) \\ &= \alpha_1 (\mu(X) - \sum_{j \geq 2} \mu(A_j)) + \alpha_n \mu(A_n) + \sum_{2 \leq i \leq n-1} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \mu(A_i).\end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat pour les fonctions étagées.

Etape 2 : soit maintenant f une fonction mesurable positive quelconque. D'après le lemme fondamental d'approximation par les fonctions étagées, (version pour les fonctions mesurables positives) il existe une suite **croissante** de fonctions étagées positives $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant simplement vers f. Alors par théorème de convergence monotone

$$\int_X f d\mu = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_0^\infty \Psi_{f_n}(t)dt$$

Il reste à étudier la limite de $(\Psi_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Alors par croissance de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $t > 0$, la suite d'ensembles $S_{f_n}(t)$ est aussi croissante au sens de l'inclusion (en effet, si $g \leq h$, alors $\forall t > 0$,

$S_g(t) \subset S_h(t)$ car si $x \in S_g(t)$, $t < g(x) \leq h(x)$ et donc $x \in S_h(t)$). Par conséquent, sa limite existe et vaut $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{f_n}(t)$.
Explicitons cette limite. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq f$, $S_{f_n}(t) \subset S_f(t)$ et donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{f_n}(t) \subset S_f(t)$. Réciproquement, soit $x \in S_f(t)$, $t < f(x)$. Or, par convergence simple croissante de (f_n) vers f, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $t < f_n(x) \leq f(x)$. En particulier, $x \in S_{f_{n_0}}(t) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{f_n}(t)$. Donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{f_n}(t) = S_f(t)$.
Par continuité à gauche de la mesure μ, la suite de fonctions $(\Psi_{f_n})_{n\in\mathbb{N}} = (\mu(S_{f_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante et convergente de limite $\Psi_f = \mu(S_f)$. Par nouvelle application du théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty \Psi_{f_n}(t)dt = \int_0^\infty \lim_{n\to+\infty} \Psi_{f_n}(t)dt = \int_0^\infty \Psi_f(t)dt$$

ce qui donne le résultat dans le cas général.

i **Exercice 5.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu = 0$. Montrer que $f = 0$ μ-presque partout.

b) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et F un fermé de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu(A) > 0, \text{ on a } \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu \in F.$$

   i) Soit $I \subset F^c$ un intervalle ouvert. Montrer que $\mu(f^{-1}(I)) = 0$.

   ii) En déduire que $f(x) \in F$ pour presque tout x.

Solution de l'exercice 5. Nous rappelons la proposition préliminaire suivante : **Proposition :** Soit f une fonction $\mathcal{A}-$mesurable positive. Alors $\int_X f d\mu = 0$ si, et seulement si, f est négligeable, c'est-à-dire $f = 0$ $\mu - p.p.$. *Preuve de la proposition.* L'ensemble $A = \{x \in X; f(x) > 0\}$ est la réunion de la suite **croissante** $A_n = \{x \in X; f(x) \geq 1/n\}$, $n \geq 1$. Par continuité supérieure de la mesure μ, $\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$. D'autre part $\chi_{A_n} \leq nf$, d'où $\mu(A_n) \leq n \displaystyle\int f d\mu = 0$ donc $\mu(A_n) = 0$ et $\mu(A) = 0$.
Réciproquement, supposons $f = 0$ $p.p.$. Toute fonction étagée positive $\varphi \leq f$ est a fortiori nulle presque partout. Si on écrit alors $\varphi = \sum_{i\in I} a_i\chi_{A_i}$, où $a_i \geq 0$ et $(A_i)_{i\in I}$ est une partition finie de X avec $A_i \in \mathcal{A}$, ceci signifie que $\mu(A_i) = 0$ dès que $a_i > 0$ et par conséquent $\displaystyle\int \varphi d\mu = \sum_{i\in I} a_i\mu(A_i) = 0$.
Par définition, $\int_X f d\mu$ pour une fonction f $\mathcal{A}-$mesurable positive est :

$$\int_X f d\mu = \sup_{\varphi\leq f, \varphi\in\mathcal{E}_+} \int_X \varphi d\mu \tag{1}$$

on en déduit que l'intégrale de f est nulle, ce qui achève la preuve de la proposition préliminaire.

a) Supposons $f = 0$ $p.p.$, a fortiori $f\chi_A = 0$ $p.p.$, d'où $\int_A f d\mu = 0$ d'après le corollaire précédent. Réciproquement, supposons $\int_A f d\mu = 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Si f est à valeurs réelles, on pose :

$$A_+ = \{x \in X; f(x) \geq 0\} \quad \text{et} \quad A_- = \{x \in X; f(x) \leq 0\} \tag{2}$$

ces ensembles sont mesurables et $f_+ = f\chi_{A_+}$, $f_- = -f\chi_{A_-}$. Vu l'hypothèse, on a : $\int f_\pm d\mu = 0$ d'où $f_\pm = 0$ $p.p.$ d'après la proposition préliminaire. Alors $f = 0$ $p.p.$.

b) i) Soit $I \subset F^c$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que $\mu(f^{-1}(I)) > 0$. L'intervalle ouvert I est de la forme $]a, b[$, $a < b$ et peut être décrit comme la boule ouverte de centre $c = \frac{a+b}{2}$ et de rayon $r = \frac{b-a}{2}$ soit $I = B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$. Comme $I \subset F^c$, $\forall x \in f^{-1}(I), f(x) \in I \subset F^c$, d'où $\forall x \in f^{-1}(I), d(c, F) \geq r > |f(x) - c|$ (†). De plus, pour $A = f^{-1}(I)$ tel que $\mu(A) > 0$,

$$\left|\frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu - c\right| = \left|\frac{1}{\mu(A)} \int_A (f - c) d\mu\right| \leq \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(x) - c|\, d\mu(x) \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{\mu(A)} \int_A d(c, F) d\mu(x)$$

$$\left|\frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu - c\right| \leq d(c, F) \tag{3}$$

(on rappellera qu'il faut faire attention au fait que les inégalités strictes deviennent des inégalités larges quand on passe aux intégrales) Montrons que l'inégalité (3) est en fait stricte. Supposons par l'absurde qu'il y a égalité. Chaque inégalité est alors une égalité, en particulier $(*)$ qui devient :

$$\int_A (d(c,F) - |f(x) - c|)\, d\mu(x) = 0.$$

La fonction g définie par : $g(x) = d(c,F) - |f(x) - c|$ est mesurable (car f l'est) et positive sur $f^{-1}(I)$ (par $(\dagger)$). D'après la proposition préliminaire : $d(c,F) - |f(x) - c| = 0$ $\mu - p.p.$ sur $f^{-1}(I)$, c'est absurde car : $\forall x \in f^{-1}(I), d(c,F) \geq r > |f(x) - c|$ et $\mu(f^{-1}(I)) > 0$.

Par conséquent, $\dfrac{1}{\mu(A)} \displaystyle\int_A f$ appartient à la boule ouverte $B(c, d(c,F)) = I$. L'inclusion $I \subset F^c$ entraine $\dfrac{1}{\mu(A)} \displaystyle\int_A f d\mu \notin F$: absurde. **Conclusion :** $\mu(f^{-1}(I)) = 0$.

ii) F^c est ouvert de $\mathbb{R}$ comme complémentaire d'un fermé. Par structure des ouverts de $\mathbb{R}$, F^c s'écrit : $F^c = \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ où Λ est un ensemble dénombrable. Le raisonnement ci-dessus valable pour tout intervalle I_λ donne : $\forall \lambda \in \Lambda, \mu(f^{-1}(I_\lambda)) = 0$. On en déduit :

$$\mu(f^{-1}(F^c)) = \mu(f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda)) = \mu(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(I_\lambda)) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \mu(f^{-1}(I_\lambda)) = 0$$

$\mu(f^{-1}(F^c)) = 0$ signifie exactement que $f(x) \in F$ pour presque tout x.

Remarque 1 : Au lieu de prendre $E = \mathbb{R}$ pour espace d'arrivée de la fonction f, E peut être seulement un espace de Banach. Dans ce cas, il existe une partie négligeable N de X telle que $f(X \backslash N)$ soit séparable : si E est séparable, $N = \emptyset$, sinon si f est μ-mesurable, il existe un ensemble négligeable $N \subset X$ tel que $f(X \backslash N)$ soit séparable (exercice) ; dans les deux cas, on peut remplacer X par $X \backslash N$ et supposer $N = \emptyset$. Soit $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une partie dense de $f(X)$. Les boules B_k de centre $v_k \notin F$ et de rayon $\frac{1}{2} d(v_k, F)$ recouvrant $f(X) \backslash F$, il suffit de montrer que chacun des $A_k := f^{-1}(B_k)$ est de mesure nulle. Supposons dans le cas contraire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_k) > 0$. L'hypothèse donne dans ce cas :

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{\mu(A_k)} \int_{A_k} f d\mu - v_k \right| &= \left| \frac{1}{\mu(A_k)} \int_{A_k} (f - v_k) d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(A_k)} \int_{A_k} |f(x) - v_k|\, d\mu(x) \\ &\leq \frac{1}{\mu(A_k)} \int_{A_k} \frac{1}{2} d(v_k, F) d\mu(x) = \frac{1}{2} d(v_k, F)\end{aligned}$$

d'où : $\dfrac{1}{\mu(A_k)} \displaystyle\int_{A_k} f d\mu \notin F$, ce qui est absurde.

Remarque 2 : Pour montrer que $(*)$ est une inégalité stricte, on a en réalité utilisé le lemme suivant (découlant clairement de la proposition préliminaire) : *Si f est une fonction $\mathcal{A}$-mesurable positive telle que : $\exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) > 0$ et tel que $f > 0$ sur A. Alors $\int_X f d\mu > 0$.*

i **Exercice 6.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de masse totale finie et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

a) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{n \geq 1} n\mu(\{n \leq |f| < n+1\}) < +\infty$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mu(\{k \leq |f| < k+1\}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\{|f| \geq k\}) - n\mu(\{|f| \geq n+1\})$.

c) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ décroissante, convergente vers 0 et telle que la suite $v_n = \sum_{k=1}^n u_k - nu_{n+1}$ est bornée. Montrer que : $\forall p \geq n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k - nu_{p+1} \leq v_p$. En déduire que : $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n < +\infty$.

d) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) < +\infty$.

e) Donner un contre-exemple lorsque $\mu(X) = +\infty$.

Solution de l'exercice 6.

a) Par définition $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ si et seulement si $\int_X |f| d\mu < +\infty$. Notons $[\cdot]$ la fonction partie entière. On observe tout d'abord que la fonction $[|f|]$ peut s'écrire sous la forme $[|f|] = \sum_{n\in\mathbb{N}} n \mathbb{1}_{n\leq |f| < n+1}$.

Lemme : Si $\mu(X) < +\infty$ alors f est μ-intégrable si et seulement si $[|f|]$ est intégrable.

Preuve du lemme : l'encadrement $[|f|] \leq |f| < [|f|] + 1$ donne :

$$\int_X [|f|] d\mu \leq \int_X |f| d\mu \leq \int_X ([|f|]+1) d\mu = \int_X [|f|] d\mu + \mu(X) \quad \text{où} \quad \mu(X) < +\infty \text{ par hypothèse.}$$

Contre-exemple : $X = \mathbb{R}$, μ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $f \equiv 1/2$, alors $[|f|] \equiv 0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$ et $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$.

Introduisons la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $g_n = \sum_{k=0}^n k \mathbb{1}_{k\leq|f|<k+1}$ qui sont :
- positives et croissantes par construction (immédiat : $g_{n+1} - g_n = (n+1)\mathbb{1}_{n+1\leq|f|<n+2} \geq 0$),
- mesurables (car f l'est),
- étagées (car pour tout n, g_n prend un nombre fini de valeurs).

D'après le théorème de Beppo-Levi, $\lim_n g_n = [|f|]$ est mesurable positive et :

$$\int_X [|f|] d\mu = \int_X \lim_n g_n d\mu = \lim_n \uparrow \int_X g_n d\mu = \lim_n \int_X \sum_{k=0}^n k \mathbb{1}_{k\leq|f|<k+1} d\mu = \lim_n \sum_{k=0}^n k\mu\left(k \leq |f| < k+1\right) \quad (4)$$

L'équivalence proposée découle alors immédiatement du lemme :

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \text{ ssi } [|f|] \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \text{ c'est-à-dire si et seulement si } \int_{\mathbb{R}} [|f|] d\mu = \sum_{k\geq 0} k\mu\left(k \leq |f| < k+1\right) < +\infty.$$

b) Procédons par récurrence.
- au rang $n = 1$: $\mu(\{|f| \geq 1\}) - \mu(\{|f| \geq 2\}) = \mu(\{1 \leq |f| < 2\})$
  par la décomposition en ensembles disjoints : $\{|f| \geq 1\} = \{1 \leq |f| < 2\} \cup \{2 \leq |f|\}$, soit en mesure : $\mu(\{|f| \geq 1\}) = \mu(\{1 \leq |f| < 2\}) + \mu(\{2 \leq |f|\})$.
- Supposons la relation vraie au rang n.
- Au rang $n+1$: on découpe la somme pour utiliser l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k\mu(\{k \leq |f| < k+1\}) &= \sum_{k=1}^{n} k\mu(\{k \leq |f| < k+1\}) + (n+1)\mu(\{n+1 \leq |f| < n+2\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu(\{|f| \geq k\}) - n\mu(\{|f| \geq n+1\}) + (n+1)\mu(\{n+1 \leq |f| < n+2\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mu(\{|f| \geq k\}) - (n+1)\mu(\{|f| \geq n+1\}) + (n+1)\mu(\{n+1 \leq |f| < n+2\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mu(\{|f| \geq k\}) - (n+1)\mu(\{|f| \geq n+2\})
\end{aligned}$$

  en écrivant la réunion disjointe : $\{|f| \geq n+1\} = \{n+2 > |f| \geq n+1\} \cup \{n+2 > |f|\}$.

c) Soit la suite $(w_p)_{p\geq n}$ définie par $w_p = \sum_{k=1}^n u_k - nu_{p+1}$. On distingue deux cas :
- si $p = n$: $w_n = \sum_{k=1}^n u_k - nu_{n+1} = v_n \leq v_n$.
- si $p > n$: alors $p \geq n+1$ et :

$$w_p - v_p = \sum_{k=1}^n u_k - nu_{p+1} - \sum_{k=1}^p u_k + pu_{p+1} = -\sum_{k=n+1}^{p} u_k + (p-n)u_{p+1} = \sum_{k=n+1}^{p} (u_{p+1} - u_k) \leq 0$$

  car $\forall k \leq p, u_{p+1} \leq u_k$ par décroissance de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Conclusion : $\forall p \geq n$, $w_p = \sum_{k=1}^n u_k - nu_{p+1} \leq v_p$. (†)

Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0, elle est nécessairement à valeurs positives, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors aussi positive et de plus croissante. Il suffit de la majorer pour la convergence. D'après (†),

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \leq v_p + nu_{p+1} \leq |v_p| + nu_{p+1} \text{ par inégalité triangulaire puis : } \quad S_n \leq M + nu_{p+1} \quad (*)$$

car par hypothèse, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, disons par un réel M. En faisant tendre alors p vers $+\infty$, $(*)$ donne : $S_n \leq M$, et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite positive $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par M). Elle converge donc de limite $\sum_{n\geq 1} u_n < +\infty$.

d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mu(\{|f| \geq n\})$. Elle est décroissante :

$$u_n - u_{n+1} = \mu(\{n+1 \geq |f| \geq n\}) \geq 0.$$

Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, alors par les questions a) et b), la suite $(v_n)_{n\in N}$ associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à la question c) est bornée. L'inégalité de Markov permet de vérifier l'hypothèse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 :

$$0 \leq \mu(\{|f| \geq n\}) \leq \frac{1}{n}\int_X |f| d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

L'application de la question c) donne alors le résultat : $\sum_{n\geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) < +\infty$.
Réciproquement supposons que $\sum_{n\geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) < +\infty$. Alors la suite positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0 par convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) = \sum_{n\geq 1} u_n$. Par critère de Cauchy, le reste $R_p = \sum_{n\geq p} u_n$ de la série converge vers 0 et :

$$R_p - R_{2p} = \sum_{n\geq p} u_n - \sum_{n\geq 2p} u_n = \sum_{n\geq p}^{2p-1} u_n \text{ d'où : } \frac{p}{2p-1}(2p-1)u_{2p-1} = pu_{2p-1} \leq R_p - R_{2p} \leq pu_p$$

On en déduit que $\lim_p pu_p = 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la questions b) :

$$\sum_{k\geq 1} k\mu(\{k \leq |f| < k+1\}) = \sum_{k\geq 1} \mu(\{|f| \geq k\}) < +\infty$$

qui fournit par la question a) $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

e) On reprend le contre-exemple donnée à la question a) en prenant la fonction constante sur $\mathbb{R}$ $f \equiv 1/2$: $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(\{|f| \geq n\} = 0$ donc $\sum_{k\geq 1} \mu(\{|f| \geq k\}) = 0 < +\infty$ mais $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

Exercice 7.

a) **Lemme de Borel-Cantelli.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables tels que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mu(\limsup_n A_n) = 0$.

b) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables telles que $\int_X |f_n|^2 d\mu \leq M$ pour tout $n \geq 1$, pour un certain $M > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathcal{A}$ de mesure nulle tel que pour tout $x \notin N$, à partir d'un certain rang, $|f_n(x)| < n$.

Solution de l'exercice 7.

a) L'ensemble $\limsup_n A_n$ est défini par : $\limsup\limits_n A_n = \bigcap\limits_{n\geq 0} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$.
L'inclusion $\forall n \geq 0$, $\limsup_n A_n \subset \bigcup_{k\geq n} A_k$ donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(\limsup_n A_n) \leq \mu(\bigcup_{k\geq n} A_k)$. Par sous-additivité de μ, on a pour tout $n \geq 1$, $\mu(\bigcup_{k\geq n} A_k) \leq \sum_{k\geq n} \mu(A_k)$. Or, $\left(\sum\limits_{k\geq n} \mu(A_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des restes d'une série convergente et tend donc vers 0 quand $n \to \infty$, ce qui donne : $\mu(\limsup_n A_n) = 0$.

b) Introduisons la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles définie par $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{x \in X, |f_n(x)| \geq n\}$. D'après l'inégalité de Markov,

$$\mu(A_n) = \mu(|f_n| \geq n) = \mu(|f_n|^2 \geq n^2) = \int_X \mathbb{1}_{|f_n|^2\geq n^2} d\mu \leq \frac{1}{n^2}\int_X |f_n|^2 d\mu \leq \frac{M}{n^2}$$

La série de terme général M/n^2 est convergente (critère de Riemann). Par théorème de comparaison sur les séries, la série positive $\sum \mu(A_n)$ est donc convergente. Par le lemme de Borel-Cantelli (question a)), $\mu(\limsup_n A_n) = 0$ $(*)$. Examinons l'ensemble $N = \limsup_n A_n$. Il appartient à $\mathcal{A}$ comme limsup d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$. Il est de mesure nulle par $(*)$. Explicitons N^c : $N^c = (\limsup\limits_n A_n)^c = \bigcup\limits_{n\geq 0} \bigcap\limits_{k\geq n} (A_k)^c$ $(= \liminf_n A_n^c)$, soit en termes de quantificateurs :

$$x \in N^c \text{ ssi : } \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, |f_n(x)| < n.$$

Conclusion : l'ensemble $N = \limsup_n A_n$ convient : il appartient à $\in \mathcal{A}$, il est de mesure nulle et pour tout $x \notin N$, à partir d'un certain rang, $|f_n(x)| < n$.

Exercice 8. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables. Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable telle que :

$$\int_X |\mathbb{1}_{A_n} - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

a) Montrer que μ-p.p. $|f| \leq 2$.

b) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $f = \mathbb{1}_A \ \mu - p.p.$.

c) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} \mu(A_n \Delta A) < +\infty$ alors $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{\mu-p.p.} 1_A$.

Solution de l'exercice 8.

a) Soit $B = \{|f| > 2\}$. Alors $B \subset \{|\mathbb{1}_{A_n} - f| > 1\}$, et par Markov,

$$\mu(B) \leq \int_X |\mathbb{1}_{A_n} - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) On observe que : $f = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \mathcal{A}$ ssi $f = f^2$ μ-p.p., et alors $A = \{f = 1\}$ (l'équivalence est claire et A peut éventuellement être vide : $f \equiv 0$ dans ce cas). Or,

$$\begin{aligned}\int |f - f^2| d\mu &\leq \int |f - \mathbb{1}_{A_n}| d\mu + \int |f^2 - \mathbb{1}_{A_n}| d\mu \\ &= \int |f - \mathbb{1}_{A_n}| d\mu + \int |f - \mathbb{1}_{A_n}| \underbrace{|f + \mathbb{1}_{A_n}|}_{\leq |f|+1 \leq 3} d\mu \\ &\leq 4 \int |f - \mathbb{1}_{A_n}| d\mu.\end{aligned}$$

c) On introduit l'ensemble $B = \liminf_n (A_n \Delta A)^c$. Montrons que son complémentaire B^c est nul. L'ensemble B s'écrit : $B = \bigcup_{n\geq 0} \bigcap_{k\geq n} (A_n \Delta A)^c$ et son complémentaire s'écrit alors :

$$B^c = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} (A_n \Delta A) = \limsup_n (A_n \Delta A)$$

Comme par hypothèse, $\sum_{n\geq 0} \mu(A_n \Delta A) < +\infty$, le lemme de Borel-Cantelli (exercice 3) s'applique : $\mu(B^c) = \mu(\limsup_n (A_n \Delta A)) = 0$. En termes d'indicatrices, cela signifie : $\mathbb{1}_{B^c} = 0 \ \mu - p.p.$ (par la proposition rappelée en début de l'exercice 1). Alors $\mathbb{1}_B = 1 - \mathbb{1}_{B^c} = 1 \ \mu - p.p.$. Comme $\mathbb{1}_{(A_n \Delta A)^c} = 1 - \mathbb{1}_{A_n \Delta A} = 1 - |\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_A|$ (cf feuille 1 exercice 4 sur les indicatrices),

$$\begin{aligned}&\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{\underline{\lim}(A_n\Delta A)^c} = \underline{\lim}\mathbb{1}_{(A_n\Delta A)^c} = \underline{\lim}(1 - |\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_A|) = 1 - \overline{\lim}|\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_A| \\ \text{soit : } \quad &\overline{\lim}|\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_A| = 0 \quad \mu - p.p. \quad \text{ car : } \quad \mathbb{1}_B = 1 \ \mu - p.p\end{aligned}$$

Il reste à traiter la convergence avec la limite inf : on pose $D = \limsup_n (A_n \Delta A)^c$, $\mu(D^c) \leq \mu(B^c)$ car $B \subset D$, donc $\mu(D^c) = 0$. En termes d'indicatrices : $\mathbb{1}_{D^c} = 0 \ \mu - p.p.$ soit $\mathbb{1}_D = 1 \ \mu - p.p.$. Par les mêmes arguments,

$$\begin{aligned}&\mathbb{1}_D = \mathbb{1}_{\overline{\lim}(A_n\Delta A)^c} = \overline{\lim}\mathbb{1}_{(A_n\Delta A)^c} = \overline{\lim}(1 - |\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_A|) = 1 - \underline{\lim}|\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_A| \\ \text{soit : } \quad &\underline{\lim}|\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_A| = 0 \quad \mu - p.p.\end{aligned}$$

Conclusion : on a montré $\lim |\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_A| = 0 \ \mu - p.p.$ et donc $\lim \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_A \ \mu - p.p.$.

i **Exercice 9.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

a) Montrer que :

$$\int_X |f|\mathbb{1}_{\{|f|>n\}} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$$

(continuité de l'intégrale par rapport à la mesure).

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et intégrable pour la mesure de Lebesgue. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} \int_{[0,x]} f d\lambda, & \text{si } x \geq 0, \\ -\int_{[x,0]} f d\lambda, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 9.

a) On introduit la suite de fonctions positives : $g_n = |f|\mathbb{1}_{\{|f|\leq n\}}$ est clairement croissante et pour tout n, g_n est mesurable car f l'est. Le théorème de convergence monotone s'écrit :

$$\int_X |f|\mathbb{1}_{\{|f|\leq n\}} d\mu \to \int_X |f| d\mu < +\infty,$$

et donc :

$$\int_X |f|\mathbb{1}_{\{|f|>n\}} d\mu = \int_X |f| d\mu - \int_X |f|\mathbb{1}_{\{|f|\leq n\}} d\mu \to 0.$$

b) Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_ε tel que $\int_X |f|\mathbb{1}_{\{|f|>n_\varepsilon\}} d\mu < \varepsilon/2$. Posons $\delta = \epsilon/(2n_\varepsilon)$. Alors soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) \leq \delta$, on a :

$$\int_A |f| d\mu = \int_{A\cap\{f>n_\varepsilon\}} |f| d\mu + \int_{A\cap\{|f|\leq n_\varepsilon\}} |f| d\mu \leq \int_X |f|\mathbb{1}_{\{|f|>n_\varepsilon\}} d\mu + n_\varepsilon \mu(A) < \varepsilon.$$

c) Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ tel que $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) < \delta$, $\int_A |f| d\lambda < \varepsilon$. Alors, pour tous $x \leq y$ tels que $|y - x| < \delta$, on a $\lambda([x, y]) < \delta$, et donc :

$$|F(y) - F(x)| = \Big|\int_{[x,y]} f d\lambda\Big| \leq \int_{[x,y]} |f| d\lambda < \varepsilon.$$

Autour du lemme de Fatou

Exercice 10.

a) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f. On suppose qu'il existe une constante K telle que :

$$\sup_{n\geq 0} \int_X f_n d\mu \leq K.$$

Montrer que $\int_X f d\mu \leq K$.

b) On considère sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1], \lambda)$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies par $f_{2n} = \mathbb{1}_{[0,1/2]}$ et $f_{2n+1} = \mathbb{1}_{[1/2,1]}$. Calculer $\int \limsup_n f_n d\lambda$ et $\limsup_n \int f_n d\lambda$.

Solution de l'exercice 10.

a) Par convergence simple de f_n vers f, $\liminf_n f_n = f$. Comme les fonctions f_n sont mesurables **positives**, le lemme de Fatou s'applique directement :

$$\int f d\mu = \int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu \leq K \tag{5}$$

b) En distinguant les cas pairs et impairs, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, \int f_n d\lambda = \frac{1}{2}$, d'où $\limsup_n \int f_n d\lambda = \frac{1}{2}$.
Déterminons $\limsup_n f_n$. Par définition de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\limsup_n f_n \leq \mathbb{1}_{[0,1]}$. Soit $x \in [0,1]$:
– Si $x \leq 1/2$, $\forall p \in \mathbb{N}, f_{2p}(x) = 1$, $\limsup_n f_n(x) \geq 1$.
– Si $x > 1/2$, $\forall p \in \mathbb{N}, f_{2p+1}(x) = 1$, $\limsup_n f_n(x) \geq 1$.
Cela montre $\limsup_n f_n \geq \mathbb{1}_{[0,1]}$. Par conséquent, $\limsup_n f_n = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et donc $\int \limsup_n f_n d\lambda = 1$.

Deux remarques sur le lemme de Fatou :
– Sa preuve s'appuie sur le théorème de convergence monotone.
– On n'a pas d'inégalité du type $\limsup \displaystyle\int_X h_n d\mu \leq \int_X \limsup h_n d\mu$. Pour le voir, on pense à la bosse glissante. $(\int_X h_n d\mu)$ est une suite constante égale à 1 et $\limsup h_n = 0$ d'où $\int_X \limsup h_n d\mu = 0$.

i **Exercice 11.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mesurables et positives. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f μ-p.p., et que :

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu < +\infty.$$

Montrer que $\displaystyle\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$.

Solution de l'exercice 11. Notons pour tout n, $g_n = f + f_n - |f - f_n|$. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $2f$, alors $\liminf_n (g_n)_{n\in\mathbb{N}} = 2f$. D'après le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned}
\int_X \liminf(f + f_n - |f - f_n|) d\mu &\leq \liminf \int_X (f + f_n - |f - f_n|) d\mu \\
\int_X 2f d\mu &\leq \int_X f d\mu + \liminf \int_X f_n d\mu + \liminf \int_X (-|f - f_n|) d\mu \\
2\int_X f d\mu &\leq \int_X f d\mu + \int_X f d\mu - \limsup \int_X |f - f_n| d\mu
\end{aligned}$$

car $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu < +\infty$. Il reste : $0 \leq -\limsup \int_X |f - f_n| d\mu$ soit : $\limsup \int_X |f - f_n| d\mu \leq 0$. Par positivité, la limite de la suite $\left(\displaystyle\int_X |f - f_n| d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et est nulle.

Le coin du curieux

Il est très facile de construire des exemples où $\int \liminf f_n < \liminf \int f_n$, même si la convergence a lieu presque partout. Voici trois situations typiques, sur l'espace $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. Soit φ une fonction continue, positive, nulle en-dehors de l'intervalle $[0,1]$, non identiquement nulle. Pour $n \geq 1$ on définit

$$\begin{cases} f_n(x) = n\varphi(nx), \\ g_n(x) = n^{-1}\varphi(n^{-1}x), \\ h_n(x) = \varphi(x - n). \end{cases}$$

Alors les suites de fonctions (f_n), (g_n) et (h_n) convergent vers 0 partout sur $\mathbb{R}$, pourtant il est facile de montrer, par des changements de variables évidents, que $\int f_n = \int g_n = \int h_n = \int \varphi$. On dit que la suite (f_n) illustre un phénomène de **concentration** (toute la masse de la suite se concentre près de 0), la suite (g_n) un phénomène d'**évanescence** (toute la masse part à l'infini de manière diffuse), tandis que la suite (h_n) présente un comportement de **bosse glissante** (la masse « glisse »à l'infini, sans s'étaler).