TD10. Intégration. Théorèmes de convergence.

Échauffement, exemples et contre-exemples

i **Exercice 1.**

a) Donner une suite de fonctions boréliennes positives $(f_n)_{n\geq 0}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ admet une limite $c > 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \liminf f_n d\lambda < c$.

b) Si $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de signe quelconque telle que $\int_E |\liminf f_n| d\mu < +\infty$, a-t-on toujours $\int_E \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_E f_n d\mu$?

c) Donner une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que pour tout $x \in [0, 1]$ la suite $f_n(x)$ n'admet pas de limite et $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n d\lambda = 0$.

d) Donner une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions continues positives sur $[0, 1]$ telle que $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n d\lambda = 0$ et $\int_{[0,1]} \sup_{n\geq 0} f_n d\lambda = +\infty$.

Solution de l'exercice 1.

a) Il y a une kyrielle d'exemples ; en voici un : la suite de fonctions étagées $(f_n)_{n\geq 0} = (n1_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]})_{n\geq 0}$ vérifie $\int_{\mathbb{R}} \liminf f_n d\lambda = +\infty.\lambda(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Non, il manque l'hypothèse de minoration. Soit $f_n = -\frac{1}{n}1_{[-2n,0]} + \frac{1}{n}1_{[0,n]}$. Cette suite vérifie $\liminf f_n = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f_n = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rappelons qu'en revanche, s'il existe g intégrable positive telle que $\inf f_n \geq -g$ on peut appliquer le lemme de Fatou à la suite de fonctions mesurables positives $f_n + g$, on obtient $\int_E \liminf f_n d\mu + \int_E g d\mu \leq \liminf \int_E f_n d\mu + \int_E g d\mu$, par hypothèse $0 \leq \int_E g d\mu < +\infty$ ce qui permet de simplifier l'inégalité.

c) On construit une bosse glissante sur $[0, 1]$.

Pour tout $y \in [0, 1]$ et $\epsilon > 0$, soit $\phi_{y,\epsilon}(.) = (1 - \frac{|.-y|}{\epsilon})1_{|.-y|\leq\epsilon}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$ et $f_n = \phi_{\bar{u_n},\frac{2}{n}}$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq t \leq u_{n+1}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x)$ n'admet pas de limite, en effet il existe deux suites $(p_k)_{k\geq 0}$ et $(q_k)_{k\geq 0}$ d'entiers telles que $f_{p_k}(x) \geq \frac{1}{2}$ et $f_{q_k}(x) = 0$. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{[0,1]} f_n(x)dx \leq \frac{2}{n}$.

d) Une bosse glissante convient ici aussi. Modifions la bosse précédente : soit $f_n = \sqrt{n} f_n(x)$. Pour tout $x \in [0, 1]$, $\sup_{n\geq 0} f_n(x) = +\infty$ et $\int_{[0,1]} f_n(x)dx \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Exercice 2. Calculer la limite des suites suivantes :

a) $\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|/n} dx$,

b) $\int_{\mathbb{R}} 1_{3|\cos(\frac{x}{m})|\geq 2} \frac{e^{-x^2}}{2\cos(\frac{x}{m})-1} dx$,

c) $\sum_{m\geq 0} \frac{n}{m} \sin(\frac{1}{nm})$.

Solution de l'exercice 2.

a) On applique le théorème de convergence monotone à la suite croissante de fonctions boréliennes positives $(e^{-\frac{|.|}{n}})_{n\geq 1}$, pour trouver que l'intégrale tend vers $+\infty$.

b) Soit f_n la fonction intégrée, et $g_n = 1_{\{x:3|\cos(\frac{x}{m})|\geq 2\}} e^{-x^2}$. Ces fonctions boréliennes vérifient pour tout $x \in \mathbb{R}$ $|f_n(x)| \leq 3g_n(x) \leq 3e^{-x^2}$. La fonction $(x \mapsto e^{-x^2})$ est intégrable et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $1_{3|\cos(\frac{x}{m})|} \to 0$ quand $n \to \infty$. Par convergence dominée on conclut que $\limsup \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \leq \lim \int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda = 0$.

c) On applique le théorème de Lebesgue à l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ où μ est la mesure de comptage. Pour $n, m \in \mathbb{N}$, soit $f_n(m) = \frac{n}{m}\sin(\frac{1}{nm})$. Cette suite de fonctions mesurables satisfait les hypothèse du théorème de convergence dominée. En effet $f_n(m) \leq \frac{1}{m^2}$, le membre de droite est une fonction positive intégrable (d'intégrale $\frac{\pi^2}{6}$) et pour tout $m \in \mathbb{N}$ $f_n(m) \to \frac{1}{m^2}$. On en déduit $\sum_{m\geq 1} \frac{n}{m}\sin(\frac{1}{nm}) = \int_{\mathbb{N}} 1_{N^*} f_n d\mu \to \sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Convergence dominée, variations

Exercice 3. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge μ-p.p. vers une fonction f.

a) On suppose qu'il existe n_0 tel que $\int_E f_{n_0} d\mu < \infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

b) Que peut-on dire sans l'hypothèse d'intégrabilité ?

Solution de l'exercice 3.

a) Le théorème de Lebesgues s'applique à la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ et donne le résultat souhaité. On peut aussi appliquer le lemme de convergence monotone à la suite de fonctions mesurables positives $(f_{n_0} - f_n)_{n\geq 0}$ qui vérifie $f_{n_0} - f_n \uparrow f_{n_0} - f$: on obtient $\int_E f_{n_0} d\mu - \int_E f_n d\mu \uparrow \int_E (f_{n_0} - f) d\mu$. La fonction f est majorée par f_{n_0} donc intégrable et le membre de droite vaut $\int_E f_{n_0} d\mu - \int_E f d\mu$.

b) Ceci devient faux sans l'hypothèse d'intégrabilité ; considérer par exemple la suite $(\frac{1}{n} 1_{\mathbb{R}_+})_{n\geq 0}$, chaque terme est d'intégrale divergente mais la suite tend vers 0.

Exercice 4. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable. On définit pour tout $n \geq 1$, $g_n(x) = f(x^n)$. Calculer la limite de $\int_{]0,1[} g_n d\lambda$.

Solution de l'exercice 4. Supposons la fonction croissante. Soit $f(0^+)$ la limite à droite en zéro de f. Pour tout $x \in]0,1[$, $0 \leq g_n(x) \leq f(x)$, et $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(0^+)$, d'après le théorème de Lebesques, $\int g_n d\lambda \to \int_{]0,1[} f(0^+) d\lambda = f(0^+)$.
Si la fonction est décroissante, on se ramène au cas précédent en considérant $(x \mapsto f(1-x))$ et on obtient $\lim_{n\uparrow\infty} \int_{[0,1]} g_n d\lambda = \lim_{t\uparrow 1} f(t)$.

i **Exercice 5.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

a) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} \int_X |f_n| d\mu < \infty$, alors

$$\sum_{n\geq 0} \int_X f_n d\mu = \int_X \Big(\sum_{n\geq 0} f_n\Big) d\mu.$$

b) Soit $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ où m est la mesure de comptage. Soit $u : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que $\int_{\mathbb{N}} u dm = \sum_{n\geq 0} u(n)$.

c) Soit $(a_{n,p})_{n,p\geq 0}$ des réels. Montrer que

$$\sum_{p\geq 0}\sum_{q\geq 0} |a_{p,q}| < \infty \Rightarrow \sum_{p\geq 0}\sum_{q\geq 0} a_{p,q} = \sum_{q\geq 0}\sum_{p\geq 0} a_{p,q}.$$

d) Calculer la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.[1]

Solution de l'exercice 5.

1. Indication : appliquer le théorème de convergence dominée à $\sum_{k\geq 0} (-1)^k x^k$ sur $]0,1[$.

a) Par convergence monotone, $\int \sum_n |f_n| d\mu = \sum_n \int |f_n| d\mu < \infty$. Donc, $\sum_n |f_n|$ est intégrable, donc $\sum_n f_n$ existe et est intégrable. On a

$$\Big|\sum_{n\geq 0}^{N} f_n\Big| \leq \sum_n |f_n| \text{ intégrable et } \sum_{n=0}^{N} f_n \to_{N\to\infty} \sum_n f_n.$$

Donc, par convergence dominée, $\int \sum_{n=0}^{N} f_n d\mu \to_{N\to\infty} \int \sum_n f_n d\mu$.

b) On pose $u^N(n) = u(n)$ si $n \leq N$ et $= 0$ sinon. u^N est étagée et croit vers u, puis convergence monotone.

c) On applique b) et a) en considérant comme espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{C}), m)$ où m est la mesure de comptage.

d) Suivons l'indication. Le critère du a) ne s'applique pas : $\sum_{k\geq 0} \int_{]0,1[} x^k dx = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1} = +\infty$. On revient donc au somme finie. Pour $x \in]0,1[$, soit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-x^k)$. Cette fonction mesurable vérifie pour tout $x \in]0,1[$, $f_n(x) = \frac{1-(-x)^{k+1}}{1+x} \leq \frac{2}{1+x}$, et $f_n(x) \to_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} (-x)^k = \frac{1}{1+x}$. Par convergence dominée, on obtient que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_{]0,1[} f_n(x) dx \to \int_{]0,1[} \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$.

Convergence en mesure, convergence dominée

i **Exercice 6.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$. Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ et f des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge en mesure* vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_n \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0.$$

a) Montrer que si $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$, alors la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en mesure vers f.

b) Montrer que si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge μ-p.p. vers f, alors elle converge en mesure vers f.

c) Réciproquement, supposons que (f_n) converge en mesure vers f :

   i) Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \geq 1, \ \mu(\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}) < \frac{1}{k^2}.$$

   ii) Soit $A = \underline{\lim}_k \{|f_{n_k} - f| \leq \frac{1}{k}\}$. Montrer que (f_{n_k}) converge vers f sur A et que $\mu({}^cA) = 0$ (en d'autres termes, f_n possède une sous-suite qui converge μ-p.p. vers f).

Solution de l'exercice 6.

a) L'inégalité de Markov montre que pour $\varepsilon > 0$,

$$\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| d\mu \to 0.$$

b) Soit $A = \{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\}$. Par hypothèse $\mu(A) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} (\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \subset A.$$

La fonction $1_{\{x\in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}}$ est majorée par la fonction intégrable 1 (la mesure est de masse totale finie, remarquez que l'on peut montrer cette question en supposant l'espace σ-fini) , donc par lemme de Fatou

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\})) \leq \mu(\limsup_{n\to\infty} (\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\})) \leq \mu(A) = 0.$$

c) i) Pour tout $k \in N^*$, d'après a), en prenant $\epsilon = \frac{1}{k}$, on obtient qu'il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mu(\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}) < \frac{1}{k^2}.$$

ii) Un élément x de X appartient à $A = \underline{\lim}_k\{|f_{n_k} - f| \leq \frac{1}{k}\}$ ssi il existe un certain rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $|f_{n_k} - f| \leq \frac{1}{k}$. Ainsi si $x \in A$ alors $f_n(x) \to f(x)$. Par ailleurs, $A^c = \limsup\{|f_{n_k} - f| \leq \frac{1}{k}\}$, et

$$\sum_{n\geq 0} \mu(\{|f_{n_k} - f| \leq \frac{1}{k}\}) \leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Par Borel-Cantelli, on conclut que $\mu(A^c) = 0$.

i **Exercice 7.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$. Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ et f des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge en mesure vers f, et qu'il existe une fonction $g : X \to \mathbb{R}$ intégrable positive telle que $|f_n| \leq g$ μ-p.p. pour tout $n \geq 1$.

a) Montrer que $|f| \leq g$ μ-p.p.

b) En déduire à l'aide de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale que

$$\int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Solution de l'exercice 7.

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\mu(|f| > g+\varepsilon) \leq \mu(|f| > |f_n|+\varepsilon) \leq \mu(|f - f_n| > \varepsilon) \to 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(|f| > g + \frac{1}{n}) = 0$ et $\mu(|f| > g) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1}\{|f| > g + \frac{1}{n}\}\right) = 0$.

b) Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \int |f_n - f| d\mu &= \int_{\{|f_n - f| \leq \varepsilon\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |f_n - f| d\mu \\ &\leq \varepsilon\mu(E) + 2\int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |g| d\mu, \end{aligned}$$

Montrons maintenant que

$$\int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |g| d\mu \to 0.$$

Donnons deux démonstrations de ce fait.

1. Fixons $\delta > 0$. Par théorème de convergence monotone, on obtient que $\lim_{M\uparrow\infty} \int 1_{|g|>M}|g| \to 0$. Soient $M \in \mathbb{N}$ tel que $\int 1_{|g|>M}|g|d\mu \leq \delta$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ $\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \frac{\delta}{M}$. On a alors que pour tout $n \geq N$,

$$\int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |g| d\mu \leq \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} 1_{|g|\leq M}|g|d\mu + \int 1_{|g|>M}|g|d\mu \leq M\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) + \delta \leq 2\delta.$$

2. On déduit ce fait du résultat suivant. Si $(X\mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré (pas nécessairement de masse fini) et f une fonction intégrable, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q.

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \left(\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon\right).$$

Raisonnons par l'absurde. Si f n'est pas uniformément intégrable alors il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(A_k)_{k\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\mu(A_k) \leq 2^{-k} \text{ et } \int_{A_k} |f| d\mu > \varepsilon.$$

La fonction $1_{A_k}|f|$ est majorée par la fonction intégrable f, donc par lemme de Fatou,

$$\limsup \int_{A_k} |f| d\mu \leq \int_X \limsup 1_{A_k}|f| d\mu.$$

En outre d'après le lemme de Borel-Cantelli, $\mu(\limsup(A_k)) = 0$, donc la fonction $\limsup 1_{A_k} = 1_{\limsup A_k}$ est nulle μ-presque partout. On en déduit que $\int_X \limsup 1_{A_k}|f|d\mu = 0$ et que $\lim \int_{A_k} |f|d\mu = 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

Exercice 8. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

a) Montrer que $\lim_n n\mu(\{|f| \geq n\}) = 0$.

b) Montrer que
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \int_{|f|\leq n} |f|^2 d\mu < +\infty.$$

Solution de l'exercice 8.

a) L'inégalité de Markov donne
$$n\mu(\{|f| \geq n\}) = \int n 1_{\{|f|\geq n\}} d\mu \leq \int |f| 1_{\{|f|\geq n\}} d\mu.$$
Le théorème de convergence dominée permet d'obtenir le résultat.

b) Soit $F = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2} 1_{\{|f|\leq n\}} |f|^2$. D'après le théorème de Beppo-Lévy,
$$\int F d\mu = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \int_{|f|\leq n} |f|^2 d\mu.$$
Il s'agit donc de montrer que la fonction F est intégrable. Soit $c > 1$, $F = |f|^2 \sum_{n\geq |f|} \frac{1}{n^2} \leq \frac{c\pi^2}{6} |f| 1_{|f|\leq c} + |f|^2 1_{|f|>c} \sum_{n\geq |f|} \frac{1}{n^2}$. Majorons le reste de la somme infini :
$$1_{|f|>c} \sum_{n\geq |f|} \frac{1}{n^2} \leq \int_{|f|-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1_{|f|>c} \frac{1}{|f|-1}.$$
On en déduit que
$$1_{|f|>c} |f|^2 \sum_{n\geq |f|} \frac{1}{n^2} \leq \frac{|f|}{1-c}.$$
On en conclut que la fonction F est majorée par $(\frac{c\pi^2}{6} + \frac{1}{1-c})|f|$ donc intégrable.

Exercice 9. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions intégrables. On suppose qu'il existe f intégrable telle que
$$\int_E |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Montrer qu'il existe une suite extraite $(f_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ convergeant vers f μ-p.p., et une fonction B intégrable telle que $\sup_{n\geq 1} |f_{\phi(n)}| \leq B$ μ-p.p.

Solution de l'exercice 9. On a déjà montré dans l'exercice 6 la première partie de l'assertion : une suite de fonctions qui converge en norme L^1 converge en mesure, et toute suite de fonctions convergeant en mesure admet une sous-suite convergeant μ presque-partout. Ici, on aimerait en plus trouver une borne intégrable à cette sous-suite. Reprenons le début de la preuve de l'exercice 6 : soit $(\phi(k))_{k\geq 0}$ une suite croissante d'entiers telle que $\int |f_{\phi(k)} - f| d\mu \leq 2^{-k-1}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int |f_{\phi(k)} - f_{\phi(k+1)}| d\mu \leq 2^{-k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $h_n = \sum_{k=0}^{n} |f_{\phi(k)} - f_{\phi(k+1)}|$, et $h = \sum_{k=0}^{\infty} |f_{\phi(k)} - f_{\phi(k+1)}|$. Par lemme de Beppo-Lévy,
$$\int h d\mu = \int \sup h_n d\mu = \sup \int h_n d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int |f_{\phi(k)} - f_{\phi(k+1)}| d\mu \leq 2.$$
On en déduit que μ-presque partout la série $\sum_{k=0}^{n} \left(f_{\phi(k)} - f_{\phi(k+1)} \right)$ est absolument convergente, donc μ-presque partout la suite $f_{\phi(n)} = f_{\phi(0)} + \sum_{k=0}^{n} \left(f_{\phi(k)} - f_{\phi(k+1)} \right)$ converge et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_{\phi(n)}| \leq B := |f_{\phi(0)}| + h$.

Noter que l'argument utilisé ici montre que l'espace des fonctions intégrables (quotienté par la relation d'équivalence égalité presque partout) muni de la norme définie comme l'intégrale de la valeur absolue est un espace complet.

Le coin du curieux

Exercice 10. Soit f_n une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que pour tout $x \in [0,1]$ $f_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$. Retrouver sans utiliser la théorie de l'intégration de Lebesgues que la suite des intégrales de Riemann vérifie $\lim \int_0^1 f_n(x)dx = 0$.

Solution de l'exercice 10. Noter que le résultat est immédiat avec le théorème de Lebesgues. Si vous deviez convaincre quelqu'un qui n'a pas suivi de cours d'intégration, vous devriez une fois l'intégrale de Lebesgue contruite montrer le théorème de convergence monotone puis le lemme de Fatou pour en déduire le théorème convergence dominée. Parmi ces quatres étapes la première est la plus ardue. Essayons ici de montrer ce cas particulier du théorème de convergence dominée où l'intégrale de Riemann a un sens et où les fonctions sont continues et uniformément bornées.
On se donne d'abord une version faible du théorème de convergence monotone.

Lemme :Soient $h_n, n \geq 1$, et g des fonctions continues positives sur $[0,1]$ telles que pour tout $x \in [0,1]$ $g(x) \leq \sum h_n(x)$. Alors $\int_0^1 g(x)dx \leq \sum_{n\geq 0} \int_0^1 h_n(x)dx$.

Si la série convergeait uniformément on pourrait en déduire que sa somme est continue donc intégrable au sens de Riemann et permuter somme et intégrale. Ici ce n'est pas forcément le cas.

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n h_n$. Fixons $\epsilon > 0$.
Pour tout $x \in [0,1]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n(x) \geq g(x) - \epsilon$ et il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in]x-\delta, x+\delta[\cap [0,1]$ on ait $S_n(y) \geq g(y) - 2\epsilon$. Par compacité de $[0,1]$, on en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in [0,1]$ on ait $S_N(x) \geq g(x) - 2\epsilon$.
On conclut alors que

$$\int_0^1 g(x)dx \leq \int_0^1 S_N(x)dx + 2\epsilon = \sum_{k=1}^n \int_0^1 h_k(x)dx + 2\epsilon \leq \sum_{k\geq 1} \int_0^1 h_k(x)dx + 2\epsilon.$$

□

Raisonnons maintenant par l'absurde. Si $\int_{[0,1]} f_n(x)dx$ ne converge pas vers 0, quitte à extraire une sous-suite, et quitte à renormaliser par l'intégrale, on peut supposer que $\int_{[0,1]} f_n(x) = 1$.

Pour tout n, considérons $C_n = \text{Conv}\{f_m : m \geq n\} := \{\lambda_1 f_{n_1} + \lambda_2 f_{n_2} + \cdots + \lambda_k f_{n_k} : n_1, \cdots, n_k \geq n \text{ et } \lambda_i \geq 0, i = 1..k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}$. On remarque que pour tout $g \in C_n$ $\int_0^1 g(x)dx = 1$, et si g_n est une suite de fonction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $g_n \in C_n$ alors $g_n(x) \to 0$.

On va maintenant construire une telle suite de fonction g_n qui vérifie en outre que $\sum \int_0^1 |g_n(x) - g_{n+1}|dx < +\infty$. Le lemme permettra alors d'obtenir une contradiction avec les deux conditions imposées sur la suite.

Pour toute fonction g continue sur $[0,1]$, soit $N(g) = \left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
Soit $\kappa_n = \inf\{N^2(g) : g \in C_n\}$. La suite κ_n est croissante bornée dans $[0,1]$. Soit κ sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $g_n \in C_n$ tel que $N^2(g_n) \leq \kappa_n + 2^{-n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \geq n$, $\frac{1}{2}g_n + \frac{1}{2}g_m \in C_n$ et

$$N^2(g_n - g_m) = 2N^2(g_n) + 2N^2(g_m) - 4N^2(\frac{1}{2}g_n + \frac{1}{2}g_m) \leq 2\left(\kappa_n + \kappa_m + 2^{-n} + 2^{-m} - 2\kappa_n\right) = 2(\kappa_m - \kappa_n) + 2^{-n}.$$

On utilise maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui est vraie pour l'intégrale de Riemann de fonctions continues(sa preuve n'utilise que la positivité et la linéarité de l'intégrale).
Pour tout $x \in [0,1]$, $g_n(x) \to 0$ donc $g_n(x) \leq \sum_{m\geq n} |g_m(x) - g_{m+1}(x)|$, et par le lemme ci-dessus et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$1 = \int_{[0,1]} g_n(x)dx \leq \sum_{m\geq n} \int_0^1 |g_m(x) - g_{m+1}(x)|\, dx \leq \sum_{m\geq n} N(g_m - g_{m+1}).$$

On a presque obtenu ce qu'on recherchait. Maintenant pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\phi_k \geq k$, tel que $\sum_{n\geq 0} \sqrt{\kappa_{\phi_{n+1}} - \kappa_{\phi_n}} < \infty$. On a toujours pour tout $x \in [0,1]$, $g_{\phi_n}(x) \leq \sum_{m\geq n} \left|g_{\phi_m}(x) - g_{\phi_{m+1}}(x)\right|$, et

$$1 = \int_{[0,1]} g_{\phi_n}(x)dx \leq \sum_{m\geq n} \int_0^1 \left|g_{\phi_m}(x) - g_{\phi_{m+1}}(x)\right| dx \leq \sum_{m\geq n} N(g_{\phi_m} - g_{\phi_{m+1}}) \to_{n\to\infty} 0.$$

On a obtenu la contradiction recherchée.