TD 11. Intégrales dépendant d'un paramètre : convergence, sommation, dérivation.

Echauffement

i **Exercice 1.** Déterminer la limite des suites $(I_n)_{n\geq 1}$ suivantes après avoir justifier l'existence de I_n pour $n \geq 1$:

$$\text{(i) } I_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{nx+1}dx \qquad \text{(ii) } I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n+k}{nk^{3/2}+k^3}$$

$$\text{(iii) } I_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{ne^{x^2}+\pi}{ne^{2x^2}+4x^4}dx \qquad \text{(iv) } I_n = \int_{]0,+\infty[} \frac{\sin x}{x^2}\frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}}dx$$

$$\text{(v) } I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx^n)}{nx^{n+1/2}}dx.$$

Solution de l'exercice 1.

(i) La suite $f_n(x) = \frac{ne^{-x}}{nx+1}1_{]0,1]}(x) = \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}1_{]0,1]}(x)$ est positive, croissante et de limite $\frac{e^{-x}}{x}1_{]0,1]}(x)$. D'après le théorème de convergence monotone

$$\boxed{I_n \to \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx = +\infty.}$$

On peut aussi utiliser le lemme de Fatou car on a une suite de fonctions positives :

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

et comme le terme de gauche est infini, on a $\liminf_n I_n = +\infty$, ce qui implique $\lim_n I_n = +\infty$.

(ii) On peut voir I_n comme l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_*^+} f_n(x)\nu(dx)$ où $\nu = \sum_{k\geq 1} \delta_k$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$ et où $f_n(x) = (n+x)/(nx^{3/2}+x^3)$. On a que $(f_n)_n$ est une suite de fonctions positives. On sépare f_n en deux termes : tout d'abord,

$$\frac{n}{nx^{3/2}+x^3} = \frac{1}{x^{3/2}+x^3/n}$$

est une suite croissante de fonctions positives. Par le théorème de convergence monotone, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_*^+} \frac{n}{nx^{3/2}+x^3}\nu(dx) = \int_{\mathbb{R}_*^+} \frac{1}{x^{3/2}}\nu(dx) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{3/2}} < +\infty.$$

Pour le second terme $\dfrac{x}{nx^{3/2}+x^3} = \dfrac{1}{nx^{1/2}+x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$, on utilise le théorème de convergence dominée. On a trouvé un majorant indépendant de n et intégrable pour ν car $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_*^+} \frac{x}{nx^{3/2}+x^3}\nu(dx) = 0$$

et finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{3/2}} < +\infty.}$$

(iii) Posons $f_n(x) = \frac{ne^{x^2}+\pi}{ne^{2x^2}+4x^4}$. Pour $n \geq 1$, f_n est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ car est continue et est équivalente à e^{-x^2} quand x tend vers $\pm\infty$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-x^2}$ et

$$f_n(x) = \frac{1+\pi e^{-x^2}/n}{e^{x^2}+4x^4e^{-x^2}/n} \leq \frac{4}{e^{x^2}}$$

et ce majorant indépendant de n est bien intégrable sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} I_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dr = \sqrt{\pi}}$$

(pour la dernière inégalité, voir la dernière question de l'exercice 7).

(iv) Montrons tout d'abord que I_n est finie. La fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, quand $x \to 0$, $f_n(x)$ est équivalent à $x^{-1+1/n}$ donc f_n est intégrable sur $]0,1]$ et $\forall n \geq 1,\ \forall x \geq 1,\ |f_n(x)|$ est majoré par $\frac{1}{x^2}$ donc f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.
On voudrait montrer que $\lim_n I_n = \int_{]0,+\infty[} \frac{\sin x}{2x^2}\, dx$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de convergence dominée car il n'est pas simple de trouver un majorant intégrable et les fonctions f_n n'étant pas positives, on ne peut utiliser ni le lemme de Fatou ni le théorème de convergence monotone. On va donc couper l'intégrale en deux parties $]0,\pi[$ et $[\pi,+\infty[$.
Sur $]0,\pi[$, les fonctions f_n sont positives. On peut donc appliquer le lemme de Fatou :

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{]0,\pi[} \frac{\sin x}{x^2}\frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}}\, dx \geq \int_{]0,\pi[} \frac{\sin x}{x^2} \lim_{n\to\infty} \frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}}\, dx = \int_{]0,\pi[} \frac{\sin x}{2x^2}\, dx = +\infty.$$

La dernière intégrale est infinie car $\sin(x)/x^2$ est équivalent à $1/x$ en 0. On en déduit donc que $\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_{]0,\pi[} f_n(x)\, dx = +\infty}$.
Pour $x \in [\pi,+\infty[$, d'après une inégalité déjà montrée, $|f_n(x)| \leq 1/x^2$ et ce majorant est intégrable sur $[\pi,+\infty[$. Par le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_{[\pi,+\infty[} f_n(x)\, dx = \int_{[\pi,+\infty[} \frac{\sin x}{2x^2}\, dx.}$$

Cette dernière intégrale étant finie, en rassemblant tous les morceaux, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} I_n = +\infty.}$$

(v) Quand $x \to 0$, $f_n(x)$ est équivalent à $x^{-1/2}$ et $\forall x > 0$, $|f_n(x)|$ est majoré par $1/(nx^{n+1/2})$: on en déduit que pour tout $n \geq 1$, f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.
De plus, si $x \geq 1$,

$$|f_n(x)| \leq \left|\frac{1}{nx^{n+1/2}}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et si $0 < x < 1$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{x}}$. Et en utilisant que $|\sin x| \leq |x| \wedge 1$, on a la domination

$$\forall x > 0, \forall n \geq 1,\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\mathbb{1}_{\{x<1\}} + \frac{1}{x^{3/2}}\mathbb{1}_{\{x\geq 1\}}$$

et par le théorème de convergence dominée,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.}$$

Interversions somme-intégrale

Exercice 2. La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2|x-\frac{1}{n}|^{1/2}}$ est-elle intégrable sur $[0,1]$?

Solution de l'exercice 2. L'intégrale sur $[0,1]$ de $\frac{1}{|x-\frac{1}{n}|^{1/2}}$ se calcule en coupant en $1/n$ et vaut $2(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}) \leq 4$ et comme la série de terme général $1/n^2$ converge, f est intégrable.

i **Exercice 3.**

a) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{ax} f(x)$ est intégrable. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{zx} f(x) dx = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx$.

Solution de l'exercice 3.

a) On a pour $x > 0$

$$\frac{\sin x}{e^x - 1} = \frac{\sin x\, e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sin x\, e^{-x} \sum_{n\geq 0} e^{-nx} = \sin x \sum_{n\geq 1} e^{-nx}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1} |\sin x\, e^{-nx}| = \frac{|\sin x|}{e^x-1} \leq \frac{x}{e^x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, on peut écrire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1} = \sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-nx}.dx$$

De plus, en utilisant $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im}\, e^{(i-n)x} = \sum_{n\geq 1} \operatorname{Im} \frac{1}{n-i} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}.$$

b) La fonction $\sum_{n\geq 0} |\frac{z^n x^n}{n!} f(x)| = \sum_{n\geq 0} \frac{|z|^n x^n}{n!} |f(x)| = e^{|z|x} |f(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. On peut donc permuter $\int$ et $\sum$.

Intégrales à paramètre

i **Exercice 4.** Le but de cet exercice est de montrer que $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

a) i) Montrer que l'intégrale généralisée I est convergente.
   ii) La fonction $g : x \mapsto \sin(x)/x$ est-elle Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

b) Soit $f(x,t) = e^{-xt} \dfrac{\sin x}{x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.
   i) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est Lebesgue intégrable.
   ii) Montrer que la fonction $F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t) dx$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.
   iii) Calculer $F'(t)$ puis $\lim_{t\to+\infty} F(t)$. En déduire que : $F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$.

c) Soient $A > 0$ et $t > 0$. Montrer que $\left|\int_A^{+\infty} f(x,t) dx\right| \leq \frac{2}{A}$.

d) Montrer que pour $A > 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^A f(x,t) dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx.$$

e) Conclure.

Solution de l'exercice 4.

a) i) On doit montrer que $\lim_{K\to\infty}\int_0^K \frac{\sin x}{x}dx$ existe et est finie (il n'y a pas de problème d'intégrabilité en 0). Les critères habituels de compararaison n'étant pas utilisables (on ne peut dominer que par $1/x$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$), on fait une IPP en dérivant $1/x$ et en choisissant $-\cos x+1$ comme primitive de $\sin x$:

$$\int_0^K \frac{\sin x}{x}dx = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^K - \int_0^K \frac{1-\cos x}{x^2}dx.$$

Quand $K\to\infty$, le premier terme tend vers 0 et le second terme converge puisque $\lim_{x\to 0}(1-\cos(x))/x^2 = 1/2$ et

$$\frac{|1-\cos(x)|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

qui est intégrable en $+\infty$.

ii) Cette fonction n'est pas Lebesgue-intégrable. Pour cela, on montre que $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx = +\infty$ en en trouvant une minoration qui diverge. La fonction $|g|$ s'annule en tous les $k\pi$ pour $k\ge 1$ et sur chaque intervalle $[k\pi,(k+1)\pi]$, elle est concave. L'intégrale de $|g|$ sur un tel intervalle est minorée par l'aire d'un triangle de base $[k\pi,(k+1)\pi]$ et de troisième sommet $(k\pi+\pi/2, |g(k\pi+\pi/2)|)$ (faire un dessin pour s'en convaincre). On a alors

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx \ge \sum_{k\ge1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|g(x)|dx \ge \sum_{k\ge1}\frac{|\sin(k\pi+\pi/2)|}{k\pi+\pi/2}\frac{\pi}{2} = \sum_{k\ge1}\frac{1}{2k+1} = +\infty.$$

b) i) On fixe $t>0$. Tout d'abord, $x\mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0. De plus, $\forall x>0$, $|f(x,t)|\le e^{-xt}$ et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

ii) Montrons que F est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour cela, on montre d'abord qu'elle y est continue en utilisant le théorème du cours sur la continuité des intégrales à paramètres.

Soit $t_0>0$. Alors $t\mapsto f(x,t)$ est continue sur $[t_0,+\infty[$ et $\forall t\ge t_0$, $x\mapsto f(x,t)$ est mesurable. Il reste à trouver un majorant de $|f(x,t)|$ indépendant de t. Or, pour $t\ge t_0, x>0$,

$$|f(x,t)| \le e^{-t_0 x}\frac{\sin x}{x}$$

et ce majorant est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a donc montré que F est continue sur $[t_0,+\infty[$ pour tout $t_0>0$; F est donc continue sur $]0,+\infty[$.

Montrons maintenant que F est dérivable. Soit $t_0>0$. Pour $t>t_0$, $f(.,t)$ est intégrable et pour $x>0$, $f(x,.)$ est dérivable. De plus,

$$\forall t\ge t_0,\ \left|\frac{\partial f}{\partial t}f(x,t)\right| = e^{-xt}|\sin x| \le e^{-xt_0}$$

et ce majorant (indépendant de t) est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction F est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

iii) D'après ce qui précède, F est dérivable de dérivée :

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin x dx$$

En utilisant $\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$, on a

$$F'(t) = -\mathrm{Im}\int_0^{+\infty} e^{(i-t)x}dx = -\mathrm{Im}\left[\frac{e^{(i-t)x}}{i-t}\right]_{x=0}^{+\infty} = \mathrm{Im}\frac{1}{i-t} = -\frac{1}{1+t^2}.$$

Après intégration, on en déduit :

$$F(t) = -\arctan t + C, \qquad C>0 \tag{1}$$

Pour trouver la limite de F en $+\infty$, on utilise le théorème de convergence dominée. On se donne une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ et on s'intéresse à la limite de la suite $(F(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n := f(t_n,.)$:

– Les f_n sont bien mesurables.
– pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f(t_n, x) = 0$.
– Soit $A > 0$, la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Il existe un rang n_0, $\forall n \geq n_0$, $t_n \geq A$. Alors

$$|f_n(x)| = |f(t_n, x)| \leq \underbrace{e^{-xA}\left|\frac{\sin x}{x}\right|}_{\text{indépendante de } t}$$

et la fonction l_a du membre de droite, indépendante de t, est $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$:
– l_a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
– l_a tend vers 1 quand x tend vers 0.
– l_a est dominée par la fonction $x \mapsto \frac{e^{-xA}}{x}$ qui est intégrable en $+\infty$.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x, t_n)}_{f_n(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) dx = 0$$

et ceci pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$. Donc $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$. Cette limite permet de de déterminer la constante $C > 0$ dans l'expression de F donnée plus haut : $\lim_{t\to+\infty} F(t) = -\frac{\pi}{2} + C = 0$ soit $C = +\frac{\pi}{2}$ et l'expression de F : $F(t) = -\arctan t + \frac{\pi}{2}$.

c) Pour $t > 0$, on a tout d'abord $\left|\int_A^{+\infty} f(x,t)dx\right| \leq \frac{1}{A}\left|\int_A^{+\infty} e^{-xt}\sin x dx\right|$. Ensuite, par des calculs similaires à ceux de $F'(t)$ à la question b)iii), on a

$$\int_A^{+\infty} e^{-xt}\sin x dx = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{A(i-t)}}{t-i}\right) = \frac{e^{-At}(t\sin A - \cos A)}{t^2+1}.$$

On a donc

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,t)dx\right| \leq \frac{1}{A}\frac{t+1}{t^2+1}$$

et l'étude de la fonction $t \mapsto (t+1)/(t^2+1)$ permet de voir qu'elle est bornée par 2.

d) On utilise le théorème de convergence dominée ; on domine $|f(x,t)|$ par $|\sin x|/x$ qui est intégrable sur $[0, A]$ puique continue.

e) Par les questions précédentes, pour tous $A, t > 0$

$$\left|\int_0^A e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx - \frac{\pi}{2}\right| = \left|-\arctan t - \int_A^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \arctan t + \frac{2}{A}.$$

En faisant tendre t vers 0, on a d'après la question d),

$$\left|\int_0^A \frac{\sin x}{x}dx - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{2}{A}$$

et en faisant tendre A vers $+\infty$, on a le résultat.

Exercice 5. Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\varphi(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos x}{x}\, dx.$

a) Montrer que φ est dérivable pour tout $t \in]0, +\infty[$ et calculer explicitement sa dérivée.

b) Calculer la limite de $\varphi(t)$ quand $t \to +\infty$. En déduire la valeur de $\varphi(t)$.

Solution de l'exercice 5.

a) On pose pour $x > 0$, $f(t,x) = e^{-xt}\frac{1-\cos x}{x}$. Cette fonction est positive. Soit $t_0 > 0$. Nous allons procéder par localisation pour montrer que φ est continue sur $[t_0, +\infty[$. Comme $t_0 > 0$, il existe $a > 0$ tel que $0 < a < t_0$. On vérifie les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégrale :
– Soit $t > 0$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vers $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

– A $x \geq 0$ fixé, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue car $t \mapsto e^{-tx}$ est continue pour $t \geq 0$.
– On s'est placé à $t > a$. Comme $e^{-tx} \leq e^{-ax}$ pour $t > a$,

$$f(t,x) \leq \underbrace{e^{-xa}\frac{1-\cos x}{x}}_{:=h_a(x),\text{indépendante de } t}$$

Etudions la fonction h_a indépendante de t du second membre. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

– au voisinage de 0 : $\dfrac{1-\cos x}{x} = \dfrac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x} = \dfrac{1}{2}x + o(x)$
– au voisinage de $+\infty$, on majore brutalement : $|h_a(x)| \leq \frac{2e^{-xa}}{x}$ et la fonction à droite est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Donc h_a est $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$.

Alors par le théorème de continuité sous le signe intégral, la fonction φ est définie et continue pour $t \in [t_0, \infty[$ et ceci pour tout $t_0 > 0$. Donc φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On vérifie pour cela les hypothèses du théorème de dérivations sous le signe intégral :

– pour tout $t > 0$, $g(t,.) : x \mapsto g(t,x) \in \mathcal{L}^1$
– Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (donc $\lambda - p.p.$), $t \mapsto g(t,x)$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}_+^*$. Calculons la dérivée partielle de f par rapport à t :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -e^{-xt}(1-\cos x)$$

On raisonne par localisation en se plaçant sur un intervalle $[a, +\infty[$, $a > 0$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = |e^{-xt}(1-\cos x)| \leq 2e^{-xa}, \text{ avec } a > 0.$$

La fonction $x \mapsto 2e^{-xa}$ appartient clairement à $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}$. L'hypothèse de domination est vérifiée.

Conclusion : d'après le théorème de dérivations sous le signe intégral, φ est dérivable de dérivée :

$$\varphi'(t) = \int_0^{+\infty} -e^{-xt}(1-\cos x)\,dx = \int_0^{+\infty} -e^{-xt}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos x\,dx$$

La première intégrale se calcule directement : $I_1 = \left[\dfrac{e^{-xt}}{t}\right]_{x=0}^{+\infty} = -\dfrac{1}{t}$. Pour la seconde intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos x\,dx &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int_0^{+\infty} e^{(i-t)x}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{(-i-t)x}\,dx\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{e^{(i-t)x}}{i-t}\right]_{x=0}^{+\infty} + \left[\frac{e^{(-i-t)x}}{-i-t}\right]_{x=0}^{+\infty}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{-i+t} + \frac{1}{i+t}\right\} = \frac{1}{2}\frac{t+i+t-i}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1}\end{aligned}$$

on en déduit donc : $\varphi'(t) = -\frac{1}{t} + \frac{t}{1+t^2}$.

b) On intègre l'expression de $\varphi'(t)$ trouvée à la question précédente :

$$\varphi(t) = -\ln t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = \ln\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\right) + C \tag{2}$$

Il reste à déterminer la constante C. Pour cela, on fait tendre t vers $+\infty$ dans l'expression précédente : $\varphi(t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} C$. Donc $C = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(t) = -\ln t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx}dx$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Calculer f'' et les limites en $+\infty$ de f et f'. En déduire une expression simple de f.

Solution de l'exercice 6. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose : $g(t,x) := \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx} \mathbb{1}_{]0,+\infty]}(x)$. La fonction g est positive. On vérifie les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégrale :

– Soit $t \geq 0$, $x \mapsto g(t,x)$ est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vers $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
– A $x \geq 0$ fixé, la fonction $t \mapsto g(t,x)$ est continue car $t \mapsto e^{-tx}$ est continue pour $t \geq 0$.
– $g(t,x) \leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathbb{1}_{]0,+\infty]}(x)$ car $e^{-tx} \leq 1$ pour $t \geq 0$. Etudions la fonction h indépendante de t du second membre. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$, on en déduit que la fonction h est bornée par 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ en particulier sur $]0,1]$. Pour l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$, comme $|\sin(.)| \leq 1$, alors $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \leq \frac{1}{x^2}$ qui est intégrable en $+\infty$. Donc $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\lambda)$.

Alors la fonction f est définie et continue pour $t \geq 0$.
Montrons que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On vérifie pour cela les hypothèses du théorème de dérivations sous le signe intégral :

– pour tout $t > 0$, $g(t,.) : x \mapsto g(t,x) \in \mathcal{L}^1$
– Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (donc $\lambda - p.p.$), $t \mapsto g(t,x)$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}_+^*$. Calculons ses deux dérivées partielles :

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 (-x) e^{-tx} \mathbb{1}_{]0,+\infty]}(x) = -\frac{(\sin x)^2}{x} e^{-tx} \mathbb{1}_{]0,+\infty]}(x)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 t}(t,x) = (\sin x)^2 e^{-tx} \mathbb{1}_{]0,+\infty]}(x)$$

– Il reste à vérifier l'hypothèse de domination. Pour cela on raisonne par localisation. Soit $t > 0$. Alors $\exists a > 0$, $0 < a < t$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\right| = \left|\frac{(\sin x)^2}{x} e^{-tx}\right| \leq \frac{(\sin x)^2}{x} e^{-ax}$$

Montrons que la fonction $h_a(x)$ du second membre est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
– $lim_{x \to 0} h_a(x) = 0$: h_a est intégrable au voisinage de 0.
– c'est aussi clair au voisinage de $+\infty$: $h_a(x) \leq \dfrac{e^{-ax}}{x} = O(\dfrac{1}{x^2})$

Conclusion 1 : h_a est $\mathcal{L}^1_{R_+}$. On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral : f est C^1 sur $]a,+\infty[$, et ceci pour tout $a > 0$ donc f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée :

$$f'(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 (-x) e^{-tx} dx$$

– Pour montrer que f est C^2, il reste à vérifier l'hypothèse de domination. Pour cela on raisonne une nouvelle fois par localisation. Soit $t > 0$. Alors $\exists a > 0$, $0 < a < t$

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial^2 t}(t,x)\right| = \left|(\sin x)^2 e^{-tx} \mathbb{1}_{]0,+\infty]}(x)\right| \leq (\sin x)^2 e^{-ax}$$

Montrons que la fonction $l_a(x)$ du second membre est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
– $lim_{x \to 0} l_a(x) = 0$: l_a est intégrable au voisinage de 0.
– c'est aussi clair au voisinage de $+\infty$: $l_a(x) \leq e^{-ax}$

Conclusion 2 : l_a est $\mathcal{L}^1_{R_+}$. On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral : f' est C^1 sur $]a,+\infty[$, et ceci pour tout $a > 0$ donc f est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f''(t) = \int_0^{+\infty} (\sin x)^2 e^{-tx} dx$$

Déterminons les limites de f et f' en $+\infty$. Pour cela, nous allons appliquer le théorème de convergence dominée :

– pour tout $x > 0$, $|g(x,t)| \to 0$ (donc $\lambda - p.p.$)
– pour tout $t \geq 1$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est dominée par la fonction $g(.,1)$, indépendante de t et $\mathcal{L}^1$.

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$. La preuve est strictement analogue pour la limite de $f'(t)$: $\lim_{t \to +\infty} f'(t) = 0$.

Remarque : si on veut appliquer directement le théorème de convergence dominée, on considère une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle positive qui tend vers $+\infty$ et la suite de fonctions associées $f_n = g(.,t_n)$, la limite pour l'intégrale est nulle par le TCD et ceci est valable pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle positive qui tend vers $+\infty$ d'où le résultat. (caractérisation de la limite en terme de suites)

$$f''(t) = \int_0^{+\infty} (\sin x)^2\, e^{-tx} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2} e^{-tx} dx$$

par la formule trigonométrique $(\sin x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$$\begin{aligned}
f''(t) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \cos(2x)e^{-tx}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}e^{-tx}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{(2i-t)x}dx - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{(-2i-t)x}dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-tx}}{-t}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{4}\left[\frac{e^{(2i-t)x}}{2i-t}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{4}\left[\frac{e^{(-2i-t)x}}{-2i-t}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{t} + \frac{1}{4}\frac{1}{2i-t} + \frac{1}{4}\frac{1}{-2i-t} = \frac{1}{2}\frac{1}{t} + \frac{1}{4}\frac{-2i-t+2i-t}{4+t^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{t}{4+t^2}
\end{aligned}$$

Après intégration,

$$f'(t) = \frac{1}{2}\ln(t) - \frac{1}{4}\ln(4+t^2) + C = \frac{1}{2}\ln(\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}) + C$$

La détermination de la limite quand t tend vers $+\infty$ donne $\lim f'(t) = C = 0$. On intègre une nouvelle fois sur $[1,t]$:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}\int_1^t \ln(u)du - \frac{1}{4}\int_1^t \ln(4+u^2)du + C_0 \\
&= \frac{1}{2}(t\ln t - t) - \frac{1}{4}\int_1^t \ln(4+u^2)du + C_0
\end{aligned}$$

car en faisant une intégration par parties :

$$\int_1^t \ln(4+u^2)du = [u\ln(4+u^2)]_1^t - \int_1^t \frac{2u^2}{4+u^2}du = t\ln(4+t^2) - \ln(5) - 2t + 2(\arctan(\frac{t}{2}) - \arctan(\frac{1}{2}))$$

car :

$$\int_1^t \frac{2u^2}{4+u^2}du = \int_1^t \frac{2u^2+8-8}{4+u^2}du = 2t - 8\int_1^t \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{u^2}{4}}du = 2t - 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{1}{1+v^2}du = 2t - 2(\arctan(\frac{t}{2}) - \arctan(\frac{1}{2}))$$

en faisant le changement de variable $v = \frac{u}{2}$ pour la dernière intégrale. L'expression de f est alors :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}(t\ln t - t) - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}t\ln(4+t^2) + \frac{1}{4}\ln(5) + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}(\arctan(\frac{t}{2}) - \arctan(\frac{1}{2})) + C_0 \\
&= \frac{1}{2}t\ln(\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}) - \frac{1}{2}\arctan(\frac{t}{2}) + \frac{\ln(5)-1}{4} + \frac{1}{2}\arctan(\frac{1}{2}) + C_0
\end{aligned}$$

La limite nulle de f en $+\infty$ donne :

$$f(t) = \frac{1}{2}t\ln(\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}) - \frac{1}{2}\arctan(\frac{t}{2}) + \frac{\pi}{4}$$

i **Exercice 7.** Soit Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx.$$

a) Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$.

c) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\Gamma(t+1) = \sqrt{t}\, t^t e^{-t} \int_{-\sqrt{t}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y} dy.$

d) Montrer que, pour tout $y \geq 0$, la fonction $t \mapsto t \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $y \in \left]-\sqrt{t}, 0\right[$, $t \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t} \leq -\frac{y^2}{2}$.

e) Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-\sqrt{t}}^{0} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y} dy = \lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y} dy = \int_{0}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy.$$

f) En déduire la formule de Stirling : $\Gamma(t+1) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}\, t^t\, e^{-t}$.

Solution de l'exercice 7.

a) Remarquons tout d'abord que Γ est bien définie lorsque $x > 0$. Nous allons démontrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \qquad \Gamma^{(p)}(t) = \int_0^{+\infty} (\log x)^p e^{-x} x^{t-1} dx \tag{$\star$}$$

On introduit la fonction $\gamma(t,x) := x^{t-1}e^{-x} = e^{(t-1)\ln x}e^{-x}$. A $x > 0$ fixé, elle est clairement C^∞ en t de dérivée k-ième :

$$\frac{\partial^k \gamma}{\partial^k t}(t,x) := (\ln x)^k e^{(t-1)\ln x} e^{-x} = (\ln x)^k x^{t-1} e^{-x}$$

Comme dans les exercices précédents, nous allons procéder par localisation. Lorsque t est dans un segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$, $\frac{\partial^k\gamma}{\partial^k t}$ vérifie :

$$\left|\frac{\partial^k \gamma}{\partial^k t}(t,x)\right| \leq \varphi_p(x), \qquad \varphi_p(x) = \begin{cases} |\ln x|^k x^{a-1} & \text{si } x \in]0,1], \\ (\ln x)^k x^{b-1} e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et que la fonction φ_p et intgrable sur $]0,+\infty[$ puisque lorsque $t \to 0^+$, on a $\varphi_p(x) = o(x^{a/2-1})$ (car $= o(1)$) et $\varphi_p(x) = O(e^{-x/2})$ lorsque $t \to +\infty$. Nous allons montrer par récurrence que Γ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$ et que $\Gamma^{(p)}$ vérifie la relation $(\star)$ sur cet intervalle. Comme ceci sera vrai pour tout segment inclus dans $]0,+\infty[$, on aura prouvé le résultat sur $]0,+\infty[$, on aura prouvé le résultat sur $]0,+\infty[$ tout entier.

Pour $p = 0$, il s'agit de montrer que Γ est continue sur $[a,b]$. La majoration $|x^{t-1}e^{-x}| \leq \varphi_0(x)$ avec φ_0 intégrable sur $]0,+\infty[$ assure que l'hypothèse de domination du théorème de continuité sous le signe intégral est bien vérifiée. Comme $t \mapsto \gamma(t,x)$ est continue, ceci assure la continuité de Γ sur $[a,b]$.

Supposons maintenant l'hypothèse de récurrence vraie au rang p et montrons-la au rang $p+1$. $(t,x) \mapsto \frac{\partial^p\gamma}{\partial^p t}(t,x)$ est bien continuement dérivable par rapport à t et sa dérivée est égale à $\frac{\partial^{p+1}\gamma}{\partial^{p+1}t}$. Grâce à la majoration $|\frac{\partial^{p+1}\gamma}{\partial^{p+1}t}(t,x)| \leq \varphi_{p+1}(x)$ lorsque $t \in [a,b]$, avec intégrable, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral qui nous assure que $\Gamma^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que sa dérivée est égale à $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\partial^{p+1}\gamma}{\partial^{p+1}t}(t,x)dx$. Ainsi, l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $p+1$. Ceci termine la preuve que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b) Nous allons commencer par montrer :

$$\forall t > 0, \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$$

On procède par intégration par parties.

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = [-x^t e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} t x^{t-1} e^{-x} dx = t\Gamma(t)$$

La formule s'en déduit facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, compte tenu du fait que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

c) Soit $t > 0$, Γ est défini sur $\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(t+1)$ est bien défini. Dans la définition de $\Gamma(t+1)$, on fait le changement de variable affine (facile à voir en regardant la borne en $-\sqrt{t}$ et le terme dans la parenthèse) : $x = t(1+\frac{y}{\sqrt{t}})$, $dx = \sqrt{t}dy$ qui est bien un C^1 difféomorphisme car $t > 0$.

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = \int_{-\sqrt{t}}^{+\infty} t^t (1+\frac{y}{\sqrt{t}})^t e^{-t-\sqrt{t}y}\sqrt{t}dy = \sqrt{t}t^t e^{-t}\int_{-\sqrt{t}}^{+\infty}(1+\frac{y}{\sqrt{t}})^t e^{-\sqrt{t}y}dy$$

d) Soit $y \geq 0$ fixé. On introduit la fonction : $g_y(t) = t\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t}$. Elle est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. L'inégalité de convexité usuelle :

$$\ln(1+x) \geq x \text{ pour } x \geq 0.$$

appliquée à : $x = \frac{y}{\sqrt{t}} \geq 0$ (ok car $y \geq 0$ et $t > 0$) dit que la fonction g_y est négative. Pour montrer qu'elle est décroissante, on calcule sa dérivée g_y' :

$$g_y'(t) = \ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right) + t\frac{-\frac{1}{2}\frac{y}{t^{3/2}}}{1+\frac{y}{\sqrt{t}}} - \frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{t}} = \ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{t}+y} - \frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{t}} = h(\frac{y}{\sqrt{t}})$$

en introduisant la fonction $h(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{2}\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}x$. $h(0) = 0$ et sa dérivée s'écrit :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{(1+x)^2}\left[1+x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1+x)^2\right] = -\frac{x^2}{2(1+x)^2} \leq 0$$

h est décroissante et négative car $h(0) = 0$. On en déduit que $g_y'(t) \geq 0$ pour $t \in]0,\infty[$. La fonction g_y est donc décroissante.
L'inégalité s'obtient par une inégalité de Taylor-Lagrange avec reste intégral sur la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ pour $x > -1$:

$$\ln(1+x) = x + \int_0^x -\frac{1}{(1+u)^2}(x-u)du = x + \int_0^1 -x^2\frac{1}{(1+x\theta)^2}(1-\theta)d\theta$$
$$|\ln(1+x) - x| \leq x^2\int_0^1 |\underbrace{\frac{1}{(1+x\theta)^2}}_{\leq 1}(1-\theta)|d\theta \leq x^2\int_0^1(1-\theta)d\theta = \frac{1}{2}x^2$$

par le changement de variables $u = x\theta$, $du = xd\theta$. L'inégalité s'en déduit en faisant $x = \frac{y}{\sqrt{t}}$ dans l'inégalité précédente, ce qui est possible pour $y > -\sqrt{t}$.

e) Nous allons traiter la première limite. On pose

$$g(t,y) := \left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y}dy\mathbb{1}_{[-\sqrt{t},0[}(y) = \exp\left(t\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t}\right)\mathbb{1}_{[-\sqrt{t},0[}(y).$$

Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à cette fonction. (en se donnant par exemple une suite (t_n) tendant vers $+\infty$)
– pour tout $t > 0$, la fonction $y \mapsto g(t,y)$ est mesurable.
– $\lim_{t\to+\infty} g(t,y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$ par développement limité sur la fonction $y \mapsto \ln(1+y)$.
– $g(t,y) \leq e^{-\frac{y^2}{2}}$ d'après la question précédente et la fonction $y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}}$ est $\mathcal{L}^1$ sur $\mathbb{R}$. L'hypothèse de domination est donc vérifié.
le théorème de convergence dominée permet alors d'intervertir limite et intégrale et donne par le changement de variable : $y = -u$

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-\sqrt{t}}^0\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y}dy = \int_{-\infty}^0 e^{-y^2/2}dy = \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du.$$

La seconde limite se montre exactement de la même manière.

f) L'intégrale $I := \int_0^{+\infty} e^{-y^2/2}dy$ se calcule par changement de variable polaire (r,θ) : $x = r\cos\theta$,$y = r\sin\theta$,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2/2}rdrd\theta \\ &= (\int_{r=0}^{+\infty} e^{-r^2/2}rdr)(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta) = \frac{\pi}{2}[-e^{-r^2/2}]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

car le jacobien vaut : $|J| = r$ et pour (x,y) décrivant le quart d'espace $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$, r décrit $[0,+\infty[$ et θ décrit $[0,\frac{\pi}{2}]$.
Remarque importante : *Pour montrer la première égalité $I^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty\cdots$, on utilise le théorème de Fubini-Tonelli qui est seulement au programme du module LM365. On peut quand même s'en sortir en écrivant*

$$I^2 = \lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^R e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy = \lim_{R\to\infty} I_R.$$

Le problème est que le domaine $[0,R]\times[0,R]$ n'est pas adapté au passage en coordonnées polaires. Ce domaine est compris entre le quart de cercle de rayon R et le quart de cercle de rayon $\sqrt{2}R$ (faire un petit dessin). L'intégrale double I_R est alors comprise entre les intégrales sur ces 2 domaines qui se calculent par passage en coordonnées polaires (voir ci-dessus). On conclut en utilisant le théorème d'encadrement des limites puisque les 2 intégrales calculées tendent vers la même limite $\pi/2$ quand $R\to+\infty$.

On en déduit : $I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. En découpant l'intégrale en deux morceaux, peut maintenant calculer la limite proposée par l'expression obtenue en c) pour obtenir immédiatement la formule de Stirling :

$$\frac{\Gamma(t+1)}{\sqrt{t}\,t^t e^{-t}} = \int_{-\sqrt{t}}^{+\infty}\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y}dy \to_{t\to+\infty} 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2}dy = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

$$\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi t}\,t^t e^{-t}$$

Pour aller plus loin

Exercice 8. [Théorème de Bohr-Mollerup] Le but de cet exercice est de montrer que la fonction Γ définie à l'exercice précédent est l'unique fonction $G : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui vérifie :

(i) $\ln G$ est une fonction convexe (on dit aussi que G est log-convexe),

(ii) $\forall x > 0,\ G(x+1) = xG(x)$,

(iii) $G(1) = 1$.

1/ On montre d'abord que la fonction Γ vérifie ces trois conditions.

a) Montrer que Γ vérifie les conditions (ii) et (iii).

b) Montrer qu'une fonction G est log-convexe ssi

$$\forall\lambda\in[0,1],\ \forall x,y>0,\ G(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq G(x)^\lambda G(y)^{1-\lambda}.$$

c) En déduire que Γ est log-convexe (on pourra utiliser l'inégalité de Hölder).

2/ Montrons maintenant l'unicité. Soit $G : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction vérifiant (i), (ii) et (iii).

a) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,1]$. Montrer que

$$G(n+x) \leq n^x(n-1)! \quad \text{et} \quad n! \leq G(n+x)(n+x)^{1-x}$$

(Indication : écrire $n+x$ (resp. $n+1$) comme une combinaison convexe de n et $n+1$ (resp. de $n+x$ et $n+x+1$)).

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$,

$$\frac{n!(n+x)^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq G(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

c) Conclure.

Solution de l'exercice 8.

1/ a) Voir le corrigé de l'exercice précédent.

b) Par définition de la convexité, $\ln G$ est convexe ssi

$$\forall \lambda \in [0,1],\ \forall x, y > 0,\ \ln(G(\lambda x+(1-\lambda)y)) \leq \lambda \ln(G(x))+(1-\lambda)\ln(G(y)) = \ln(G(x)^\lambda G(y)^{1-\lambda})$$

et la croissance de la fonction ln permet de conclure.

c) On a

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) = \int_0^\infty (r^{x-1})^\lambda (r^{y-1})^{1-\lambda} e^{-r} dr \leq \left(\int_0^\infty r^{x-1}e^{-r}dr\right)^\lambda \left(\int_0^\infty r^{y-1}e^{-r}dr\right)^{1-\lambda}$$

où on a utilisé l'inégalité de Hölder avec la mesure $\mu(dx) = e^{-x}dx$, avec $p = 1/\lambda$ et $q = 1/(1-\lambda)$ (on a bien $r \mapsto (r^{x-1})^\lambda \in \mathscr{L}^p(\mu)$ et $r \mapsto (r^{y-1})^{1-\lambda} \in \mathscr{L}^q(\mu)$). On a donc le résultat voulu en utilisant la question précédente.

2/ a) On a tout d'abord $n + x = (1-x)n + x(n+1)$. Comme $x \in]0,1]$, on peut utiliser la propriété (i) de G :

$$G(n+x) \leq G(n)^{1-x} G(n+1)^x.$$

Or, en utilisant les propriétés (ii) et (iii), on montre par récurrence que $G(n) = (n-1)!$. On a alors

$$G(n+x) \leq ((n-1)!)^{1-x}(n!)^x = n^x(n-1)!.$$

De la même manière, $n+1 = x(n+x) + (1-x)(n+x+1)$ donc

$$n! = G(n+1) \leq G(n+x)^x G(n+x+1)^{1-x} = G(n+x)^x \left[(n+x)G(n+x)\right]^{1-x} = G(n+x)(n+x)^{1-x}.$$

b) On en déduit que

$$n!(n+x)^{x-1} \leq G(n+x) \leq n^x(n-1)!.$$

De plus, en utilisant (ii), $G(n+x) = (x+n-1)G(n+x-1) = (x+n-1)\cdots(x+1)xG(x)$, ce qui implique

$$\underbrace{\frac{n!(n+x)^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}}_{a_n(x)} \leq G(x) \leq \underbrace{\frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}}_{b_n(x)}.$$

c) Tout d'abord, on remarque que

$$\frac{a_n(x)}{b_n(x)} = (1+x/n)^{x-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par le théorème des gendarmes, on a alors

$$\boxed{G(x) = \lim_{n\to\infty} b_n(x).}$$

Pour $x \in]0,1]$, $G(x)$ est donc entièrement carcatérisé par la limite de la suite $(b_n(x))_n$ (ou $(a_n(x))_n$).

On a donc montré que les trois conditions déterminent une unique fonction sur $]0,1]$. Mais en utilisant à nouveau (ii), on montre qu'il y a une unique fonction sur $]0,+\infty[$ les vérifiant.