

Intégrales de Fourier

par **Hervé QUEFFÉLEC**

Professeur de mathématiques à l'Université de Lille

1. Transformée de Fourier d'une fonction intégrable	AF 143 - 2
1.1 Classes de fonctions intégrables.....	— 2
1.2 Convolution de deux fonctions intégrables	— 3
1.3 Transformée de Fourier. Lemme de Riemann-Lebesgue	— 4
1.4 Règles de calcul	— 6
2. Formule d'inversion de Fourier	— 7
2.1 Approximations de l'identité	— 7
2.2 Théorème d'inversion de Fourier.....	— 8
2.3 Cas où f est bornée et \hat{f} positive.....	— 9
3. Techniques de calcul	— 9
3.1 Cas des fonctions paires ou impaires	— 9
3.2 Calcul direct : fonction exponentielle négative	— 10
3.3 Calcul par inversion de Fourier : noyau de Poisson	— 10
3.4 Calcul résiduel ou variationnel.....	— 11
4. Cas des fonctions de carré intégrable	— 12
4.1 Théorème de Plancherel	— 12
4.2 Fonctions de classe C^1 à support compact.....	— 14
4.3 Bases orthonormales de $L^2(\mathbb{R})$ et fonctions d'Hermite.....	— 14
5. Espace de Schwartz	— 15
5.1 Fonctions régulières et rapidement décroissantes sur \mathbb{R} ; espace \mathcal{S} ...	— 15
5.2 Transformée de Fourier d'une fonction régulière	— 16
5.3 Transformée de Fourier d'une fonction rapidement décroissante	— 16
5.4 Théorème d'isomorphisme	— 16
6. Équation de la chaleur pour une barre infinie	— 17
6.1 Modélisation du problème.....	— 17
6.2 Utilisation de la transformée de Fourier.....	— 18
6.3 Contre-exemple pour l'unicité	— 18
6.4 Existence et unicité de solutions bornées	— 19
7. Applications diverses. Prolongements	— 20
7.1 Extension de la transformation de Fourier au champ complexe	— 20
7.2 Équation aux dérivées partielles elliptiques.....	— 23
7.3 Présentation des ondelettes	— 23
Références bibliographiques	— 24

La transformation de Fourier sur la droite réelle \mathbb{R} est l'analogue de la transformation de Fourier des fonctions périodiques localement intégrables, où les exponentielles :

$$e_n(t) = \exp(int) \quad (n \text{ entier})$$

sont remplacées par la famille continue des exponentielles :

$$e_x(t) = \exp(ixt) \quad (x \text{ réel}),$$

et où l'intégration sur un intervalle période est remplacée par l'intégration sur \mathbb{R} tout entier.

D'ailleurs, un physicien dirait qu'une fonction définie sur \mathbb{R} est une fonction périodique de période infinie (!), et on peut donner une présentation unifiée des séries et intégrales de Fourier dans le cadre abstrait des groupes abéliens localement compacts. Il n'en demeure pas moins que, dans le cas des **séries de Fourier**, le groupe de base est le groupe **compact** des réels modulo 2π , alors que, dans le cas des **intégrales de Fourier**, ce groupe de base est le groupe **non compact** des réels. Il s'agit là, comme on le verra, d'une différence majeure ; même si, dans les deux cas, la convolution est transformée en la multiplication ordinaire, ce qui est un outil puissant pour la résolution des équations aux dérivées partielles, les phénomènes sont souvent fort différents ; par exemple, il n'y a plus toujours unicité pour l'équation de chaleur avec donnée initiale, ou bien les bases orthonormales qui entrent en jeu n'ont rien de semblable : base des exponentielles e_n dans le cas des séries de Fourier, base des fonctions d'Hermite dans le cas des intégrales de Fourier, etc.

En conséquence, malgré les similitudes entre les deux théories, il semble préférable d'en donner des expositions séparées.

Nota : le lecteur pourra se reporter à la référence bibliographique [4] pour la présentation unifiée des séries et intégrales de Fourier dans le cadre abstrait des groupes abéliens localement compacts.

1. Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

Rappel sur l'écriture :

$A = : B$ est une définition de B à partir de l'objet déjà connu A ;

$A : = B$ est une définition de A à partir de l'objet déjà connu B .

L'objet qu'on définit est toujours du côté des « : » ; ce symbole représente une abréviation pour ne pas couper le fil d'un calcul. Cette abréviation est courante dans les articles de recherche et, également, dans les livres d'enseignement.

1.1 Classes de fonctions intégrables

Soit d'abord $p \in [1, \infty[$; on définit l'espace $L^p(\mathbb{R})$ (à ne pas confondre avec l'espace L^p des fonctions 2π -périodiques de puissance p -ième localement intégrable) comme étant l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ pas trop irrégulières et pas trop grandes, au sens où :

f est mesurable (c'est-à-dire que n'est pas trop irrégulière) ; (1)

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} = : \|f\|_p < \infty \tag{2}$$

(c'est-à-dire que f n'est pas trop grande) ;

Les relations (1) et (2) appellent les commentaires suivants :

(1) est une précaution oratoire, car toutes les fonctions qu'on rencontrera seront mesurables, et seules des fonctions pathologiques de mathématicien, construites à l'aide de l'axiome du choix, pourront se révéler non mesurables ;

(2) définit une notion de « non-grandeur » relative, qui dépend du paramètre p .

D'autre part, si on identifie (comme on le fait couramment) deux fonctions f et g de $L^p(\mathbb{R})$ égales presque partout (c'est-à-dire que

l'ensemble E des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \neq g(x)$ est négligeable au sens de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}), $L^p(\mathbb{R})$ muni de l'application $f \mapsto \|f\|_p$ devient un espace vectoriel normé, comme conséquence des inégalités de Hölder (H) et Minkowski (M), que nous rappelons ici :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{H}$$

si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{M}$$

si $f, g \in L^p(\mathbb{R})$.

Cet espace vectoriel normé est de plus **complet**, autrement dit est un espace de Banach (du nom du mathématicien polonais S. Banach), qui introduisit ces espaces et en exhiba des propriétés générales remarquables : ce dernier fait, non trivial, est connu sous le nom de **théorème de Riesz-Fischer** ; nous admettrons ici ce théorème, en nous réservant le droit de l'utiliser, en particulier pour $p = 2$. Le fait de travailler avec des espaces complets est l'une des grandes supériorités de l'intégrale de Lebesgue.

■ Une opération fondamentale sur $L^p(\mathbb{R})$ est la translation T_a ($a \in \mathbb{R}$) définie par :

$$(T_a f)(t) = f(t - a).$$

Il est clair que T_a est une isométrie linéaire de $L^p(\mathbb{R})$ muni de $\| \cdot \|_p$ sur lui-même.

■ La propriété fondamentale suivante, que nous admettrons, est moins claire :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|T_a(f) - f\|_p = 0, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}) \tag{3}$$

On se réfère à la relation (3) comme à la continuité de la translation dans $L^p(\mathbb{R})$ si $p \in [1, \infty[$.

Le cas limite $p = \infty$ mérite une mention : on définit l'espace $L^\infty(\mathbb{R})$ comme l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mesurables et presque partout égales à une fonction mesurable bornée g , où,

comme pour $L^p(\mathbb{R})$, on identifie deux fonctions égales presque partout. On définit une norme sur $L^\infty(\mathbb{R})$ par la formule :

$$(*) \quad \|f\|_\infty = \inf_g \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)| \right\}$$

où g parcourt les fonctions mesurables bornées presque partout égales à f .

Cet espace est lui aussi un espace de Banach, avec deux différences importantes :

— il n'est pas séparable (c'est-à-dire qu'il ne contient pas de partie dénombrable dense), alors que les espaces $L^p(\mathbb{R})$ ($1 \leq p < \infty$) le sont ;

— la translation n'y est pas continue, puisque, par exemple, si f est la fonction indicatrice du segment $[0,1]$ on a clairement :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|T_a(f) - f\|_\infty = 1. \quad (4)$$

■ Comme on l'a déjà remarqué, la relation (2) exprime une notion de « non-grandeur » relative dépendant de p , et l'exemple suivant montre qu'il n'y a aucune relation d'inclusion entre les espaces $L^p(\mathbb{R})$.

Exemple :

Soit $p \in]1, \infty[$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^{-1/p} (\ln x)^{-1} \text{ si } x > 0 \text{ et } |x-1| \geq \frac{1}{2}, \\ = 0 \text{ sinon.}$$

On a, alors :

$$f \in L^p(\mathbb{R}) \quad (5)$$

$$f \notin L^q(\mathbb{R}) \text{ si } q \neq p. \quad (6)$$

En effet :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx = \int_0^{1/2} x^{-1} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-p} dx + \int_{3/2}^{\infty} x^{-1} (\ln x)^{-p} dx \\ = \int_2^{\infty} y^{-1} (\ln y)^{-p} dy + \int_{3/2}^{\infty} x^{-1} (\ln x)^{-p} dx \\ \leq 2 \int_{3/2}^{\infty} x^{-1} (\ln x)^{-p} dx < \infty$$

(on a affaire à une intégrale de Bertrand convergente).

Mais, pour $q > p$, $|f|^q$ n'est pas intégrable au voisinage de zéro et pour $q < p$, $|f|^q$ n'est pas intégrable au voisinage de l'infini ; cela prouve les relations (5) et (6).

Rappelons (cf. [AF 141]) que, dans le cas compact, on a au contraire l'inclusion $L^p \subset L^q$ dès que $p > q$ (les espaces L^p décroissent de $p = 1$ à $p = \infty$).

1.2 Convolution de deux fonctions intégrables

L'espace de Banach $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas une algèbre pour le produit ordinaire. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on peut très bien avoir :

$$fg \notin L^1(\mathbb{R}) ;$$

mais, comme l'espace L^1 , cet espace va pouvoir être muni d'un autre produit, le **produit de convolution**, qui va rendre les plus grands services.

Ce produit de convolution, noté $f * g$, est « défini » par la relation :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy. \quad (7)$$

On vient de dire que $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas une algèbre pour le produit ordinaire. Par conséquent, pour x fixé, il n'y a aucune raison pour que la fonction $y \mapsto f(x-y) g(y)$ soit intégrable ; autrement dit, il n'y a aucune raison pour que la relation (7) ait un sens.

On peut toutefois démontrer, à l'aide des théorèmes de Fubini, que la fonction précédente est intégrable pour presque tout x et on a le théorème suivant [7].

Théorème 1. Soit f et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, on a les propriétés suivantes.

a) La formule (7) a un sens pour presque tout x et définit une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, notée $f * g$, appelée la **convolée** de f et g .

b) La convolution est une **opération** associative, commutative et distributive sur l'addition dans $L^1(\mathbb{R})$.

c) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$; en conséquence, $L^1(\mathbb{R})$ munie des lois $+$ et $*$ est une **algèbre de Banach**.

Il est souvent utile de convoler aussi une fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$ et une fonction $g \in L^q(\mathbb{R})$, où q est l'exposant conjugué de p :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

avec la convention $q = \infty$ si $p = 1$ et $q = 1$ si $p = \infty$.

Dans ce cas, la relation (7) a un sens pour tout x grâce à l'inégalité de Hölder et on a la variante suivante du théorème 1, plus simple et où $C_0(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des fonctions $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continues et de limite nulle à l'infini (c'est-à-dire $\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) = 0$), normée par :

$$\|h\|_\infty = \sup \{ |h(t)| ; t \in \mathbb{R} \}.$$

Théorème 1 bis. Soit :

$p \in [1, \infty[$, q l'exposant conjugué,

$f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$, $h = f * g$; alors, on a :

a) Si $p > 1$:

$$h \in C_0(\mathbb{R})$$

et, de plus :

$$\|h\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

b) Si $p = 1$:

h est bornée et uniformément continue sur \mathbb{R}

et, de plus :

$$\|h\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Preuve. \diamond

b) Si $x, x' \in \mathbb{R}$, on a :

$$h(x) - h(x') = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-t) - f(x'-t)] g(t) dt,$$

d'où :

$$|h(x) - h(x')| \leq \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) - f(x'-t)| dt \\ = \|g\|_\infty \|T_{x-x'} f - f\|_1.$$

Soit $\varepsilon > 0$; d'après la relation (3), on peut trouver $\delta > 0$ tel que :

$$\|T_a f - f\|_1 \leq \varepsilon$$

si $|a| \leq \delta$.

Si donc $|x - x'| \leq \delta$, l'inégalité précédente donne :

$$|h(x) - h(x')| \leq \varepsilon \|g\|_\infty,$$

ce qui prouve la continuité uniforme de h , le reste étant évident.

a) Le point sensible est que $h \in C_0(\mathbb{R})$.

Le principe de la démonstration est le suivant : on suppose, d'abord, que f et g sont à support compact, c'est-à-dire que f (respectivement g) est nulle hors d'un compact A (respectivement B) de \mathbb{R} ; alors h est nulle hors du compact $A + B$, et, comme elle est continue, elle est dans $C_0(\mathbb{R})$.

Dans le cas général, on approche f et g (respectivement dans $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$) par des fonctions à support compact. \diamond

Premier exemple.

$f = 1_I$ est la fonction indicatrice du segment $I = [-1, 1]$; on se propose de calculer $h = f * g$; h est paire et nulle hors de $I + I = [-2, 2]$. Pour $0 \leq x \leq 2$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) f(t) dt = \int_{-1}^1 f(x-t) dt = \int_{x-1}^{x+1} f(u) du \\ &= \int_{x-1}^1 du = 2-x, \end{aligned}$$

d'où, finalement :

$$h(x) = \max(2 - |x|, 0), \tag{8}$$

et on représente h par la figure 1.

Deuxième exemple.

$$\begin{aligned} f_a(t) &= \frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-t} \text{ si } t > 0 \\ f_a(t) &= 0 \text{ sinon,} \end{aligned}$$

où a est un paramètre > 0 et Γ la fonction gamma d'Euler :

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt.$$

On va montrer la propriété de semi-groupe suivante :

$$f_a * f_b = f_{a+b}, \quad \forall a, b > 0. \tag{9}$$

En effet :

$$(f_a * f_b)(x) = 0 \text{ pour } x \leq 0.$$

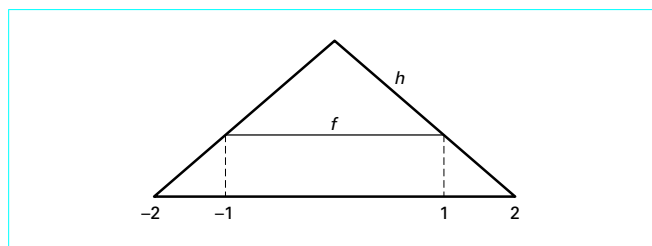


Figure 1 - graphe de $h = f * f$

Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} (f_a * f_b)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x-t) f_b(t) dt = \int_0^x f_a(x-t) f_b(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^{a-1} t^{b-1} e^{-(x-t)} e^{-t}}{\Gamma(a) \Gamma(b)} dt \\ &= \frac{e^{-x}}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \int_0^x (x-t)^{a-1} t^{b-1} dt \\ &= \frac{x^{a+b-1} e^{-x}}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \int_0^1 (1-u)^{a-1} u^{b-1} du. \end{aligned}$$

Or, cette dernière intégrale, comme sous le nom de **fonction bêta** de a et b , et notée $B(a, b)$, vaut exactement $\frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

On le voit, par exemple, en écrivant :

$$\begin{aligned} \Gamma(a) \Gamma(b) &= \int_{u>0} \int_{v>0} u^{a-1} v^{b-1} e^{-(u+v)} du dv \\ &= 4 \int_{x>0} \int_{y>0} x^{2a-1} y^{2b-1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= 4 \int_{r>0} \int_{0<\theta<\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^{2a+2b-2} r (\cos\theta)^{2a-1} (\sin\theta)^{2b-1} dr d\theta \\ &= \int_0^{\infty} t^{a+b-1} e^{-t} dt \times 2 \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2a-1} (\sin\theta)^{2b-1} d\theta. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable, $u = \cos^2\theta$, $du = -2 \sin\theta \cos\theta d\theta$, on obtient :

$$\Gamma(a) \Gamma(b) = \Gamma(a+b) \times \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du = \Gamma(a+b) B(a, b).$$

On voit donc que :

$$f_a * f_b(x) = \frac{x^{a+b-1} e^{-x}}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{x^{a+b-1} e^{-x}}{\Gamma(a+b)}$$

si $x > 0$, ce qui achève de prouver la relation (9).

1.3 Transformée de Fourier. Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$. On adoptera comme **définition de la transformée de Fourier** \hat{f} de f au point x la formule suivante :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi xt} f(t) dt. \tag{10}$$

Cette formule a toujours un sens, car :

$$|e^{-2i\pi xt} f(t)| = |f(t)|;$$

par conséquent la fonction $t \mapsto e^{-2i\pi xt} f(t)$ est toujours intégrable.

Par analogie avec le cas compact, il serait plus logique de poser

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) dt,$$

mais alors la formule d'inversion (qu'on verra paragraphe 2) aurait la forme :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \hat{f}(x) dx,$$

et il s'introduirait le facteur parasite $\frac{1}{2\pi}$.

Une autre façon [7] de procéder est de poser :

$$d\sigma(t) = \frac{dt}{\sqrt{2\pi}},$$

puis :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) d\sigma(t);$$

alors :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \hat{f}(x) d\sigma(x).$$

Quelle que soit la façon de procéder, on n'échappe pas aux problèmes de normalisation et au nombre π . Avec la définition 10 choisie, on verra que :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi xt} \hat{f}(x) dx,$$

autrement dit on passe de \hat{f} à f comme on passe de f à \hat{f} , à cela près qu'on remplace $-$ par $+$ dans l'exponentielle.

Un autre avantage de la relation (10) est que la transformation de Plancherel est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même, comme on le verra au paragraphe 4.1.

■ Le lemme suivant est fondamental, et il a déjà été utilisé dans le fascicule sur les séries de Fourier [AF 141 § 1.3].

Lemme 1 (lemme de Riemann-Lebesgue). Désignons par λ un nombre réel.

a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$; alors :

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt = 0.$$

b) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f \in L^1([a, b])$; alors :

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0.$$

Preuve. \diamond Elle se fait à l'aide d'un résultat facile, mais fondamental, déjà utilisé implicitement dans le § 1.3 du fascicule [AF 141], et dont nous allons dégager l'importance sous forme d'une proposition.

Proposition 1 (propriété d'extension)

Soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues de l'espace normé X dans l'espace normé Y et soit A une partie totale de X (ce qui signifie que l'espace vectoriel V engendré par A est dense dans X).

On suppose que :

a) $T_n(a) \rightarrow 0, \forall a \in A$;

b) $\|T_n\| \leq M$, où M est une constante.

Alors :

$$T_n(x) \rightarrow 0, \forall x \in X.$$

Pour prouver cette proposition, soit, d'abord, $v \in V$; v s'écrit :

$$v = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i,$$

où $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et $a_i \in A$. On a :

$$T_n(v) = \sum_{i=1}^k \lambda_i T_n(a_i),$$

donc :

$$T_n(v) \rightarrow 0.$$

Soit, ensuite, $x \in X$ et $\varepsilon > 0$; on peut trouver $v \in V$ tel que $\|x - v\| \leq \varepsilon$, d'où :

$$\begin{aligned} \|T_n(x)\| &\leq \|T_n(x - v)\| + \|T_n(v)\| \leq \|T_n\| \|x - v\| + \|T_n(v)\| \\ &\leq M\varepsilon + \|T_n(v)\|. \end{aligned}$$

On peut trouver $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tel que :

$$\|T_n(v)\| \leq \varepsilon \quad \text{pour } n \geq n_0,$$

d'où :

$$\|T_n(x)\| \leq (1 + M)\varepsilon \quad \text{pour } n \geq n_0,$$

ce qui montre que $T_n(x) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et prouve bien la proposition.

Revenons à la preuve du lemme de Riemann-Lebesgue :

b) est une conséquence immédiate de **a)** puisqu'une fonction $f \in L^1([a, b])$ se prolonge en une fonction $F \in L^1(\mathbb{R})$ en posant $F(t) = 0$ si $t \notin [a, b]$;

Pour prouver **a)**, il faut prouver que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda_n t} dt \rightarrow 0$ si l'on a une suite (λ_n) avec $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$.

Soit (λ_n) une telle suite :

$$X = L^1(\mathbb{R}), Y = \mathbb{C}$$

et : $T_n : X \rightarrow Y$ définie par :

$$T_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda_n t} dt;$$

on a :

$$|T_n(f)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \|f\|_1,$$

donc :

$$\|T_n\| \leq 1.$$

Désignons par A la partie de $L^1(\mathbb{R})$ constituée des fonctions indicatrices d'intervalles : A est totale dans $L^1(\mathbb{R})$ d'après un résultat classique (mais pas complètement trivial !) de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Si $f = 1_I \in A$ avec $I = [a, b]$ et $a < b$, on a :

$$T_n(f) = \int_a^b e^{i\lambda_n t} dt = \frac{e^{i\lambda_n b} - e^{i\lambda_n a}}{i\lambda_n},$$

d'où :

$$|T_n(f)| \leq \frac{2}{|\lambda_n|} \text{ et } T_n(f) \rightarrow 0.$$

Les hypothèses de la proposition 3 sont vérifiées, donc :

$$T_n(f) \rightarrow 0 \text{ pour toute } f \in L^1(\mathbb{R}),$$

ce qui achève la preuve du lemme de Riemann-Lebesgue. \diamond

■ On a $|e^{i\lambda t}| = 1$ pour tout $\lambda, t \in \mathbb{R}$; la propriété :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt \rightarrow 0$$

ne vient donc pas d'un écrasement du facteur exponentiel, mais du fait que celui-ci **oscille** de plus en plus violemment quand $|\lambda| \rightarrow \infty$, ce qui produit des compensations dans les termes de l'intégrale et la rend presque nulle.

Le lemme de Riemann-Lebesgue exprime donc, dans un cas particulier très simple, un phénomène d'intégrale oscillante.

■ La relation (3) admise est une conséquence facile de la proposition 1 et du fait que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < \infty$.

On peut maintenant énoncer et prouver le résultat suivant, dans lequel $C_0(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre de Banach, de l'énoncé du théorème 1 bis.

Théorème 2. La transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ a les propriétés suivantes :

a) C'est un homomorphisme de l'algèbre de Banach $L^1(\mathbb{R})$ dans l'algèbre de Banach $C_0(\mathbb{R})$; en particulier :

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}, \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

b) Cet homomorphisme est injectif, de norme 1, non surjectif mais d'image dense.

Preuve. \diamond

a) Le fait que $\hat{\cdot}$ envoie $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$ est le contenu du lemme de Riemann-Lebesgue, car la continuité de \hat{f} est une conséquence facile du théorème de convergence dominée.

La linéarité de $\hat{\cdot}$ est évidente, sa multiplicativité vient du théorème de Fubini qui, appliqué sans justifications détaillées, donne pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi xy} (f * g)(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi xy} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y-z)g(z) dz \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y-z) e^{-2i\pi xy} dy \right] dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z) [e^{-2i\pi xz} \hat{f}(x)] dz = \hat{g}(x) \hat{f}(x) \end{aligned}$$

b) Désignons par h l'homomorphisme $f \mapsto \hat{f}$, c'est-à-dire posons $h(f) = \hat{f}$. Nous voyons que :

$$\begin{aligned} \|h(f)\|_{\infty} &= \sup_x |\hat{f}(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \\ &= \|f\|_1, \end{aligned}$$

d'où $\|h\| \leq 1$.

Considérons, d'autre part, pour $a > 0$, la fonction f_a définie par :

$$f_a(x) = e^{-2\pi a|x|}; f_a \in L^1(\mathbb{R})$$

et on a :

$$\begin{aligned} \widehat{f_a}(x) &= \int_{-\infty}^0 e^{2\pi a t} e^{-2i\pi x t} dt + \int_0^{\infty} e^{-2\pi a t} e^{-2i\pi x t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{a-i x} + \frac{1}{a+i x} \right) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}; \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\|\widehat{f_a}\|_{\infty} = \widehat{f_a}(0) = \frac{1}{\pi a} = \|f\|_1,$$

d'où

$$\|h\| = 1.$$

Plus généralement, si f et \hat{f} sont toutes deux positives, on a :

$$\|\hat{f}\|_{\infty} = \|f\|_1 = \hat{f}(0).$$

L'injectivité de h sera vue au paragraphe 2 (théorème d'inversion de Fourier) ; sa non-surjectivité est admise. Son image s'appelle l'**algèbre de Wiener** de \mathbb{R} et se note $A(\mathbb{R})$. On montre [7] que $A(\mathbb{R})$ est exactement l'ensemble des convolées de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire $\varphi \in A(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \varphi = u * v$, où $u, v \in L^2(\mathbb{R})$) et nous admettons ici que $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$. \diamond

1.4 Règles de calcul

Les règles de calcul sur la transformation de Fourier sont rassemblées dans la proposition suivante, où $T_a f$ désigne, comme dans la proposition 1, la translatée par a de la fonction f et où $D_b f$ désigne sa dilatée par $b > 0$:

$$(D_b f)(t) = f(bt).$$

Proposition 2.

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $b > 0$; alors :

a) $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$; $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$; $\widehat{\lambda f} = \lambda \hat{f}$.

b) $\widehat{T_a f}(x) = e^{-2i\pi a x} \hat{f}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (soit encore $\widehat{T_a f} = e_{-a} \hat{f}$).

c) $\widehat{D_b f}(x) = \frac{1}{b} \hat{f}\left(\frac{x}{b}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) $\widehat{e_a f} = T_a \hat{f}$ (ou $e_a(t) = \exp(2i\pi a t)$).

e) Si f est de classe C^1 avec $f' \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f'}(x) = 2i\pi x \hat{f}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) Si f et $tf \in L^1(\mathbb{R})$, \hat{f} est de classe C^1 et on a :

$$(\hat{f})'(x) = -2i\pi x \widehat{tf}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Preuve. \diamond

a) est contenu dans le théorème 2.

$$\begin{aligned} \widehat{T_a f}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x t} f(t-a) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x(t+a)} f(t) dt \\ &= e^{-2i\pi a x} \hat{f}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \widehat{D_b f}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x t} f(bt) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x \frac{u}{b}} f(u) \frac{du}{b} \\ &= \frac{1}{b} \widehat{f}\left(\frac{x}{b}\right) \end{aligned}$$

(il faut noter que le changement de variable $bt = u$ conserve les bornes puisque $b > 0$).

$$\begin{aligned} \text{d) } \widehat{e_a f}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x t} e^{2i\pi a t} f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi t(x-a)} f(t) dt = \widehat{f}(x-a) = (T_a \widehat{f})(x). \end{aligned}$$

e) Notons d'abord que :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

et donc que f possède des limites en $\pm \infty$, nécessairement nulles puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$. Une intégration par parties donne donc :

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x t} f'(t) dt = [e^{-2i\pi x t} f(t)]_{-\infty}^{\infty} + 2i\pi x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x t} f(t) dt \\ &= 2i\pi x \widehat{f}(x). \end{aligned}$$

f) On peut dériver sous le signe somme dans :

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x t} f(t) dt =: \int_{-\infty}^{\infty} h(x, t) dt.$$

En effet :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2i\pi t e^{-2i\pi x t} f(t),$$

et :

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = 2\pi |t f(t)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

Il vient donc :

$$\widehat{f'}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} -2i\pi t e^{-2i\pi x t} f(t) dt = (-2i\pi t f)(x). \quad \diamond$$

La proposition 2a, qui exprime, entre autres, que la transformation de Fourier convertit la convolution en la multiplication ordinaire est très utile dans l'étude des équations aux dérivées partielles, comme on l'a signalé dans l'introduction. Les propositions 2e et 2f se révéleront très utiles dans la suite.

Elles expriment que la transformation de Fourier **échange** les propriétés de régularité et de forte décroissance à l'infini ; en effet, il se passe la chose suivante.

i) Si f est régulière (au sens où f' existe et où $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$), \widehat{f} décroît vite à l'infini puisqu'on a non seulement $\widehat{f}(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$, mais aussi $x \widehat{f}(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$. Plus généralement si f est très régulière (au sens où $f', \dots, f^{(k)}$ existent et sont dans $L^1(\mathbb{R})$), \widehat{f} est très décroissante, au sens où $x^k \widehat{f}(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$, k étant un entier positif arbitraire.

ii) Si f est décroissante à l'infini (au sens où on a non seulement $f \in L^1(\mathbb{R})$, mais encore $tf \in L^1(\mathbb{R})$), \widehat{f} est régulière puisqu'elle est de classe C^1 . Plus généralement si f est très décroissante à l'infini (au sens où $t^k f \in L^1(\mathbb{R})$), \widehat{f} est très régulière puisqu'elle est de classe C^k , k étant un entier positif arbitraire.

Nous reviendrons sur cette propriété fondamentale de la transformation de Fourier au moment de l'étude de la classe \mathcal{S} de L. Schwartz (§ 5.1).

Exemple : calculons $\widehat{f}(x)$, où $f(t) = \max(1 - |t|, 0)$. Rappelons (cf. premier exemple de § 1.2) que si $\varphi = 1_{[-1,1]}$ et $\psi = \varphi * \varphi$, on a :

$$\psi(t) = \max(2 - |t|, 0),$$

et que donc :

$$f(t) = \frac{1}{2} \psi(2t),$$

ce qui fait que :

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{4} \widehat{\psi}\left(\frac{x}{2}\right) \text{ d'après la proposition 2c,}$$

soit encore :

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{4} \left(\widehat{\varphi}\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 \text{ d'après la proposition 2a ;}$$

or :

$$\widehat{\varphi}(x) = \int_{-1}^1 e^{-2i\pi x t} dt = 2 \int_0^1 \cos 2\pi x t dt = \frac{\sin 2\pi x}{\pi x},$$

d'où :

$$\widehat{f}(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2.$$

2. Formule d'inversion de Fourier

2.1 Approximations de l'identité

L'algèbre de Banach $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas unitaire, car s'il existait $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * u = f, \forall f \in L^1(\mathbb{R})$, on en déduirait que :

$$\widehat{f}(x) \widehat{u}(x) = \widehat{f}(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$$

En prenant par exemple pour f la fonction f_a considérée dans la preuve du théorème 2 (§ 1.3), pour laquelle $\widehat{f}_a(x) > 0, \forall x$, il en résulterait que :

$$\widehat{u}(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R},$$

ce qui contredit le lemme de Riemann-Lebesgue.

A vrai dire il existe bien un élément unité, à savoir la masse de Dirac en 0, δ_0 , définie par :

$$\int f(x) d\delta_0(x) = f(0),$$

mais δ_0 est une mesure, plus une fonction. Cependant, il existe dans $L^1(\mathbb{R})$ des suites (φ_n) qui sont des éléments neutres approchés au sens suivant.

Définition 1. Une suite (φ_n) de $L^1(\mathbb{R})$ est une unité approchée (ou une approximation de l'identité) si :

$$\|f * \varphi_n - f\|_1 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty, \forall f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Proposition 3.

Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, positive et d'intégrale 1, et soit $\varphi_n(t) = n\varphi(nt), (n = 1, 2, \dots)$. Alors (φ_n) est une unité approchée.

Preuve. \diamond Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$.

On a :

$$(f * \varphi_n)(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-t) - f(x)] \varphi_n(t) dt,$$

d'où :

$$|(f * \varphi_n - f)(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) - f(x)| \varphi_n(t) dt.$$

Intégrons par rapport à x et utilisons le théorème de Fubini-Tonelli pour obtenir :

$$\begin{aligned} \|f * \varphi_n - f\|_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) - f(x)| dx \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \|T_t f - f\|_1 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \|T_{u/n} f - f\|_1 du =: \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(u) du \end{aligned}$$

Or, on a :

$$0 \leq \psi_n(u) \leq 2\|f\|_1 \varphi(u) \text{ avec } 2\|f\|_1 \varphi \in L^1(\mathbb{R}).$$

Pour u fixé, $\psi_n(u) \rightarrow 0$ d'après la continuité de la translation dans $L^1(\mathbb{R})$ [cf. relation (3)].

Le théorème de convergence dominée [7] s'applique donc et donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(u) du \rightarrow 0,$$

ce qui achève la preuve. \diamond

2.2 Théorème d'inversion de Fourier

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, mais \hat{f} n'est pas nécessairement intégrable. L'exemple du paragraphe 1.4 le montre :

si $\varphi = 1_{[-1,1]}$, on a :

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{\sin 2\pi x}{\pi x} \notin L^1(\mathbb{R}).$$

En effet, si on avait $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $\frac{\sin x}{x}$ serait dans

$L^1([1, \infty[)$, et a fortiori la fonction $\frac{2 \sin^2 x}{x}$. On aurait donc :

$$\int_1^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx < \infty ;$$

or, l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ est semi-convergente ; on aboutirait à la

conclusion absurde que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} < \infty$!

Un **autre exemple** est celui de la fonction $f(t) = e^{-2\pi at} 1_{[0, \infty[}(t)$. On a (avec $a > 0$) :

$$\hat{f}(x) = \int_0^{\infty} e^{-2i\pi tx} e^{-2\pi at} dt = \frac{1}{2\pi(a + ix)},$$

et

$$\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R}).$$

Si, par chance, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on peut de nouveau considérer la transformée de Fourier de \hat{f} ; on va voir qu'on retombe essentiellement sur f et, de façon précise, on a le théorème fondamental suivant.

Théorème 3 (théorème d'inversion de Fourier). Soit f telle que f et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors :

- a) $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi xt} \hat{f}(x) dx$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.
- b) Si, de plus, f est continue, a vaut pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve. \diamond Notons d'abord la forte analogie du théorème 3 avec le développement en série de Fourier d'une fonction g de L^1 (cf. [AF 141, § 3]) : si $\sum |\hat{g}(n)| < \infty$ (c'est-à-dire si $\hat{g} \in \ell^1(\mathbb{Z})$), $g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) e^{int}$.

■ Cela étant, une **méthode** envisageable **de preuve de a** est de remplacer f par sa valeur. On obtient une intégrable double, on essaie de permuter et... rien ne va plus ! En effet :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi xt} \hat{f}(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi xt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi xy} f(y) dy \right] \\ &\stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi x(t-y)} dx \right] dy, \end{aligned}$$

et l'intégrale centrale est divergente.

■ Une **deuxième idée** est de considérer plus prudemment :

$$\int_{-n}^n e^{2i\pi xt} \hat{f}(x) dx ;$$

le même calcul, avec l'emploi justifié cette fois du théorème de Fubini, aboutit à :

$$\int_{-n}^n e^{2i\pi xt} \hat{f}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\int_{-n}^n e^{2i\pi x(t-y)} dx \right] dy,$$

ce qui, en posant $\psi_n = 1_{[-n,n]}$, se lit encore :

$$(E) \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi xt} \hat{f}(x) \psi_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \hat{\psi}_n(t-y) dy = (f * \hat{\psi}_n)(t).$$

On pourrait, en ajoutant des hypothèses sur f , continuer.

■ Une **troisième** (la bonne !) **idée** consiste à choisir, au lieu de $1_{[-n,n]}$, une suite (ψ_n) de $L^1(\mathbb{R})$ telle que la suite $(\hat{\psi}_n)$ soit une approximation de l'identité dans $L^1(\mathbb{R})$. Un tel choix est très facile à réaliser, à l'aide des propositions **2c** et **3**.

Partons de $\psi(t) = e^{-2\pi|t|}$ avec :

$$\hat{\psi}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \text{ et } \|\hat{\psi}\|_1 = \frac{\pi}{\pi} = 1.$$

Posons ensuite $\psi_n(t) = \psi\left(\frac{t}{n}\right)$, si bien que :

$$\hat{\varphi}_n(x) = n \hat{\psi}(nx) =: \varphi_n(x),$$

la suite (φ_n) étant une approximation de l'identité dans $L^1(\mathbb{R})$.

La relation (E), à savoir :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi xt} \hat{f}(x) \psi\left(\frac{x}{n}\right) dx = (f * \varphi_n)(t), \tag{11}$$

est toujours valable et on cherche à passer à la limite quand $n \rightarrow \infty$; on note que :

$$\left| e^{2i\pi n t} \hat{f}(x) \psi\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq |\hat{f}(x)|$$

et que :

$$e^{2i\pi n t} \hat{f}(x) \psi\left(\frac{x}{n}\right) \rightarrow e^{2i\pi n t} \hat{f}(x) \psi(0) = e^{2i\pi n t} \hat{f}(x) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée :

— le premier membre de la relation (11), à t fixé, tend vers

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi n t} \hat{f}(x) dx ;$$

— pour le second membre, on sait seulement, d'après la proposition 3, que :

$$\|f * \varphi_n - f\|_1 \rightarrow 0,$$

autrement dit que $f * \varphi_n$ tend vers f en moyenne.

On utilise alors un résultat classique d'intégration : il existe une sous-suite (n_k) de la suite des entiers telle que l'on ait :

$$(f * \varphi_{n_k})(t) \rightarrow f(t) \text{ quand } k \rightarrow \infty, \text{ si } t \notin E,$$

où E est un sous-ensemble négligeable de \mathbb{R} ; alors, pour $t \notin E$, le passage à la limite (quand $k \rightarrow \infty$) dans :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi n t} \hat{f}(x) \psi\left(\frac{x}{n_k}\right) dx = (f * \varphi_{n_k})(t)$$

donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi n t} \hat{f}(x) dx = f(t),$$

ce qui prouve a.

■ **b** est une conséquence immédiate de **a**, car les deux fonctions continues f et $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi n t} \hat{f}(x) dx = : F(t)$ coïncident sur un ensemble (E^c) de complémentaire négligeable, donc sur un ensemble dense, et il en résulte que $f = F$. \diamond

Exemple : Reprenons l'exemple du § 1.4 :

$$f(t) = \max(1 - |t|, 0) ; \hat{f}(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2.$$

On voit que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, donc le théorème 3 s'applique. On a, en particulier :

$$1 = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 dx,$$

d'où :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos y}{y^2} dy = \pi,$$

et, en faisant une intégration par parties, on retrouve la célèbre identité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \pi.$$

Une **conséquence** fondamentale du théorème 3, déjà énoncée au théorème 3, est la suivante :

Théorème 4 (théorème d'unicité).

La transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ est injective sur $L^1(\mathbb{R})$.

Preuve. \diamond Si $\hat{f} = 0$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et le théorème 3 montre que $f(t) = 0$ pour presque tout t , autrement dit que $f = 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$. \diamond

2.3 Cas où f est bornée et \hat{f} positive

Pour appliquer le théorème d'inversion, il faut savoir quand la condition $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ est réalisée, ce qui n'est pas toujours facile. Un critère plus général qu'il n'y paraît, utile notamment pour la transformation de Plancherel et le calcul des probabilités, est le suivant :

Théorème 5. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, telle que :

a) $f \in L^\infty(\mathbb{R})$;

b) $\hat{f} \geq 0$.

Alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. En particulier, le théorème d'inversion s'applique à f .

Preuve. \diamond Reprenons l'identité (11) pour $t = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \psi\left(\frac{x}{n}\right) dx = (f * \varphi_n)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-y) \varphi_n(y) dy.$$

Il en résulte que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \psi\left(\frac{x}{n}\right) dx \leq \|f\|_\infty \|\varphi_n\|_1 = \|f\|_\infty ;$$

ensuite, le lemme de Fatou [7] s'applique puisque \hat{f} et ψ sont positives, et donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \liminf \left(\hat{f}(x) \psi\left(\frac{x}{n}\right) \right) dx \leq \liminf \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \psi\left(\frac{x}{n}\right) dx \leq \|f\|_\infty$$

ce qui achève la preuve. \diamond

Nota : \liminf : plus petite limite.

3. Techniques de calcul

3.1 Cas des fonctions paires ou impaires

■ Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est **paire**, les fonctions :

$$t \mapsto f(t) \cos 2\pi x t \text{ et } t \mapsto f(t) \sin 2\pi x t$$

sont respectivement paire et impaire, et donc :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos 2\pi x t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin 2\pi x t dt$$

vaut :

$$\hat{f}(x) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos 2\pi x t dt. \tag{12}$$

Exemple : Reprenons celui du paragraphe 1.4 :

$$f(t) = \max(1 - |t|, 0).$$

La relation (12) et une intégration par parties donnent :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= 2 \int_0^1 (1-t) \cos 2\pi x t \, dt = 2 \int_0^1 \frac{\sin 2\pi x t}{2\pi x} \, dt \\ &= \frac{2(1 - \cos 2\pi x)}{(2\pi x)^2} = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2, \end{aligned}$$

résultat qu'on avait trouvé par une autre méthode.

■ Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est **impaire**, les fonctions :

$$t \mapsto f(t) \cos 2\pi x t \text{ et } t \mapsto f(t) \sin 2\pi x t$$

sont respectivement impaire et paire, et on obtient cette fois :

$$\hat{f}(x) = -2i \int_0^\infty f(t) \sin 2\pi x t \, dt. \tag{13}$$

Exemple : Si on a : $f(t) = t \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$, la relation (13) donne :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= -2i \int_0^1 t \sin 2\pi x t \, dt = -2i \left[\frac{-\cos 2\pi x}{2\pi x} + \int_0^1 \frac{\cos 2\pi x t}{2\pi x} \, dt \right] \\ &= -2i \left(\frac{\sin 2\pi x - 2\pi x \cos 2\pi x}{(2\pi x)^2} \right). \end{aligned}$$

3.2 Calcul direct : fonction exponentielle négative

Soit $a > 0$; considérons les deux fonctions f_a^+ et f_a^- (figure 2) définies par :

$$f_a^+(t) = e^{-2\pi a t} \mathbf{1}(t > 0) ;$$

$$f_a^-(t) = e^{2\pi a t} \mathbf{1}(t \leq 0) .$$

f_a^+ n'est ni paire ni impaire, mais un calcul direct donne :

$$\widehat{f_a^+}(x) = \int_0^\infty e^{-2\pi t(a+ix)} \, dt = \frac{1}{2\pi(a+ix)} .$$

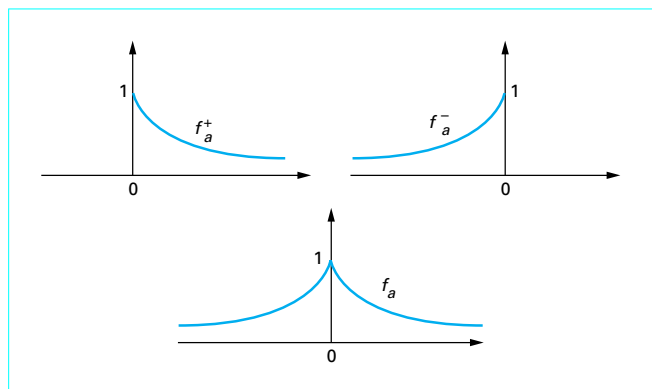


Figure 2 – Représentation d'une fonction exponentielle négative

On trouve, de même :

$$\widehat{f_a^-}(x) = \frac{1}{2\pi(a-ix)}$$

et on voit que f_a^+, f_a^- sont des exemples de fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

Si $f_a = f_a^+ + f_a^-$:

$$f_a(t) = e^{-2\pi a |t|}$$

et

$$\widehat{f_a}(x) = \widehat{f_a^+}(x) + \widehat{f_a^-}(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}$$

résultat qu'on a déjà vu.

La fonction f_a (figure 2) s'appelle l'exponentielle négative de paramètre a .

Jusqu'ici, tous les calculs s'effectuaient à l'aide de primitives, mais comme on va le voir § 3.3 et 3.4, il est quelquefois possible de

calculer l'intégrale définie $\int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-2i\pi x t} \, dt$ sans pour autant

savoir calculer une primitive de $f(t) e^{-2i\pi x t}$.

3.3 Calcul par inversion de Fourier : noyau de Poisson

Soit, pour $a > 0$, $P_a(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} \in L^1(\mathbb{R})$; P_a étant paire, on a :

$$\widehat{P_a}(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{a}{\pi(a^2 + t^2)} e^{2i\pi x t} \, dt,$$

et la primitive de $\frac{e^{2i\pi x t}}{a^2 + t^2}$ ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles.

Observons que $P_a = \widehat{f_a}$, où f_a est l'exponentielle négative au paragraphe 3.2.

La formule d'inversion de Fourier donne donc :

$$f_a(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{2i\pi x t} \widehat{f_a}(x) \, dx,$$

autrement dit :

$$f_a(t) = \widehat{P_a}(t).$$

■ On en déduit une importante propriété de semi-groupe pour les P_a ($a > 0$), qui forment ce qu'on appelle le **semi-groupe de Poisson**, à savoir :

$$P_a * P_b = P_{a+b} \tag{14}$$

(pour a fixé, P_a s'appelle le noyau de Poisson au point a).

Ici, un calcul par primitives de $P_a * P_b$ est faisable, mais rappelle trop la phrase de H. Guillaumet : « Ce que j'ai fait, je le jure, jamais aucune bête ne l'aurait fait ! ».

■ Observons plutôt que :

$$\widehat{P_a * P_b} = \widehat{P_a} \widehat{P_b} = f_a f_b = f_{a+b} = \widehat{P_{a+b}}$$

et la relation (14) en découle d'après l'injectivité de la transformation de Fourier.

Cette méthode de calcul est efficace, mais ne marche que si on reconnaît déjà une transformée de Fourier dans la fonction dont on s'apprête à calculer la transformée de Fourier (ici P_a , et on reconnaît que $P_a = \widehat{f_a}$) ; on va voir les méthodes plus « à la loyale ».

3.4 Calcul résiduel ou variationnel

■ Une autre façon de calculer :

$$\widehat{P}_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} e^{2i\pi xt} dx$$

est d'appliquer le **théorème des résidus** à la fonction méromorphe $h : z \mapsto \frac{a}{\pi} \frac{e^{2i\pi zt}}{a^2 + z^2}$ sur le contour γ_A (bord d'un demi-camembert) parcouru une fois dans le sens direct (figure 3), où l'on prend la précaution de prendre $t \geq 0$, ce qui donne un bon contrôle du module de $e^{2i\pi zt}$:

$$|e^{2i\pi zt}| = e^{-2\pi t \operatorname{Im} z} \leq 1 \text{ si } z \in \gamma_A.$$

Le théorème des résidus donne :

$$\int_{\gamma_A} h(z) dz = 2i\pi \frac{a}{\pi} \frac{e^{-2\pi at}}{2ia} = e^{-2\pi at};$$

le passage à la limite dans cette égalité ($A \rightarrow \infty$) donne, compte tenu de la majoration précédente :

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = e^{-2\pi at},$$

soit :

$$\widehat{P}_a(t) = e^{-2\pi at} \text{ si } t \geq 0,$$

et par parité $\widehat{P}_a(t) = e^{-2\pi a|t|}$.

■ Une troisième méthode (dite **méthode variationnelle**) est envisageable pour calculer \widehat{P}_a ; on remarque que :

$$\widehat{P}_a(t) = \frac{2a}{\pi} F(2\pi t),$$

où :

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{x^2 + a^2} dx.$$

On va voir que, sur l'intervalle ouvert $I =]0, \infty[$, F vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre. Intégrant cette équation, on en déduira F puis \widehat{P}_a . Une première dérivation sous le signe somme (justifiée comme d'habitude à l'aide de la suite :

$$\int_0^n \frac{\cos xt}{x^2 + a^2} dx = F_n(t),$$

donne, pour $t \in I$:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_0^{\infty} -\frac{x}{x^2 + a^2} \sin xt dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + a^2} \right) \sin xt dx - \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{a^2}{x^2 + a^2} \frac{\sin xt}{x} dx - \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy \end{aligned}$$

(en posant $tx = y$).

La seconde intégrale ne dépend plus de t , et la première se redérive facilement sous le signe somme, ce qui donne, pour $t \in I$:

$$F''(t) = \int_0^{\infty} \frac{a^2}{x^2 + a^2} \cos xt dx = a^2 F(t);$$

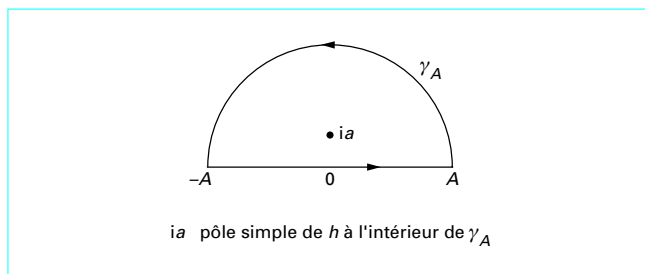


Figure 3 – Contour demi-circulaire : application du théorème des résidus à une fonction méromorphe sur γ_A

on en déduit :

$$F(t) = \lambda e^{at} + \mu e^{-at} \text{ pour } t > 0,$$

et par continuité pour $t \geq 0$, où λ et μ sont deux constantes inconnues.

Or, on a les deux informations :

$$F(0) = \frac{\pi}{2a} \text{ (calcul de primitive pour } t = 0 \text{)}$$

et $F(\infty) = 0$ (Riemann-Lebesgue ! le caractère borné de F suffit d'ailleurs),

qui nous donnent :

$$\lambda = 0 \text{ et } \mu = \frac{\pi}{2a};$$

d'où, pour $t \geq 0$:

$$F(t) = \frac{\pi}{2a} e^{-at}$$

et

$$\widehat{P}_a(t) = \frac{2a}{\pi} F(2\pi t) = e^{-2\pi at}.$$

■ Un autre **exemple** important où les deux méthodes précédentes s'appliquent est celui de la **fonction gaussienne** $f(t) = e^{-\pi t^2}$.

● La **méthode « résiduelle »** donne :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t^2 + 2itx)} dt = e^{-\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+ix)^2} dt \\ &= e^{-\pi x^2} \int_{\mathbb{R} + ix} e^{-\pi z^2} dz = e^{-\pi x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z^2} dz, \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du théorème des résidus appliqué à la fonction holomorphe (c'est-à-dire sans pôles) $e^{-\pi z^2}$ sur le contour rectangulaire de la figure 4, où l'on fait ensuite tendre A vers $+\infty$.

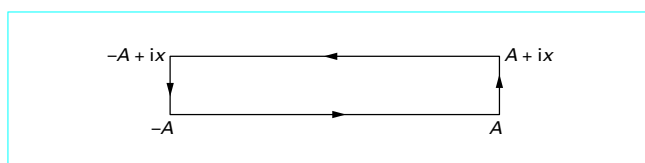


Figure 4 – Contour rectangulaire : application du théorème des résidus à une fonction holomorphe

L'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z^2} dz$ vaut notoirement 1 (mais sa valeur doit être calculée par une autre méthode), d'où :

$$\hat{f}(x) = e^{-\pi x^2} = f(x),$$

et l'on voit apparaître un phénomène remarquable, qui sera précisé dans le paragraphe 4 (théorème 8).

Si :
$$f(x) = e^{-\pi x^2}, \tag{15}$$

f est sa propre transformée de Fourier :

$$\hat{f} = f.$$

Une conséquence immédiate de la relation (15) est la relation suivante, souvent utilisée en calcul des probabilités.

Si : $\sigma > 0$ et si $f_{\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f_{\sigma}(t) dt = e^{-\sigma^2 x^2}. \tag{16}$$

■ La méthode « variationnelle » redonne la relation (15). Posons, en effet, $F = \hat{f}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi xt} dt,$$

et une dérivation sous le signe somme donne :

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} -2i\pi t e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi xt} dt = i \int_{-\infty}^{\infty} u dv,$$

avec $u(t) = e^{-2i\pi xt}$ et $v(t) = e^{-\pi t^2}$.

Une intégration par parties donne alors :

$$F'(x) = -i \int_{-\infty}^{\infty} v du = -2\pi x F(x).$$

En intégrant cette équation différentielle, on obtient :

$$F(x) = F(0) e^{-\pi x^2} = e^{-\pi x^2}.$$

4. Cas des fonctions de carré intégrable

4.1 Théorème de Plancherel

La transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas sans inconvénients. On ne peut l'inverser raisonnablement que si f est elle-même intégrable, ce qui n'est pas toujours facile à décider ; on souhaiterait la définir sur $L^2(\mathbb{R})$ par un procédé de prolongement, mais deux difficultés se présentent :

a) $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ (cf. relations (5) et (6)).

b) a priori, la transformée de Fourier est bornée en norme L^{∞} , pas en norme L^2 : $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

Ces deux difficultés sont surmontées par la proposition suivante.

Proposition 4.

On a les deux propriétés suivantes.

a) $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

b) Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$: $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Preuve. ◇

a) L'espace V des fonctions en escalier à support compact (c'est-à-dire nulles en dehors d'un segment) est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et contenu dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

b) Posons $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ et $g = f * \tilde{f}$.

g est dans $L^1(\mathbb{R})$, comme convolée de deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$; et g est dans $L^{\infty}(\mathbb{R})$, comme convolée de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$.

De plus :

$$\begin{aligned} \widehat{\hat{f}}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi xt} \overline{\tilde{f}(-t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi xt} \overline{\tilde{f}(t)} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi xt} f(t) dt} \\ &= \overline{\widehat{f}(x)}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\hat{g} = |\hat{f}|^2 \geq 0.$$

Le théorème 5 s'applique donc et :

$$\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}), \text{ autrement dit } \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}).$$

En outre, g est continue et le théorème d'inversion (théorème 3) donne :

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(x) dx,$$

soit encore :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx,$$

ce qui achève la preuve. ◇

Nous sommes, maintenant, en mesure de prouver le résultat fondamental de ce paragraphe.

Théorème 6 (théorème de Plancherel)

a) La transformation de Fourier

$$f \mapsto \hat{f} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

admet une unique extension linéaire continue :

$$\phi : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) ;$$

ϕ s'appelle la transformation de Plancherel et c'est un opérateur unitaire (c'est-à-dire isométrique et surjectif) de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

b) ϕ peut se calculer par la formule suivante :

$$\phi f(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{-2i\pi xt} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi xt} f(t) dt,$$

pour presque tout (dépendant de $f \in L^2(\mathbb{R})$) $x \in \mathbb{R}$.

c) Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$\phi(f * g) = \phi f \phi g \text{ et } \widehat{\hat{f}g} = \phi f * \phi g$$

Preuve (schématique). ◇

a) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et soit (f_n) une suite de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$.

La suite $\widehat{f_n}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ puisque $\|\widehat{f_p} - \widehat{f_q}\|_2 = \|f_p - f_q\|_2$ d'après la proposition 4.

$L^2(\mathbb{R})$ étant complet, il existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\|\widehat{f_n} - g\|_2 \rightarrow 0$.

On définit $\phi(f) = g$, en faisant les vérifications d'usage : g ne dépend pas de la suite particulière (f_n) choisie pour approcher f , puis ϕ est linéaire et isométrique d'après la proposition 4, et nous admettons qu'elle est surjective.

b) est admis : au-delà des raffinements mathématiques (l'existence de la limite de l'énoncé pour presque tout x est un théorème de niveau médaille Fields dû au mathématicien suédois L. Carleson (1966), cf. plus précisément [5]), on voit que ϕ se calcule exactement

par la même formule que $\widehat{\cdot}$, à cela près qu'ici le symbole $\int_{-\infty}^{\infty}$ représente une intégrale semi-convergente symétrique :

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A,$$

alors que, dans la transformation de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, le même symbole représente une intégrale absolument convergente.

Au-delà de ces précautions oratoires, on pourrait dire que ϕ et $\widehat{\cdot}$, c'est la même chose !

Notons que, comme toutes les isométries linéaires, ϕ conserve le produit scalaire :

$$(f/g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \text{ sur } L^2(\mathbb{R}) : \tag{17}$$

$$(\phi f / \phi g) = (f/g) \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

c) est également admis. ◇

Premier exemple.

$f(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$; $f \notin L^1(\mathbb{R})$, mais $f \in L^2(\mathbb{R})$, donc le **b** du théorème 6

donne pour presque tout x :

$$\begin{aligned} \phi f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} e^{-2i\pi tx} dt = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin 2\pi t \cos 2\pi tx}{\pi t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi(1+x)t + \sin 2\pi(1-x)t}{\pi t} dt \end{aligned}$$

A ce stade, remarquons que, si λ est un réel non nul, on a :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi \lambda t}{\pi t} dt = \frac{1}{2} \sigma(\lambda) \tag{18}$$

où $\sigma(\lambda)$ est le signe de λ :

$$\sigma(\lambda) = +1 \text{ si } \lambda > 0 \text{ et } \sigma(\lambda) = -1 \text{ si } \lambda < 0.$$

On a donc pour presque tout x :

$$\phi f(x) = \frac{1}{2} [\sigma(1+x) + \sigma(1-x)],$$

soit encore :

$$\phi f(x) = 1 \text{ si } |x| < 1$$

et :

$$\phi f(x) = 0 \text{ si } |x| > 1.$$

En d'autres termes, I désignant l'intervalle $[-1, 1]$:

$$\phi f = 1_I \tag{19}$$

Une autre façon d'obtenir la relation (19) est de se rappeler l'exemple du paragraphe 1.4 :

$$1_I \text{ est paire et } \phi(1_I)(x) = \frac{\sin 2\pi x}{\pi x} = f(x),$$

d'où :

$$1_I = \phi f.$$

Deuxième exemple.

$$f(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi |t|}.$$

Contrairement aux apparences, cet exemple est beaucoup plus compliqué que le précédent ; posons d'abord, pour $\varepsilon > 0$:

$$f_\varepsilon(t) = f(t)e^{-\varepsilon|t|}; f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \text{ et } f_\varepsilon \text{ impaire.}$$

La relation (13) donne :

$$\phi f_\varepsilon(x) = \widehat{f_\varepsilon}(x) = -2i \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi tx \sin 2\pi t}{\pi t} e^{-\varepsilon t} dt =: I(\varepsilon).$$

Avec une dérivation sous le signe somme, on écrit :

$$\begin{aligned} I'(\varepsilon) &= \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} 2 \sin 2\pi t \sin 2\pi tx e^{-\varepsilon t} dt \\ &= \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} [\cos 2\pi(1-x)t - \cos 2\pi(1+x)t] e^{-\varepsilon t} dt. \end{aligned}$$

Pour continuer les calculs, utilisons l'identité (où $b \in \mathbb{R}$) facile à vérifier :

$$\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} \cos bt dt = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + b^2}. \tag{20}$$

Il en résulte :

$$I'(\varepsilon) = \frac{-i}{2\pi} \left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + 4\pi^2(1+x)^2} - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + 4\pi^2(1-x)^2} \right],$$

puis :

$$I(\varepsilon) = \frac{-i}{2\pi} \ln \frac{\varepsilon^2 + 4\pi^2(1+x)^2}{\varepsilon^2 + 4\pi^2(1-x)^2} + C,$$

où C est une constante.

La relation $I(\infty) = 0$ donne $C = 0$; autrement dit, on a :

$$\phi f_\varepsilon(x) = \frac{-i}{2\pi} \ln \frac{\varepsilon^2 + 4\pi^2(1+x)^2}{\varepsilon^2 + 4\pi^2(1-x)^2}.$$

Faisons tendre ε vers zéro :

$$f_\varepsilon \rightarrow f \text{ dans } L^2(\mathbb{R}),$$

donc :

$$\phi f_\varepsilon \rightarrow \phi f \text{ dans } L^2(\mathbb{R}).$$

Il existe donc une suite (ε_j) telle que :

$$\varepsilon_j \xrightarrow{>} 0 \text{ et } \phi f_{\varepsilon_j}(x) \rightarrow \phi f(x) \text{ pour presque tout } x ;$$

le passage à la limite dans l'égalité précédente donne donc, pour presque tout x :

$$\phi f(x) = \frac{-i}{2\pi} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2,$$

soit, finalement :

$$\phi f(x) = \frac{i}{\pi} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|, \tag{21}$$

pour presque tout x .

La transformation de Plancherel étant isométrique, on a en particulier :

$$\|\phi f\|_2^2 = \|f\|_2^2 = 2,$$

d'où l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right)^2 dx = 2\pi^2 \tag{22}$$

et on laisse au lecteur le soin de vérifier directement cette égalité.

4.2 Fonctions de classe C^1 à support compact

La version globale du théorème de Dirichlet (cf. [AF 141 § 2.3]) dit qu'une fonction f de classe C^1 et 2π -périodique a une série de Fourier absolument convergente, et la preuve est basée sur le théorème de Parseval ; voici l'analogue pour la transformation de Fourier, où le théorème de Parseval est remplacé par celui de Plancherel.

Théorème 7 (théorème de Dirichlet). Soit f une fonction de classe C^1 à support compact, \hat{f} sa transformée de Fourier, alors :

$$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$$

et :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi xt} \hat{f}(x) dx \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Preuve. \diamond La dérivée f' de f est continue à support compact, donc d'après le théorème de Plancherel [théorème 6] :

$$\phi f' \in L^2(\mathbb{R}) ;$$

or ici $\phi f' = \widehat{f'} = 2i\pi x \hat{f}$ d'après la proposition 2.

Il en résulte que $x \mapsto x \hat{f}(x) \in L^2(\mathbb{R})$.

En écrivant

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{x} x \hat{f}(x)$$

et en utilisant l'inégalité de Schwarz, on voit que

$$\int_{|x| \geq 1} |\hat{f}(x)| dx \leq \left(\int_{|x| \geq 1} \frac{dx}{x^2} \right)^{1/2} \left(\int_{|x| \geq 1} |x \hat{f}(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty ;$$

de plus, \hat{f} est intégrable sur $[-1, 1]$ puisqu'elle est continue, et on a bien $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)| dx < \infty$; en particulier, la formule d'inversion de Fourier s'applique. \diamond

4.3 Bases orthonormales de $L^2(\mathbb{R})$ et fonctions d'Hermite

Commençons par une proposition simple.

Proposition 5.

La transformation de Plancherel ϕ vérifie :

$$\phi^4 = I,$$

où I est l'identité de $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve. \diamond Soit $S : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ la symétrie définie par

$$S f(x) = f(-x) ;$$

montrons d'abord que, si $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$g = \phi(f) \Rightarrow f(t) = \phi g(-t) \text{ pour presque tout } t. \tag{23}$$

En effet, la relation (23) a lieu pour f de classe C^1 à support compact (cf. théorème 7) puisque cette relation n'est alors rien d'autre que la formule d'inversion de Fourier.

Le cas général s'en déduit par densité. Or, en termes d'opérateurs, (23) s'écrit :

$$f = S \phi g = S \phi^2 f,$$

d'où :

$$S \phi^2 = I \tag{24}$$

Il résulte de la relation (24) :

$$\phi^2 = S^{-1} = S,$$

puis :

$$\phi^4 = S^2 = I. \quad \diamond$$

Les valeurs propres éventuelles λ de ϕ vérifient donc $\lambda^4 = 1$ et ne peuvent être que $\pm 1, \pm i$; nous savons déjà que 1 est valeur propre puisque $f(t) = e^{-\pi t^2}$ est sa propre transformée de Fourier-Plancherel ; $-i$ est aussi valeur puisqu'on a, par exemple, d'après la proposition 2b : f ayant la même valeur que précédemment :

$$\phi(-2i\pi t f) = (\phi f)' = f' = -2\pi t f,$$

d'où :

$$\phi(t f) = -i t f ;$$

et nous allons voir plus généralement le résultat suivant [1].

Théorème 8. La transformation de Plancherel ϕ a les propriétés suivantes :

a) ϕ a pour valeurs propres 1, $-1, i, -i$.

b) $L^2(\mathbb{R})$ possède une base orthonormale formée de fonctions propres de ϕ ; si E_1, E_{-1}, E_i, E_{-i} , sont les sous-espaces propres associés respectivement à 1, $-1, i, -i$, on a :

$$L^2(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_{-1} \oplus E_i \oplus E_{-i}$$

où la somme est une somme hilbertienne directe.

c) Si $h_n(t) = \frac{e^{-\pi t^2}}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-2\pi t^2})$ est la n -ième fonction d'Hermite ($n = 0, 1, \dots$), les h_n forment une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ et :

$$\|h_n\|_2^2 = \frac{(4\pi)^n}{\sqrt{2} n!} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Preuve. \diamond Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

\blacksquare D'après la formule de Taylor (applicable ici même avec λ complexe), on a :

$$e^{-2\pi(t+\lambda)^2} = \sum_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-2\pi t^2}),$$

soit encore :

$$e^{-\pi t^2} e^{-4\pi t\lambda} e^{-2\pi\lambda^2} = \sum_0^\infty \lambda^n h_n(t) ; \tag{25}$$

Cela s'écrit aussi :

$$e^{-\pi(t+2\lambda)^2} e^{2\pi\lambda^2} = \sum_0^\infty \lambda^n h_n(t) \tag{26}$$

d'où en prenant les transformées de Fourier-Plancherel des deux membres et en utilisant la relation (15) et la proposition 2b :

$$e^{2\pi\lambda^2} e^{4i\pi x\lambda} e^{-\pi x^2} = \sum_0^\infty \lambda^n \phi h_n(x) .$$

Changeons λ en $i\lambda$ pour obtenir :

$$e^{-\pi x^2} e^{-4\pi x\lambda} e^{-2\pi\lambda^2} = \sum_0^\infty \lambda^n i^n \phi h_n(x) . \tag{27}$$

La comparaison des identités (25) et (27) donne :

$$\sum_0^\infty \lambda^n h_n(x) = \sum_0^\infty i^n \lambda^n \phi h_n(x) ,$$

d'où, par identification :

$$i^n \phi h_n(x) = h_n(x)$$

et :

$$\phi h_n = i^{-n} h_n , \quad n = 0, 1, \dots \tag{28}$$

Cela prouve déjà a.

■ Notons que :

$$\begin{aligned} n \equiv 0(4) &\Rightarrow h_n \in E_1 ; \\ n \equiv 2(4) &\Rightarrow h_n \in E_{-1} ; \\ n \equiv 3(4) &\Rightarrow h_n \in E_i ; \\ n \equiv 1(4) &\Rightarrow h_n \in E_{-i} . \end{aligned}$$

Pour montrer l'orthogonalité des h_n , on écrit :

$$h_n(x) = e^{-\pi x^2} H_n(x) ,$$

où H_n est un polynôme (polynôme d'Hermite) de degré n :

$$H_n(x) = \frac{(-4\pi)^n}{n!} x^n + \dots ,$$

et donc :

$$H_n^{(n)} = (-4\pi)^n .$$

● Supposons $m < n$, alors des intégrations par parties successives donnent :

$$\begin{aligned} (h_m/h_n) &= \int_{-\infty}^\infty h_m(x) \frac{e^{\pi x^2}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\pi x^2}) dx \\ &= \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^\infty H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\pi x^2}) dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^\infty H_m^{(n)}(x) e^{-2\pi x^2} dx = 0 , \end{aligned}$$

car le polynôme $H_m^{(n)}$ est identiquement nul.

Si $m = n$, on a vu que :

$$H_n^{(n)} = (-4\pi)^n ,$$

donc le même calcul donne :

$$\|h_n\|_2^2 = \frac{(4\pi)^n}{n!} \int_{-\infty}^\infty (e^{-2\pi x^2}) dx = \frac{(4\pi)^n}{n! \sqrt{2}} ,$$

et cela prouve b et le début de c.

■ Il nous reste encore à montrer que les h_n engendrent $L^2(\mathbb{R})$, ou que la seule fonction g orthogonale à tous les h_n est la fonction nulle.

Soit donc $g \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $(g/h_n) = 0$ pour tout n . La relation (26) entraîne alors :

$$e^{2\pi\lambda^2} (g/e^{-\pi(t+2\lambda)^2}) = 0 ,$$

soit, en posant $2\lambda = -a$:

$$\int_{-\infty}^\infty g(t) e^{-\pi(a-t)^2} dt = (g * f)(a) = 0 ,$$

où l'on pose encore $f(t) = e^{-\pi t^2}$; a étant arbitraire, on voit que $(g * f) = 0$; d'où (via le théorème de Plancherel) :

$$0 = \phi(g * f) = \phi g \phi f = f \phi g ,$$

puis $\phi g = 0$ et $g = 0$.

Cela achève la preuve du théorème 8 et montre le rôle central joué par les gaussiennes ($x \mapsto e^{-ax^2}$) dans la transformation de Plancherel.

Posons $d\mu(x) = e^{-2\pi x^2} dx$ et observons que :

$$h_n/h_m = \int_{-\infty}^\infty H_n(x) H_m(x) e^{-2\pi x^2} dx = (H_n/H_m)_{L^2(\mu)} ; \tag{29}$$

une autre façon de formuler c est donc de dire que :

Les polynômes d'Hermite H_n forment une base orthogonale de $L^2(\mu)$.

5. Espace de Schwartz

5.1 Fonctions régulières et rapidement décroissantes sur \mathbb{R} ; espace \mathcal{S}

Nous avons déjà mentionné (§ 1.4), après la preuve de la proposition 2, que la transformation de Fourier a tendance à échanger les propriétés de régularité et de décroissance (décroissance n'étant pas à prendre au sens des fonctions monotones, mais au sens de la vitesse avec laquelle on tend vers zéro quand la variable tend vers l'infini) : si f est régulière, \hat{f} est décroissante ; si f est décroissante \hat{f} est régulière.

L'idée fondamentale de Schwartz est de considérer la classe des fonctions ayant les deux propriétés à la fois : très régulières et très décroissantes. Alors, par ce qui précède, cette classe sera complètement invariante par la transformation de Fourier, et tous les calculs algébriques qu'on pourra y faire seront automatiquement corrects, sans qu'il soit nécessaire à chaque fois de les justifier à l'aide de tel ou tel théorème de convergence ; on est donc mené à la définition suivante.

Définition 2. L'espace \mathcal{S} de Schwartz est l'espace des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

- a) f est indéfiniment dérivable (c'est-à-dire très régulière) ;
- b) Il existe des constantes $C_{p,q}$ (dépendant de f) telles que

$$|f^{(p)}(x)| \leq C_{p,q} (1 + |x|)^{-q} \text{ pour tous } x, p, q$$

(c'est-à-dire f et ses dérivées décroissent plus vite que toute puissance de x).

Étudions quelques exemples pour nous familiariser avec la définition 2.

- $e^{-\pi|x|}$ décroît plus vite que toute puissance de x , mais n'est pas assez régulière (non dérivable en 0) ; $e^{-2\pi|x|} \notin \mathcal{S}$.
- $(1 + x^2)^{-10}$ est indéfiniment dérivable, mais ne décroît pas assez vite : elle décroît comme x^{-20} quand $|x| \rightarrow \infty$; $(1 + x^2)^{-10} \notin \mathcal{S}$.

• $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$; en effet, cette fonction f est indéfiniment dérivable, et, de plus, $f^{(p)}(x) = P_p(x) e^{-x^2}$ où P_p est un polynôme (variante du polynôme d'Hermite), donc $f^{(p)}$ décroît vers zéro plus vite que toute puissance de x (l'exponentielle l'emporte sur la puissance).

Plus généralement $e^{-|x|^p} \in \mathcal{S}$ si, et seulement si, p est un entier pair.

La proposition suivante rassemble quelques propriétés de stabilité de l'espace \mathcal{S} [7].

Proposition 6.

a) \mathcal{S} est une algèbre :

$$f, g \in \mathcal{S} ; \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda f, fg \in \mathcal{S}.$$

b) \mathcal{S} est stable par dérivation :

$$f \in \mathcal{S} \Rightarrow f' \in \mathcal{S}.$$

c) \mathcal{S} est stable par multiplication par un polynôme P :

$$f \in \mathcal{S} \Rightarrow P f \in \mathcal{S}.$$

d) \mathcal{S} est aussi une algèbre pour la convolution :

$$f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow f * g \in \mathcal{S}.$$

Nous ne détaillerons pas la preuve facile de cette proposition : **b** a lieu par définition ;

— pour **a** et **c**, on utilise la formule de Leibniz pour la dérivée d'un produit ;

— pour **d**, on utilise une dérivation sous le signe somme.

On verra plus loin (théorème 9) qu'on pourrait aussi se ramener à la multiplication ordinaire à l'aide de la transformation de Fourier.

On pourrait penser à considérer un espace encore plus restreint que \mathcal{S} , à savoir l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact : c'est l'espace \mathcal{D} qu'on considère en théorie des distributions (une distribution n'est autre qu'un élément du dual topologique \mathcal{D}' de \mathcal{D}). Mais cet espace n'est pas stable par la transformation de Fourier : à moins que f ne soit identiquement nulle, f et \hat{f} ne sont jamais simultanément à support compact. C'est une version simple du principe d'incertitude d'Heisenberg sur lequel nous reviendrons au paragraphe 7.1 (théorème 13). L'espace \mathcal{D} est donc trop petit pour être l'espace idéal sur lequel calculer avec la transformation de Fourier. Nous allons maintenant préciser en deux temps l'idée d'échange apparue après la proposition 2, pour arriver au théorème d'isomorphisme.

5.2 Transformée de Fourier d'une fonction régulière

Soit p un entier positif et f une fonction p -régulière, au sens où f est de classe C^p et où $f, f', \dots, f^{(p)} \in L^1(\mathbb{R})$ (de façon équivalente f et $f^{(p)} \in L^1(\mathbb{R})$). Notons qu'on triche un peu puisque f doit aussi avoir une certaine décroissance si l'on veut que f et ses dérivées soient dans $L^1(\mathbb{R})$; mais il est commode de présenter les choses ainsi. On a alors la proposition suivante.

Proposition 7. Si f est p -régulière, \hat{f} est $p-2$ -décroissante et plus précisément :

$$|\hat{f}(x)| \leq \frac{\|f^{(p)}\|_1}{(2\pi|x|)^p}.$$

Preuve. \diamond La proposition 2^e itérée donne :

$$\widehat{f^{(p)}}(x) = (2i\pi x)^p \hat{f}(x),$$

et on sait que :

$$\|\widehat{f^{(p)}}\|_\infty \leq \|f^{(p)}\|_1,$$

ce qui donne le résultat.

Le lemme de Riemann-Lebesgue dit même que :

$$x^p \hat{f}(x) \rightarrow 0 \text{ quand } |x| \rightarrow \infty. \quad \diamond$$

5.3 Transformée de Fourier d'une fonction rapidement décroissante

Soit p un entier positif et f une fonction p -décroissante au sens où $f, x f, \dots, x^p f \in L^1(\mathbb{R})$ (de façon équivalente $x^p f \in L^1(\mathbb{R})$). Ici, on ne triche pas et aucune régularité (si ce n'est la mesurabilité !) n'est imposée à f . Notons que cette définition a été utilisée de façon anticipée dans l'énoncé de la proposition 7, dont la proposition suivante est en quelque sorte la proposition duale.

Proposition 8. Si f est p -décroissante, \hat{f} est de classe C^p .

Preuve. \diamond La proposition 2 itérée donne le résultat, avec :

$$\widehat{(f^p)}(x) = ((-2i\pi t)^p \hat{f})(x). \quad \diamond$$

5.4 Théorème d'isomorphisme

Les propositions 7 et 8 vont se combiner pour donner le résultat suivant, qui rappelle le théorème de Plancherel, mais où l'on travaille avec des fonctions beaucoup plus sympathiques que les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 9 (théorème d'isomorphisme). La transformation de Fourier est un isomorphisme (continu) de \mathcal{S} sur \mathcal{S} .

Preuve. \diamond Nous admettrons la continuité (qui a un sens quand on munit \mathcal{S} d'une distance naturelle et qui n'est pas difficile à vérifier) et allons montrer que :

— si $f \in \mathcal{S}$:

$$g = \hat{f} \in \mathcal{S} \quad (30)$$

— si $g \in \mathcal{S}$, il existe $f \in \mathcal{S}$ telle que :

$$g = \hat{f}. \tag{31}$$

Soit $f \in \mathcal{S}$, $p, q \in \mathbb{N}$; f est p -décroissante, donc g est de classe C^p d'après la proposition 8, et plus précisément :

$$g^{(p)}(x) = (-2i\pi t)^p f(x);$$

d'autre part, d'après la proposition 6 on a :

$$t^p f \in \mathcal{S},$$

donc d'après la proposition 7, on obtient :

$$|\widehat{t^p f}(x)| \leq \frac{\|(t^p f)^{(q)}\|_1}{(2\pi|x|)^q}$$

et finalement : $|g^{(p)}(x)| \leq (2\pi)^{p-q} \frac{\|(t^p f)^{(q)}\|_1}{|x|^q}$

p et q étant arbitraires, cela prouve (30).

La relation (31) est maintenant facile à démontrer : puisque $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier et la transformée de Plancherel ϕ coïncident sur \mathcal{S} , et $\phi^4 = I$ d'après la proposition 5. On a donc :

$$g = \phi(\phi^3 g),$$

et $\phi^3 g = f \in \mathcal{S}$ d'après (30), d'où :

$$g = \phi f = \hat{f}, \text{ avec } f \in \mathcal{S}. \quad \diamond$$

Exemple d'application

■ Soit $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}$ non tous nuls, $g \in \mathcal{S}$, P le polynôme caractéristique associé à a_0, \dots, a_d , c'est-à-dire le polynôme :

$$P(x) = \sum_{j=0}^d a_j (2i\pi x)^j.$$

On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire à coefficients constants avec second membre suivante :

$$\sum_{j=0}^d a_j f^{(j)} = g \tag{32}$$

où l'inconnue f est cherchée dans \mathcal{S} .

On va voir qu'on a équivalence entre :

- a) (32) a une solution dans \mathcal{S} ;
- b) les zéros réels de P (comptés avec leur multiplicité) sont des zéros de \hat{g} .

■ $a \Rightarrow b$ est facile ; si la relation (32) a lieu, on obtient en prenant les transformées de Fourier :

$$\hat{g} = \sum_{j=0}^d a_j \widehat{f^{(j)}} = \sum_{j=0}^d a_j (2i\pi x)^j \hat{f},$$

soit $\hat{g} = P \hat{f}$, et b s'ensuit.

■ Pour $b \Rightarrow a$, supposons le problème résolu. Une solution $f \in \mathcal{S}$ de la relation (32) vérifiera de même :

$$P \hat{f} = \hat{g}, \text{ soit } \hat{f} = \frac{\hat{g}}{P};$$

mais $\hat{g} \in \mathcal{S}$, et le problème est de savoir si l'on peut diviser par P en restant dans \mathcal{S} ; or :

$$P(x) = c(x-x_1)^{\alpha_1} \dots (x-x_r)^{\alpha_r} Q(x),$$

où C est une constante non nulle, Q un polynôme sans zéros sur \mathbb{R} , x_1, \dots, x_r des réels, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des entiers.

Par hypothèse \hat{g} et ses $\alpha_1 - 1$ premières dérivées s'annulent en x_1 , donc on peut écrire :

$$\hat{g}(x) = (x-x_1)^{\alpha_1} h(x),$$

où h est une fonction indéfiniment dérivable dont on vérifie aisément qu'elle appartient à \mathcal{S} . De proche en proche, on peut écrire :

$$\hat{g}(x) = C(x-x_1)^{\alpha_1} \dots (x-x_r)^{\alpha_r} \varphi(x),$$

où $\varphi \in \mathcal{S}$; et le polynôme Q est minoré sur \mathbb{R} puisqu'il est soit constant, soit sans zéros réels et tendant vers l'infini ($|Q(x)| \geq \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}$), donc :

$$\varphi = Q\psi, \text{ où } \psi \in \mathcal{S},$$

et finalement :

$$\hat{g} = P\psi \text{ où } \psi \in \mathcal{S},$$

et on a bien pu diviser \hat{g} par P dans \mathcal{S} .

Le théorème d'isomorphisme donne maintenant $f \in \mathcal{S}$ telle que $\psi = \hat{f}$, et f répond à la question (de façon unique) puisque :

$$\sum_{j=0}^d a_j \widehat{f^{(j)}} = P \hat{f} = \hat{g},$$

d'où :

$$\sum_{j=0}^d a_j f^{(j)} = g$$

d'après l'injectivité de la transformation de Fourier.

■ Une autre application est la proposition 6d. Si $f, g \in \mathcal{S}$, on a $\widehat{f \hat{g}} \in \mathcal{S}$, donc il existe $h \in \mathcal{S}$ telle que $\widehat{f \hat{g}} = \hat{h}$; d'où :

$$\widehat{f * g} = \hat{h} \text{ et } f * g = h \in \mathcal{S}.$$

Nous allons maintenant voir, comme annoncé dans l'Introduction, une application de la transformée de Fourier à l'équation de la chaleur pour une barre infinie et divers prolongements et applications de cette transformation.

6. Équation de la chaleur pour une barre infinie

6.1 Modélisation du problème

Considérons une barre métallique illimitée (!) assimilée à la droite réelle \mathbb{R} et appelons $u(x, t)$ la température du point d'abscisse x à l'instant t , sachant qu'à l'instant zéro le point d'abscisse x est porté à la température $h(x)$.

Comment la barre va-t-elle se refroidir, autrement dit comment va évoluer $u(x, t)$? La modélisation mathématique de ce problème se fait comme dans le cas d'une barre finie [AF 141 § 5.1], à cela près qu'il n'y a plus de conditions aux limites. La modélisation débouche sur le problème suivant : trouver une fonction $u = u(x, t)$ telle que

$$u(x, 0) = h(x) \text{ (conditions initiales)} \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ (équation d'évolution)} \tag{34}$$

et $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

où Ω désigne le demi-plan ouvert supérieur dans $\mathbb{R}^2 : \Omega = \mathbb{R} \times]0, \infty[$;
 Pour simplifier, on prendra la donnée initiale h dans l'espace de Schwartz \mathcal{S} .

6.2 Utilisation de la transformée de Fourier

Supposons le problème résolu et introduisons la transformée de Fourier v de u par rapport à la variable d'espace x , c'est-à-dire considérons :

$$v(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\xi y} u(y, t) dy = : \widehat{u}_t(\xi)$$

où $u_t(y) = u(y, t)$.

En dérivant sous le signe somme et en utilisant la relation (34), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\xi y} \frac{\partial u}{\partial t}(y, t) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\xi y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(y, t) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\xi y} u_t''(y) dy = -4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}_t(\xi) \end{aligned}$$

(d'après la proposition 2e), soit encore :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 v(\xi, t)$$

A ξ fixé, nous sommes ramenés à l'intégration d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, ce qui est autrement plus simple que de résoudre l'équation aux dérivées partielles (34) ! L'intégration de cette équation différentielle donne :

$$v(\xi, t) = C(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t},$$

et dans $e^{-4\pi^2 \xi^2 t}$ nous reconnaissons $\widehat{K}_t(\xi)$ où :

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) = K(x, t) \tag{35}$$

est le noyau de la chaleur.

En effet, si $f(x) = e^{-\pi x^2}$, on a :

$$K_t = b D_b f \text{ où } b = (\sqrt{4\pi t})^{-1},$$

avec les notations de la proposition 2, d'où d'après la proposition 2c :

$$\widehat{K}_t(\xi) = \widehat{f}\left(\frac{\xi}{b}\right) = e^{-4\pi^2 \xi^2 t}.$$

Si on cherche $C(\xi)$ sous la forme $\widehat{D}(\xi)$, on a donc :

$$\widehat{u}_t(\xi) = v(\xi, t) = \widehat{D}(\xi) \widehat{K}_t(\xi) = \widehat{D * K}_t(\xi),$$

ce qui suggère de prendre (nous en sommes à chercher une solution, pas à les trouver toutes) :

$$u_t = D * K_t.$$

D'autre part, on voit que :

$$\left. \begin{aligned} K_t(0) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \rightarrow \infty \text{ quand } t \rightarrow 0 \\ K_t(x) &\rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0, \text{ si } x \neq 0 \end{aligned} \right\} \tag{36}$$

Autrement dit, quand $t \rightarrow 0$, K_t tend vers la « fonction » qui vaut l'infini en zéro et zéro ailleurs, c'est-à-dire vers la masse de Dirac δ_0 , élément neutre pour la convolution.

Le passage à la limite dans $u_t = D * K_t$ donne $u_0 = D * \delta_0 = D$, autrement dit :

$$D = h \text{ et } u_t = h * K_t.$$

Ces considérations heuristiques peuvent être rendues rigoureuses, sous forme du théorème suivant que nous admettrons [2].

Théorème 10 (théorème d'existence pour l'équation de la chaleur)

Si la donnée initiale est $h \in \mathcal{S}$, l'équation de la chaleur admet une solution et une seule u telle que $u_t \in \mathcal{S}$ pour tout $t \geq 0$, à savoir :

$$u_t = h * K_t ;$$

en d'autres termes :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-y) K_t(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-y) h(y) dy.$$

6.3 Contre-exemple pour l'unicité

Nous avons présupposé (§ 6.2) que $u_t \in \mathcal{S}$ pour pouvoir résoudre la relation (34) en utilisant la transformée de Fourier. Nous avons de même utilisé les séries de Fourier pour résoudre l'équation de la chaleur avec une barre finie ; ensuite, un théorème d'unicité, basé sur un principe de maximum [AF 141 § 5.3], nous avait montré que, malgré l'arbitraire de la démarche « séries de Fourier », nous n'avions laissé échapper aucune solution. Il n'en est pas de même ici, comme on l'a mentionné dans l'introduction, et voici pour $h = 0$ une solution des relations (33) et (34) autre que la solution nulle, dont un physicien dirait peut-être qu'elle n'a pas de signification (physique !), mais qui rentre néanmoins dans la modélisation (33), (34).

Proposition 9 (non-unicité pour l'équation de la chaleur).

On peut trouver une fonction v non identiquement nulle qui résout l'équation de la chaleur avec donnée initiale $h = 0$.

Preuve. \diamond Cherchons v à variables séparées :

$$v(x, t) = \sum_0^{\infty} a_n(x) b_n(t).$$

La relation (34) prend la forme :

$$\sum_0^{\infty} a_n''(x) b_n(t) = \sum_0^{\infty} a_n(x) b_n'(t).$$

Imposons, arbitrairement, à la suite a_n de vérifier $a_n'' = a_{n-1}$ si $n \geq 1$ et $a_0'' = 0$; autrement dit demandons à a_n d'être une primitive d'ordre $2n$ d'une fonction donnée u .

Le choix $u = 1$ conduit au choix $a_n(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ auquel on se tient dans la suite.

Alors, l'équation aux dérivées partielles précédentes s'écrit :

$$\sum_0^{\infty} a_n(x) b_n'(t) = \sum_0^{\infty} a_{n-1}(x) b_n(t) = \sum_0^{\infty} a_n(x) b_{n+1}(t),$$

et il est donc souhaitable d'avoir $b'_n = b_{n+1}$, autrement dit de prendre pour b_n la dérivée n -ième d'une fonction donnée φ :

$$b_n = \varphi^{(n)}.$$

On cherche donc v sous la forme :

$$v(x, t) = \sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!} \varphi^{(n)}(t)$$

et on veut avoir :

$$v(x, 0) = 0 \text{ pour tout } x,$$

soit :

$$\varphi^{(n)}(0) = 0 \text{ pour tout } n,$$

avec bien sûr φ non identiquement nulle.

Voici un **choix** possible, dû à **Cauchy** :

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) \text{ si } t \neq 0 ;$$

$$\varphi(0) = 0.$$

En utilisant les inégalités de Cauchy (!), on a pour $t > 0$ (figure 5) :

$$|\varphi^{(n)}(t)| \leq n! \left(\frac{2}{t}\right)^n \sup_{|z-t|=t/2} |e^{-1/z^2}|$$

d'où l'on déduit pour $\varphi^{(n)}(t)$ un contrôle (optimal) de la forme :

$$|\varphi^{(n)}(t)| \leq \alpha \beta^n (n!)^{3/2} \quad (\alpha, \beta \text{ étant des constantes}) ; \quad (37)$$

(on notera que, pour $z \in \gamma_t$, on a $Rz^{-2} \geq \frac{1}{2} |z|^{-2} \geq \frac{1}{8} t^{-2}$).

Malgré la croissance sévère des dérivées n -ièmes de φ quand n grandit, tous les problèmes de convergence dans la série

$\sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!} \varphi^{(n)}(t)$ sont réglés par le fait que $(2n)!$ se comporte comme $(n!)^2$ et l'emporte donc largement sur $(n!)^{3/2}$.

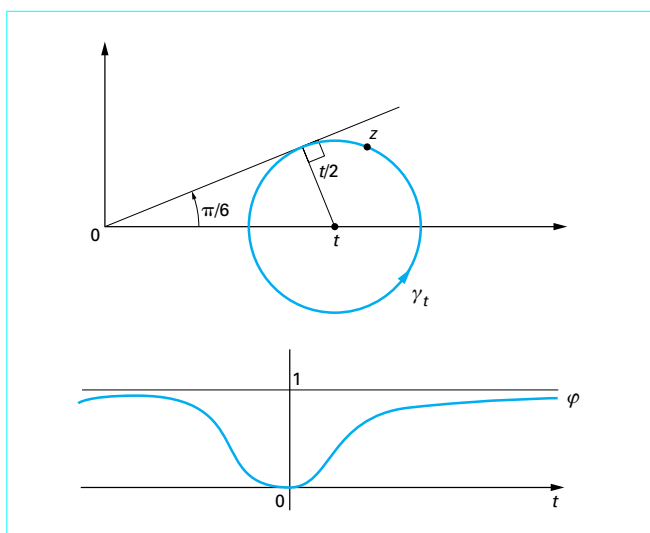


Figure 5 – Fonction de Cauchy et intégrale de Cauchy sur un cercle

Avec le choix indiqué de φ , la fonction :

$$v(x, t) = \sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!} \varphi^{(n)}(t)$$

fournit le contre-exemple annoncé.

Revenant au **cas général**, on voit que si u vérifie les relations (33) et (34), $u + v$ aussi ; sans restrictions supplémentaires sur la solution, il n'y a donc jamais unicité. \diamond

6.4 Existence et unicité de solutions bornées

Nous nous limiterons au cas où $h \in \mathcal{S}$; nous avons vu que, même dans ce cas, il n'y a pas unicité (proposition 9), mais que si toutes les « sections » u_t de u sont dans \mathcal{S} il y a unicité ; il est normal de chercher des conditions moins restrictives sur u et nous allons montrer le théorème suivant, qui va dans ce sens.

Théorème 11 (théorème d'existence et d'unicité de solutions bornées)

Si la donnée initiale $h \in \mathcal{S}$ (ou simplement si h est continue, bornée), l'équation de la chaleur avec donnée initiale h admet une solution bornée et une seule.

Preuve. \diamond L'existence d'une solution bornée u est donnée par le théorème 10. En effet :

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \int_{-\infty}^\infty |h(x-y)| K_t(y) dy \leq \|h\|_\infty \int_{-\infty}^\infty K_t(y) dy \\ &= \|h\|_\infty \widehat{K}_t(0) = \|h\|_\infty. \end{aligned}$$

Pour l'unicité, il faut voir qu'une solution bornée u , correspondant à $h = 0$ est identiquement nulle ; nous allons pour cela utiliser le principe du maximum (ou principe de la casserole) vu dans [AF 141 § 5.3] (théorème 16).

Posons :

$$M = \|u\|_\infty = \sup \{|u(x, t)| ; x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$$

et soit $\varepsilon, A > 0$ à ajuster plus tard, ainsi que $(x_0, t_0) \in \Omega$. Considérons la casserole $\omega = \omega_A$ représentée sur la figure 6 :

Soit $w(x, t) = u(x, t) - \varepsilon\left(\frac{x^2}{2} + t\right)$; w vérifie l'équation de la chaleur car :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

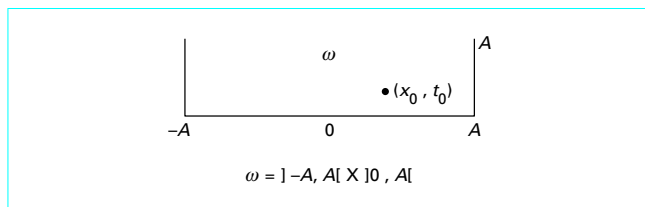


Figure 6 – Principe de la casserole sans couvercle

Sur le fond de la casserole :

$$w(x, 0) = u(x, 0) - \varepsilon \frac{x^2}{2} = -\varepsilon \frac{x^2}{2} \leq 0 ;$$

sur les parois verticales : $x = \pm A$ de la casserole,

$$w(x, t) \leq M - \varepsilon \frac{A^2}{2} \leq 0 \text{ si } A \geq \sqrt{\frac{2M}{\varepsilon}}.$$

Étant donné $(x_0, t_0) \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$, on peut choisir $A \geq \sqrt{\frac{2M}{\varepsilon}}$ et tel

que $(x_0, t_0) \in \omega_A$.

Le principe du maximum donne alors :

$$w(x_0, t_0) \leq 0, \text{ soit :}$$

$$u(x_0, t_0) \leq \varepsilon \left(\frac{x_0^2}{2} + t_0 \right),$$

puis :

$$u(x_0, t_0) \leq 0$$

en faisant tendre ε vers 0. De même $-u(x_0, t_0) \leq 0$, d'où :

$$u(x_0, t_0) = 0 \text{ et } u = 0,$$

(x_0, t_0) étant arbitraire dans Ω . ◇

7. Applications diverses. Prolongements

7.1 Extension de la transformation de Fourier au champ complexe

Un des avantages de la transformation de Fourier est qu'on peut souvent la prolonger au champ complexe, c'est-à-dire que la formule :

$$\hat{f}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi tz} f(t) dt$$

a encore un sens pour $z \in \Omega$, ouvert du plan complexe et γ définit une fonction holomorphe.

On peut alors profiter de la très riche théorie des fonctions holomorphes pour recueillir des informations intéressantes sur f et \hat{f} .

Le mathématicien suédois Garling a, d'ailleurs, énoncé sept règles d'or sur la transformation de Fourier, et l'une d'elles est : « *Go to the complex if you can!* » (passez à la variable complexe si possible). Nous allons voir deux illustrations de ce principe, le théorème de Denjoy-Carleman et une version, due à Hardy, du principe d'incertitude d'Heisenberg ; il nous faut d'abord une définition.

Définition 3. Soit $(M_n)_{n \geq 0}$, avec $M_0 = 1$, une suite croissante de réels > 0 telle que la suite

$$\left(\frac{1}{\lambda_n} \right)_{n \geq 1} := \left(\frac{M_n}{M_{n-1}} \right)_{n \geq 1}$$

soit aussi croissante (typiquement $M_n = (n!)^\alpha$, $\alpha > 0$).

On appelle classe $C\{M_n\}$ l'espace des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ indéfiniment dérivables telles que

$$\|f^{(n)}\|_\infty \leq AB^n M_n \text{ pour tout } n \geq 0,$$

où $A = A(f)$ et $B = B(f)$ dépendent de f .

La formule de Leibniz montre facilement que $C\{M_n\}$ est une algèbre. Pour $M_n = n!$, on a l'algèbre de fonctions analytiques qui vérifient le principe des zéros isolés sous la forme :

« si $f \in C\{n!\}$ est à support compact, alors $f = 0$ ».

La question est alors de savoir quelles sont les classes $C\{M_n\}$ qui vérifient ce principe des zéros isolés : de telles classes sont appelées **classes quasi analytiques**. La réponse est fournie par le théorème suivant, où une version quantifiée de la classe \mathcal{S} et l'extension au champ complexe jouent un rôle essentiel [7].

Théorème 12 (théorème de **Denjoy-Carleman**). Pour une classe $C\{M_n\}$, on a équivalence entre **a** et **b** :

a) $C\{M_n\}$ est non quasi analytique ;

$$\mathbf{b)} \sum_1^\infty \lambda_n = \sum_1^\infty \frac{M_{n-1}}{M_n} < \infty.$$

Preuve. ◇ **b** ⇒ **a**. C'est la partie la plus facile à vérifier. Posons :

$$\lambda = 1 + \sum_1^\infty \lambda_n,$$

$$I_0(t) = \max(1 - |t|, 0),$$

$$I_n(t) = \frac{1}{2\lambda_n} 1_{[-\lambda_n, \lambda_n]},$$

et :

$$f = I_0 * I_1 * \dots * I_n * \dots = \ast_0^\infty I_n.$$

On démontre que ce produit de convolution infini définit une fonction f indéfiniment dérivable, non identiquement nulle, à support dans $[-\lambda, \lambda]$, telle que $\|f^{(n)}\|_\infty \leq M_n$ pour tout n .

$C\{M_n\}$ contient donc la fonction à support compact f et n'est pas quasi analytique.

a ⇒ **b**. Soit $f \in C\{M_n\}$, non identiquement nulle et à support compact. La difficulté est de gérer cette information mixte, à la fois qualitative (f est à support compact) et quantitative ($\|f^{(n)}\|_\infty \leq AB^n M_n$). La transformation de Fourier se prête admirablement à cette gestion.

D'abord, quitte à remplacer f par $\alpha f(\lambda x + \mu)$, ce qui ne fait pas sortir de $C\{M_n\}$, on peut supposer que :

$$\left. \begin{aligned} &\|f^{(n)}\|_\infty \leq M_n, \quad n = 0, 1, \dots \\ &f \text{ est nulle en dehors de } [0, a], \text{ où } a > 0. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Considérons la transformée de Fourier de f , sous la forme :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itx} dt = \int_0^a f(t) e^{itx} dt ;$$

on voit que :

$$F(z) = \int_0^a e^{itz} f(t) dt$$

a un sens pour tout $z \in \mathbb{C}$ et définit, en particulier, une fonction holomorphe bornée dans le demi-plan supérieur $\Omega = \{z; \text{Im}z > 0\}$ et continue dans le demi-plan fermé. En effet, si $z \in \Omega$, on a :

$$|F(z)| \leq \int_0^a |e^{itz}| |f(t)| dt = \int_0^a e^{-t \text{Im}z} |f(t)| dt \leq \int_0^a |f(t)| dt.$$

La théorie des fonctions holomorphes (formule de Jensen) nous fournit alors la précieuse information suivante (déduite de la deuxième relation (38)) :

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \ln \frac{1}{|F(x)|} dx = C < \infty. \quad (39)$$

Exploitions maintenant la première relation (38) qui exprime une régularité quantifiée de f (est C^∞ et la taille de $f^{(n)}$ est dominée par M_n). Suivant les idées qui ont motivé l'introduction de la classe \mathcal{S} de Schwartz (§ 5), cette régularité quantifiée de f devrait se traduire par une décroissance quantifiée de sa transformée de Fourier F et, en effet, la proposition 6 donne immédiatement :

$$|F(x)| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_1}{|x|^n} \leq \frac{a M_n}{|x|^n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (40)$$

Pour exploiter toutes les informations de cette relation (40) à la fois, il est commode de poser, pour $x \geq 0$:

$$q(x) = \sup_{n \geq 0} \left(\frac{x^n}{M_n} \right)$$

et de réécrire (40) sous la forme :

$$q(x) \leq \frac{a}{|F(x)|}, \quad x \geq 0. \quad (41)$$

Les relations (41) et (39) donnent alors $\left(\frac{1}{x^2} \leq \frac{2}{1+x^2} \text{ si } x \geq 1 \right)$:

$$\int_1^\infty \frac{\ln q(x)}{x^2} dx \leq 2 \left(C + \frac{\pi}{2} \ln a \right) =: \gamma < \infty. \quad (42)$$

L'essentiel est accompli, et il n'y a plus qu'à décoder la nouvelle information (42) pour voir qu'elle contient l'information $\sum_1^\infty \lambda_n < \infty$.

Pour cela, on pose $\mu_n = \frac{e}{\lambda_n}$ et on remarque que :

$$x \geq \mu_n \Rightarrow \ln q(x) \geq n. \quad (43)$$

En effet :

$$x \geq \mu_n \Rightarrow q(x) \geq \frac{x^n}{M_n} \geq \frac{e^n}{\lambda_n M_n} \geq e^n,$$

la dernière inégalité venant de la décroissance de la suite (λ_n) , qui implique que :

$$\lambda_n^n M_n \leq \lambda_1 \dots \lambda_n M_n = 1.$$

Les relations (42) et (43) entraînent, pour tout N entier ≥ 1 :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\mu_n}^{\mu_{n+1}} \frac{n}{x^2} dx + \int_{\mu_N}^\infty \frac{N}{x^2} dx &\leq \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\mu_n}^{\mu_{n+1}} \frac{\ln q(x)}{x^2} dx + \int_{\mu_N}^\infty \frac{\ln q(x)}{x^2} dx \\ &\leq \int_1^\infty \frac{\ln q(x)}{x^2} dx = \gamma, \end{aligned}$$

soit encore :

$$\sum_{n=1}^{N-1} n \left(\frac{1}{\mu_n} - \frac{1}{\mu_{n+1}} \right) + \frac{N}{\mu_N} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\mu_n} \leq \gamma,$$

autrement dit :

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n \leq e\gamma \quad \text{et} \quad \sum_1^\infty \lambda_n \leq e\gamma,$$

en faisant tendre N vers $+\infty$. \diamond

Dans l'encadré du paragraphe 5.1, on a mentionné le principe d'incertitude d'Heisenberg, qui dit que, si f n'est pas identiquement

nulle, f et \hat{f} ne peuvent être très petits tous les deux ; ce principe peut s'exprimer sous plusieurs formes, en voici une *frappante* due à Hardy [1].

Théorème 13 (version Hardy du principe d'incertitude d'Heisenberg). Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que :

$$|f(x)| \leq M e^{-\alpha x^2} \quad \text{et} \quad |\hat{f}(x)| \leq M e^{-\beta x^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, où M, α, β sont des constantes > 0 . Alors :

- a) si $\alpha\beta < \pi^2$, il y a une infinité de telles fonctions f non nulles ;
- b) si $\alpha\beta = \pi^2$, f et \hat{f} sont des multiples de $f_0(x) = e^{-\pi x^2}$;
- c) si $\alpha\beta > \pi^2$, si f est identiquement nulle ;
- d) en particulier, si f et \hat{f} sont à support compact : $f = 0$.

Preuve schématique. \diamond

a) Soit h_n la fonction d'Hermite du théorème 8c.

$$h_n(x) = e^{-\pi x^2} H_n(x),$$

où H_n est un polynôme ; donc, pour $0 < \delta < \pi$, on peut trouver une constante C_δ telle que :

$$|h_n(x)| \leq C_\delta e^{-\delta x^2}$$

et on aura de même :

$$|\widehat{h}_n(x)| \leq C_\delta e^{-\delta x^2}$$

puisque $\widehat{h}_n = \phi h_n = i^{-n} h_n$.

Choisissons : $\delta = \sqrt{\alpha\beta} < \pi$

et : $f_n(x) = h_n(bx)$, où $b = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/4}$;

alors : $\delta b^2 = \alpha, \delta b^{-2} = \beta$

et : $|f_n(x)| \leq C_\delta e^{-\delta b^2 x^2} = C_\delta e^{-\alpha x^2}$

de même :

$$|\widehat{f}_n(x)| = \frac{1}{b} |\widehat{h}_n\left(\frac{x}{b}\right)| \leq \frac{1}{b} C_\delta e^{-\delta b^{-2} x^2} = \frac{1}{b} C_\delta e^{-\beta x^2}.$$

Les fonctions f_1, f_2, \dots, f_n vérifient donc les deux inégalités demandées, avec :

$$M = \max(C_\delta, C_\delta/b).$$

On voit, au passage, que seul compte le produit $\alpha\beta$, et, dans la suite, on supposera $\alpha = \beta$.

b) $\alpha = \beta = \pi$; c'est la partie cruciale de la preuve, et on y exploite la théorie des fonctions holomorphes sous la forme du lemme suivant (admis [1]).

Lemme 2 (lemme de Phragmén-Lindelöf). Soit

$$S_\delta = \{z = r e^{i\theta} ; r > 0, 0 < \theta < \delta\}$$

un secteur angulaire d'ouverture $\delta < \pi$ (figure 7) et soit g holomorphe dans S_δ et continue sur sa fermeture \overline{S}_δ .

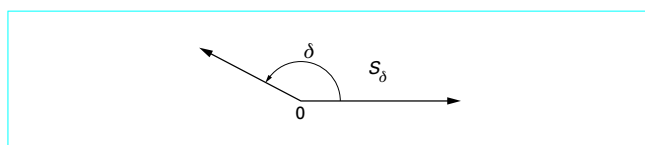


Figure 7 – Lemme de Phragmén-Lindelöf pour un secteur angulaire

On suppose que :

$$|g(z)| \leq M \text{ si } z \text{ est sur la frontière de } S_\delta$$

et que

$$|g(z)| \leq a e^{b|z|} \text{ si } z \text{ est dans } S_\delta,$$

où a, b, M sont des constantes > 0 .

Alors :

$$|g(z)| \leq M \text{ pour tout } z \text{ dans } S_\delta.$$

On peut passer au champ complexe par la formule :

$$\hat{f}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi tz} f(t) dt$$

grâce à l'hypothèse $|f(t)| \leq M e^{-\pi t^2}$; \hat{f} devient alors une fonction holomorphe dans \mathbb{C} tout entier, telle que :

$$|\hat{f}(z)| \leq M e^{\pi(\operatorname{Im}z)^2}. \tag{44}$$

En effet :

$$|\hat{f}(z)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2i\pi tz}| |f(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi t \operatorname{Im}z} M e^{-\pi t^2} dt = M e^{\pi(\operatorname{Im}z)^2}$$

D'autre part, les parties paire et impaire vérifient les mêmes hypothèses de décroissance que f . On peut donc supposer f paire ; \hat{f} est alors paire aussi et s'écrit :

$$\hat{f}(z) = \sum_0^\infty c_n z^{2n}$$

soit encore

$$\hat{f}(z) = \varphi(z^2).$$

où

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty c_n z^n.$$

En termes de φ , les hypothèses de croissance sur \hat{f} deviennent :

$$|\varphi(r e^{i\theta})| \leq M e^{\pi r} \tag{45}$$

$$|\varphi(r)| \leq M e^{-\pi r} \tag{46}$$

Si l'on écrit $r e^{i\theta} = w^2$ la relation (44) donne

$$|\varphi(r e^{i\theta})| = |\varphi(w^2)| = |\hat{f}(w)| \leq M e^{\pi|w|^2} = M e^{\pi r},$$

ce qui prouve la relation (45).

On a, de même :

$$|\varphi(r)| = |\hat{f}(\sqrt{r})| \leq M e^{-\pi r}$$

par hypothèse, ce qui prouve la relation (46).

On a un excellent contrôle de φ sur la demi-droite $z = r \geq 0$ et un contrôle moyen sur les demi-droites $z = r e^{i\theta}$; ce contrôle va s'auto-renforcer à l'aide du lemme 2 sous la forme :

$$|\varphi(r e^{i\theta})| \leq M \exp(-\pi r \cos \theta). \tag{47}$$

Soit en effet :

$$g(z) = \exp(\lambda e^{i\alpha} z) \varphi(z)$$

dans le secteur S_δ , où les paramètres réels α et λ vont être ajustés pour que $|g(z)|$ soit $\leq M$ sur la frontière de S_δ . Or :

$$|g(r)| = \exp(\lambda \cos \alpha r) |\varphi(r)| \leq M \exp(r(\lambda \cos \alpha - \pi)).$$

On prend donc :

$$\lambda = \frac{\pi}{\cos \alpha};$$

D'autre part :

$$|g(r e^{i\delta})| = \exp(\lambda \cos(\alpha + \delta)r) |\varphi(r e^{i\delta})| \leq M \exp(r(\lambda \cos(\alpha + \delta) + \pi)),$$

et on prend donc :

$$\lambda = \frac{-\pi}{\cos(\alpha + \delta)}.$$

La compatibilité de ces deux équations impose

$$\cos(\alpha + \delta) = -\cos \alpha,$$

soit par exemple :

$$\alpha = \frac{\pi - \delta}{2}$$

et

$$\lambda = \frac{\pi}{\cos \alpha} = \frac{\pi}{\sin(\delta/2)}.$$

En outre, $|g(z)| \leq M \exp((\pi + \lambda)|z|)$, donc le lemme 2 entraîne $|g(z)| \leq M$ pour $z \in S_\delta$.

Fixons maintenant $z = r e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

Pour δ assez voisin de π , on a $z \in S_\delta$, d'où :

$$|g(r e^{i\theta})| = \exp(\lambda \cos(\alpha + \theta)r) |\varphi(r e^{i\theta})| \leq M.$$

Quand $\delta \xrightarrow{<} \pi$, $\alpha \rightarrow 0$ et $\lambda \rightarrow \pi$; l'inégalité précédente donne donc à la limite :

$$\exp(\pi r \cos \theta) |\varphi(r e^{i\theta})| \leq M.$$

La relation (47) est ainsi prouvée pour $0 < \theta < \pi$ et par continuité pour $0 \leq \theta \leq \pi$.

On obtiendrait de même le cas $-\pi \leq \theta \leq 0$. Mais alors, la fonction holomorphe $h(z) = e^{\pi z} \varphi(z)$ est constante ; en effet :

$$|h(r e^{i\theta})| = e^{\pi r \cos \theta} |\varphi(r e^{i\theta})| \leq M$$

d'après (47) et h est bornée, donc constante d'après le théorème de Liouville :

$$h(z) = C,$$

d'où :

$$\varphi(z) = C e^{-\pi z}, \hat{f}(z) = \varphi(z^2) = C e^{-\pi z^2},$$

et finalement :

$$f(x) = \hat{f}(x) = C e^{-\pi x^2}$$

c) Si $\alpha = \beta > \pi$, on a, en particulier :

$$|f(x)| \leq M e^{-\pi x^2} \text{ et } |\hat{f}(x)| \leq M e^{-\pi x^2}.$$

D'après le cas b, il existe une constante C telle que :

$$f(x) = C e^{-\pi x^2};$$

mais alors l'inégalité $|C| e^{-\pi x^2} \leq M e^{-\alpha x^2}$ pour tout x force $C = 0$.

d) Si f et \hat{f} sont à support compact, on peut trouver une constante $M > 0$ telle que :

$$|f(x)| \leq M e^{-2\pi x^2} \text{ et } |\hat{f}(x)| \leq M e^{-2\pi x^2}$$

(noter que $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi tx} \hat{f}(t) dt$ et que donc f est bornée).

D'après c), $f = 0$. ◇

7.2 Équation aux dérivées partielles elliptiques

Nous avons vu comment la transformation de Fourier était un outil puissant pour l'étude de l'équation aux dérivées partielles (en abrégé EDP) de la chaleur [AF 141], qui est une EDP dite parabolique. Voici une application spectaculaire [8] à un autre type d'équation, les EDP elliptiques. Nous nous contenterons ici d'énoncer le résultat, car la preuve, sans être extrêmement difficile, demande l'extension à plusieurs variables de la transformation de Fourier et l'introduction d'une échelle d'espaces intermédiaires entre l'espace L^2 et l'espace de Schwartz, à savoir les espaces de Sobolev H^s :

$$\mathcal{F} \subset H^s \subset L^2 \quad (0 \leq s \leq \infty).$$

Rappelons la notation multi-indicielle : si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un n -uplet d'entiers positifs, on pose :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{si } x = (x_1, \dots, x_n)$$

et

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

si f est une fonction de (x_1, \dots, x_n) .

Une EDP à coefficients constants dans \mathbb{R}^n est une EDP de la forme :

$$\sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha f = g \tag{48}$$

où N est un entier appelé le degré de l'équation, les c_α des constantes, g une fonction continue donnée et l'inconnue f étant cherchée parmi les fonctions de classes C^N . Le polynôme caractéristique de cette équation, tout à fait semblable au polynôme caractéristique de l'exemple du paragraphe 5.4, est le polynôme :

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| = N} c_\alpha \xi^\alpha i^{|\alpha|} \quad (\text{où } \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)) \tag{49}$$

(notons que P ne fait intervenir que les termes de plus haut degré de la relation (48)).

L'équation (48) est dite elliptique si :

$$\xi \in \mathbb{R}^n \text{ et } \xi \neq 0 \Rightarrow P(\xi) \neq 0. \tag{50}$$

En dimension 2, voici deux exemples d'équations elliptiques.

Exemples.

■ Premier exemple.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{équation de Cauchy-Riemann})$$

Ici $P(\xi_1, \xi_2) = i \xi_1 - \xi_2$ ne s'annule que si $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

■ Deuxième exemple.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0 \quad (\text{équation de Laplace})$$

Ici, $P(\xi_1, \xi_2) = -(\xi_1^2 + \xi_2^2)$ ne s'annule que si $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

Les solutions de ces deux exemples sont respectivement les fonctions holomorphes et harmoniques ; il est bien connu que ces fonctions sont de classe C^∞ et, en particulier, sont bien plus régulières

que ne le suppose a priori leur définition. Ce gain de régularité se généralise à toutes les équations elliptiques, sous la forme suivante.

Théorème 14 (théorème de régularité automatique). Soit

$$\sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha f = g \quad \text{une EDP elliptique et } p \text{ un entier } \geq n + 1.$$

Alors :

- a) si g est de classe C^p , toute solution f (a priori de classe C^N) est automatiquement de classe $C^{p+N-n-1}$;
- b) si g est C^∞ , en particulier si $g = 0$, toute solution f est automatiquement de classe C^∞ .

7.3 Présentation des ondelettes

Du point de vue des utilisateurs, en particulier du point de vue des spécialistes de traitement du signal, le principe d'incertitude, qui dit qu'il est difficile de localiser à la fois en temps ($f(t)$) et en espace ($f(x)$) est plutôt un inconvénient, car il ne permet pas de reconstruire le signal f à partir de sa transformée de Fourier \hat{f} observée sur un intervalle $[a, b]$ seulement. C'est pourquoi une autre théorie, la théorie des ondelettes, s'est beaucoup développée depuis une quinzaine d'années.

Une ondelette est une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que les fonctions :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k),$$

où j, k parcourant les entiers relatifs, forment une base orthonormale de l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

Un exemple type est l'ondelette de Haar H définie par (figure 8) :

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit que les fonctions :

$$H_{j,k}(t) = 2^{j/2} H(2^j t - k)$$

sont oscillantes comme le sont les exponentielles imaginaires e^{ixt} ; mais alors que ces exponentielles ne s'annulent jamais puisqu'elles sont de module 1, les $H_{j,k}$ s'annulent souvent et en particulier, si j est fixé et k varie, les $H_{j,k}$ sont à supports disjoints et ce fait jouait déjà un rôle essentiel dans la preuve de la continuité des trajectoires du mouvement brownien, bien avant le développement systématique de la théorie des ondelettes.

Dans cette nouvelle théorie (il y a aussi une version continue), la transformée de Fourier-Plancherel de $f \in L^2(\mathbb{R})$ est remplacée par sa transformée d'ondelettes (l'ondelette « mère » ψ étant fixée) :

$$\hat{f}(j, k) = (f / \psi_{j,k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt$$

et cette nouvelle transformée a au moins deux avantages.

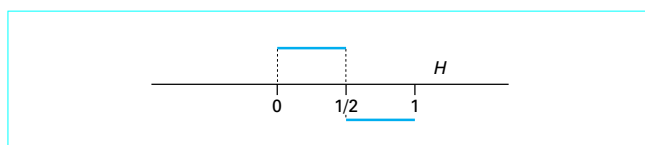


Figure 8 – Ondelette de Haar

a) Un **avantage numérique** : la nouvelle transformée \hat{f} se prête beaucoup mieux au traitement localisé du signal, en particulier aux problèmes de reconnaissance d'image (de voix...).

b) Un **avantage théorique** : quelquefois, le comportement de \hat{f} reflète **exactement** celui de f , ce qui n'est pratiquement jamais le cas (principe d'incertitude) avec la transformée de Fourier. Par exemple, si l'ondelette mère ψ est suffisamment régulière et si

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } 0 < \alpha \leq 1,$$

on peut affirmer ceci : f est höldérienne d'ordre α (c'est-à-dire $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$ si, et seulement si, sa transformée d'ondelettes $\hat{f}(j, k) = (f/\psi_{j, k})$ vérifie :

$$|\hat{f}(j, k)| \leq C' 2^{-j \frac{1+\alpha}{2}}.$$

Pour ce résultat, et pour plus de détails sur les ondelettes, nous renvoyons à [3], [6] et [9].

Il est juste d'ajouter, en conclusion, que la transformation de Fourier reste d'une grande utilité et d'une grande actualité dans de nombreux domaines : analyse fonctionnelle, probabilités, théorie des nombres, etc.

Références bibliographiques

- | | | |
|---|---|---|
| <p>[1] DYM (H.) et MC KEAN (H.P.). – <i>Fourier Series and Integrals</i>. Academic Press 1972.</p> <p>[2] FOLLAND (G.). – <i>Introduction to partial differential equations</i>. Princeton University Press 1976.</p> <p>[3] KAHANE (J.P.) et LEMARIE (P.G.). – <i>Séries de Fourier et ondelettes</i>. Cassini 1998.</p> | <p>[4] KATZNELSON (Y.). – <i>An Introduction to Harmonic Analysis</i>. Wiley and Sons 1968.</p> <p>[5] KENIG (C.) et TOMAS (P.). – <i>Maximal operators defined by Fourier multipliers</i>. <i>Studia Math.</i> 68 (1980), 79-83.</p> <p>[6] MEYER (Y.). – <i>Ondelettes</i>. Hermann 1990.</p> | <p>[7] RUDIN (W.). – <i>Real and Complex Analysis</i>. Mc Graw Hill 1987.</p> <p>[8] RUDIN (W.). – <i>Functional Analysis</i>. Mc Graw Hill 1992.</p> <p>[9] WOJTASZCZYK (P.). – <i>A Mathematical Introduction to Wavelets</i>. Cambridge University Press 1997.</p> |
|---|---|---|