الـــــدوال

تصميم الدرس

- تعريف
- التمثيل البياني لدالة في معلم
- اتـجـاه تغير دالة
- القيم الحدية لدالة
- الدالة الزوجية أو الفردية
- نسبة تزايد دالة
- دراسـة دالـة
- الدوال المرجعية
- تـمـاريـن و مشـكـلات
- الحلول

• تعريف:

D هو مجال أو اتحاد مجالات من R .

تعريف دالة f من D نحو R هو الإرفاق بكل عدد حقيقي x من D عددا حقيقيا وحيدا نرمز له بالرمز $f(x)$.

* D يسمى مجموعة تعريف الدالة f . * $f(x)$ تسمى صورة x بالدالة f .

* x يسمى سابقة $f(x)$ بالدالة f .

أمثلة :

1) إذا أرفقنا بالعدد الحقيقي x العدد الحقيقي $x^3 - 1$ نكون قد أنشأنا دالة f معرفة على R حيث : $f(x) = x^3 - 1$.

2) الدالة h المعرفة على R بالعبارة : $h(x) = 5x^2 - 3$ هي الدالة التي ترفق بالعدد الحقيقي x العدد الحقيقي : $5x^2 - 3$.

فمثلا : $h(-1) = 2$; $h(1) = 2$

وعليه السابقتين 1 ، - 1 لها نفس الصورة 2 .

3) الدالة φ المعرفة على R بالعبارة : $\varphi(x) = \sqrt{x}$ هي دالة معرفة من أجل $x \geq 0$ أي معرفة على R .

4) الدالة g المعرفة على R* بالعبارة : $g(x) = \frac{2}{x}$ معرفة من أجل $x \neq 0$ لأنه : لما x تكون = 0 $g(x)$ غير موجودة .

• التمثيل البياني لدالة في معلم:

المستوي منسوب إلى معلم $\left(o , \vec{i} , \vec{j} \right)$ ؛ f دالة ؛ D مجموعة تعريفها .

التمثيل البياني (C) للدالة f في هذا المعلم هو مجموعة النقط ذات الإحداثيات $\left(x , f (x) \right)$ حيث : $x \in D$. ونقول أن : $y = f (x)$ هي معادلة (C) .

• اتـجـاه تغير دالة :

f دالة ؛ I مجال محتوي في مجموعة تعريف f .

* نقول أن f متزايدة تماما على I إذا كان من أجل كل عنصرين x_1 , x_2 من I بحيث : $x_1 < x_2$ فإن : $f (x_1) < f (x_2)$.

* نقول أن f متناقصة تماما على I إذا كان من أجل كل عنصرين x_1 , x_2 من I بحيث : $x_1 < x_2$ فإن : $f (x_1) > f (x_2)$.

• القيم الحدية لدالة:

f دالة . I مجال محتوي في مجموعة تعريفها D . α هو عدد حقيقي من I .

- نقول أن $f(\alpha)$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f على I إذا كانت $f(\alpha)$ هي أصغر قيم الدالة f ؛ أي أنه من أجل كل عدد حقيقي x من I فإن $f(x) \geq f(\alpha)$

- نقول أن $f(\alpha)$ هي قيمة حدية كبرى للدالة f على I إذا كانت $f(\alpha)$ هي أكبر قيم الدالة f؛ أي أنه من أجل كل عدد حقيقي x من I فإن $f(x) \leq f(\alpha)$.

• الدالة الزوجية أو الفردية :

f دالة معرفة على D.(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

- تكون الدالة f زوجية إذا وفقط إذا كان من أجل أي عدد حقيقي x من D يكون:

$(-x) \in D$ و $f(-x) = f(x)$.

وتكون (C) متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب

- تكون الدالة f فردية إذا وفقط إذا كان من أجل أي عدد حقيقي x من D يكون :

$(-x) \in D$ و $f(-x) = f(x)$

وتكون (C) متناظرة بالنسبة للنقطة O .

• نسبة تزايد دالة:

f دالة معرفة على مجال D من R . x_1, x_2 عنصران من D .

النسبة المعرفة من أجل $x_1 \neq x_2$ بالعبارة : $\vartheta = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

تسمى نسبة تزايد الدالة f .

* تكون f متزايدة تماما إذا وفقط إذا كان : $\vartheta > 0$.

* تكون f متناقصة تماما إذا وفقط إذا كان : $\vartheta < 0$.

• دراسـة دالـة :

لدراسة دالة f نمر بالمراحل التالية :

1) مجموعة تعريف الدالة f . 2) دراسة فردية أو زوجية الدالة .

3) حساب نسبة التزايد واستنتاج اتجاه تغير الدالة .

4) إعطاء جدول التغيرات .

5) إعطاء جدول قيم مساعدة لرسم التمثيل البياني .

6) إنشاء البيان (c) للدالة f .

• الدوال المرجعية:

و هي الدوال التي يكثر استعمالها و منها نركب الدوال الأخرى ؛ ولذلك أدرجت في الآلة الحاسبة و نذكر منها :

$$x^2 \quad ; \quad \frac{1}{x} \quad ; \quad \sqrt{x} \quad ; \quad \sin x \quad ; \quad \text{Cos } x$$

• تـمـاريـن و مشـكـلات:

تمرين 1 :

يعطى جدول تغيرات الدالة كما يلي :

X	- 2		0		1		3
f	0	↗	1	↘	-1	↗	2

a – انطلاقا من هذا الجدول عين :

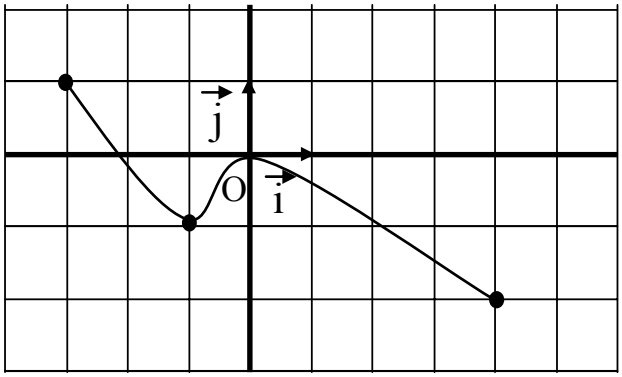
1) مجال تعريف الدالة f .

2) القيم الملاحظة للدالة f .

3) اتجاه تغير الدالة f .

b – انطلاقا من هذا الجدول أنشئ تمثيلا بيانيا يمكن أن يمثل الدالة f في معلم متعامد متجانس $\left(o , \vec{i} , \vec{j} \right)$.

تمرين 2 :



إليك التمثيل البياني لدالة f .

انطلاقا من التمثيل البياني للدالة f .

أكتب جدول التغيرات للدالة f معينا القيم الحدية للدالة f واتجاه تغيراتها .

تمرين 3 :

f دالة . أذكر صحة أم خطأ العبارات التالية :

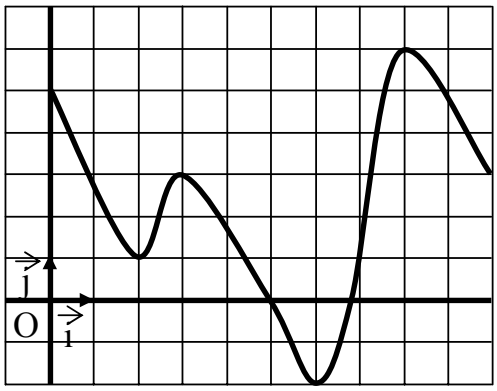
1) إذا كان : $f(1) < f(5)$ فإن f متزايدة تماما على المجال $[1 , 5]$.

2) إذا كانت f غير متزايدة على مجال فهي متناقصة على هذا المجال .

3) إذا كانت f متزايدة تماما على R فإنها متزايدة تماما على كل مجال D من R

4) إذا كانت f متناقصة تماما علي مجال D من R فهي متناقصة تماما علي R .

تمرين 4 :



إليك التمثيل البياني لدالة f :

أذكر صحة أم خطأ كل جملة مما يلي :

1) $f(0) = 5$

2) القيمة 3 لها سابقتين بالدالة f .

3) للمعادلة : $f(x) = 2$ أربعة حلول .

4) للمعادلة : $f(x) = 1$ أربعة حلول .

5) صورة العدد 5 هي 0 .

6) ليس للدالة f قيمة حدية في المجال $[0 , 10]$.

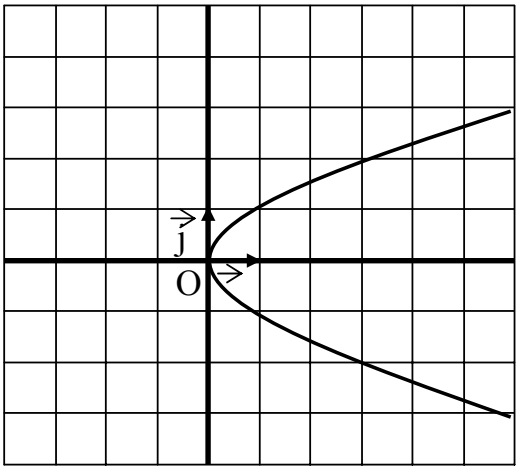
7) العدد 3 هو قيمة حدية كبرى للدالة f

في المجال $[2 , 5]$.

8) القيمة 2 - هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[0 , 10]$.

9) الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\ 0 \ , \ 10\ ]$.

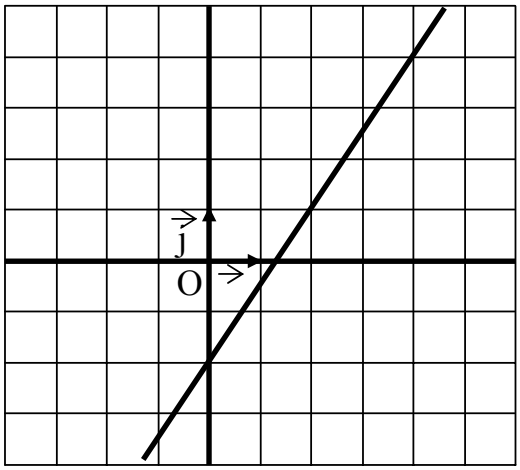
10) الدالة f متناقصة تماما على المجال $[\ 0 \ , \ 2\ ]$.



تمرين 5 :

إليك التمثيل البياني (C) الآتي :

هل (C) يمثل تمثيلا بيانيا لدالة ؟ علل .



تمرين 6 :

إليك تمثيلا بيانيا (C) لدالة .

أكتب معادلة المنحنى (C) .

تمرين 7 :

عين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة مما يلي :

1) $f(x) = x^3 - 1$

2) $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$

3) $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$

4) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 5}$

5) $f(x)=\sqrt{x-1}$ 6) $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x+2}$

7) $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x-4}}$ 8) $f(x)=\frac{5}{x^2-8x+16}$

9) $f(x)=\frac{5x}{x^2+1}$ 10) $f(x)=\sqrt{x^2-16}$

تمرين 8 :

عين الدوال الفردية و الزوجية من بين الدوال المعرفة كما يلي :

$f(x) = -7x$; $g(x) = 5x + 3$; $h(x) = x^2 - 16$

$j(x) = -x^2 + 3x$; $L(x) = \frac{-5}{x}$; $V(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

تمرين 9 :

أدرس اتجاه تغير كل من الدوال المعرفة كما يلي :

$f(x) = 3x - 5$; $g(x) = 3x^2$; $h(x) = \frac{1}{x}$

تمرين 10 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x) = -x^2 + 4x$

1- أدرس اتجاه تغير الدالة f .

2- أكمل الجدول الآتي :

x	4	3	2	0	-1
f (x)					

3- أنشئ المنحني (C) الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد متجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$

تمرين 11 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x)=\frac{a}{x}$ حيث : $a \in R^*$

1- عين مجموعة تعريف f .

2- عين a حتى يكون : $f(1) = -3$.

3- أدرس اتجاه تغير الدالة f من أجل القيمة a المحصل عليها .

4- أحسب ما يلي :

$f(1)$; $f(3)$; $f(6)$; $f(-1)$; $f(-3)$; $f(-6)$

5- أنشئ المنحني (C) الممثل لتغيرات f في معلم متعامد متجانس $\left(o , \vec{i} , \vec{j} \right)$.

تمرين 12 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي :

$f(x) = a x^2 + b x + c$ حيث : a , b , c أعداد حقيقية .

1- عين a , b , c علما أن الدالة f زوجية و تحقق : $f(-2) = 5$, $f(1) = 2$.

2- أدرس تغيرات الدالة f من أجل القيم a , b , c المحصل عليها

ثم أنشئ بيانها (C) في معلم متعامد متجانس $\left(o , \vec{i} , \vec{j} \right)$.

تمرين 13 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x) = \sqrt{x}$.

1- أدرس اتجاه تغير الدالة f .

2- أكمل حساب الجدول التالي :

x	0		3	
f (x)		2		1

3- أنشئ تمثيلا بيانيا للدالة f في معلم متعامد و متجانس $\left(o , \vec{i} , \vec{j} \right)$

تمرين 14 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x) = a x + b$ حيث: a , b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$.

1- أدرس اتجاه تغير الدالة f .

2- أنشئ (C) تمثيلها البياني من أجل : $a = -2$ و $b = 1$.

3- حل بيانيا المتراجحة : $f(x) < 2$.

تمرين 15 :

1- أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x) = \cos x$

على المجال $[0 , \pi]$.

2- بين أن الدالة f زوجية على R .

3- أنشئ تمثيلا بيانيا للدالة f على المجال $[-\pi , \pi]$ في معلم متعامد متجانس $\left(o , \vec{i} , \vec{j} \right)$.

تمرين 16 :

1- أدرس تغيرات الدالة g المعرفة بالعبارة : $g(x) = \sin x$ على المجال $[0, \pi]$.

2- بين أن الدالة g فردية على R .

3- أنشئ تمثيلا بيانيا (C) للدالة g على المجال $[-\pi, \pi]$ في معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

تمرين 17 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بالعبارة : $f(x) = |x|$.

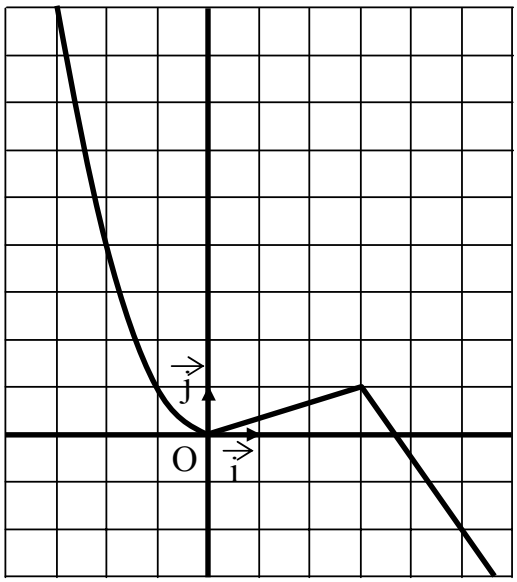
1- أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم أنشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

تمرين 18 :

إليك التمثيل البياني لدالة f :

- أكتب معادلات المنحني (Γ) الممثـل لتغيرات الدالة f على R .



تمرين 19 :

في معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر (C) , (D) , (Δ) التمثيلات البيانية للدوال : h , g , f

حيث : $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{-1}{4}x + 1$; $h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

1) أنشئ (C) ; (D) ; (Δ) باستعمال قيم مساعدة في مجموعات تعريفها .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم فإن :

$$f(x) - g(x) = \frac{(x-2)^2}{4x}$$

حل حسابيا المتراجحة : $f(x) \geq g(x)$

3) حل بيانيا المتراجحة : $f(x) \geq g(x)$

4) لتكن A نقطة تقاطع (D) و (Δ) .

- بين أن A نقطة من (C) .
- بين أن المعادلة : $f(x) = h(x)$ تعني أن : $(x+1)(x-2) = 0$
- استنتج النقطة الثانية G لتقاطع (C) و (Δ) .

5) المستقيم (D) يقطع محوري المعلم في النقطتين B و C والمستقيم (Δ) يقطع المحورين في E و F .

- عين احداثيي E , F , C , B .
- بين أن A منتصف القطعة $[BC]$.

وأن للقطعتين $[EF]$ و $[AG]$ نفس المنتصف .

تمرين 20 :

f دالة عددية معرفة كما يلي : $f(x) = 2(x-1)^2$

1 – بين أن f متزايدة تماما على المجال $[1 , +\infty[$.

ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty , 1]$.

2 – عين قيمة حدية صغرى للدالة f .

3 – أكمل الجدول الآتي :

x	- 1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
f (x)							

أنشئ (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $(o , \vec{i} , \vec{j})$.

• الحـلـــــول:

تمرين 1 :

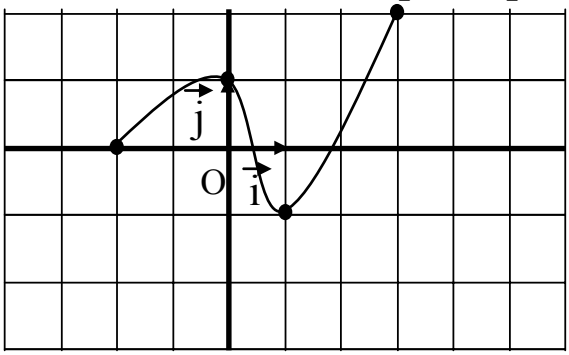
a) 1) $D_f = [-2, 3]$

2) القيم الملاحظة هي : 2 - ، 0 ، 1 ، 3 .

3) الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-2, 0]$ و $[1, 3]$.

ومتناقصة تماما على المجال : $[0, 1]$.

b) التمثيل البياني :



تمرين 2 :

X	- 3	-1	0	4
f	1 ↘	-1 ↗	0 ↘	-2

- جدول التغيرات :

- القيم الحدية للدالة هي :

* 1 هي قيمة حدية كبرى في المجال $[-3, 4]$.
* 2- هي قيمة حدية صغرى في المجال $[-3, 4]$.
* 0 هي قيمة حدية كبرى في المجال $[-1, 4]$.
* 1 هي قيمة حدية صغرى في المجال $[-1, -3]$.

- اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين : $[-3, 1]$ و $[0, 4]$.

ومتزايدة تماما على المجال $[-1, 0]$.

تمرين 3 :

1) خ 2) خ 3) ص 4) خ

تمرين 4 :

1) ص 2) خ 3) ص 4) ص 5) ص

6) خ 7) ص 8) ص 9) خ 10) ص

تمرين 5 :

(C) ليس تمثيلا بيانيا لدالة لأن العدد 3 مثلا يـرتبط بعنصرين هما 2 ، 2 - .

تمرين 6 :

(C) هي عبارة عن مستقيم وبالتالي معادلتهما : $f(x) = ax + b$

النقطتان $M_1(0, -2)$; $M_2(2, 1)$ تنتميان إلى (C) .

وعليه : $f(0) = -2$ و $f(2) = 1$.

وهذا يعني أن : $\begin{cases} a(0) + b = -2 \\ a \times 2 + b = 1 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} b = -2 \\ 2a - 2 = 1 \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} b = -2 \\ a = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ إذن : $\boxed{f(x) = \dfrac{3}{2}x - 2}$.

تمرين 7 :

1) $D_f = R$

2) $D_f = R$

3) $D_f = R^*$

4) تكون f معرفة إذا وفقط إذا كان : $x^2 - 5 \neq 0$

أي : $x^2 \neq 5$ وعليه : $x \neq \sqrt{5}$ وَ $x \neq -\sqrt{5}$

إذن : $D_f = \mathbb{R} - \{ -\sqrt{5} , \sqrt{5} \}$

5) تكون f معرفة إذا وفقط إذا كان : $x - 1 \geq 0$

وعليه : $x \geq 1$ ومنه : $D_f = [1, +\infty[$

6) تكون f معرفة إذا وفقط إذا كان : $x \neq 0$ و $x + 2 \geq 0$

أي : $x \neq 0$ و $x \geq -2$ ومنه : $D_f = [-2, 0[\cup]0, +\infty[$

7) يكون f معرفة إذا وفقط إذا كان : $x - 4 > 0$ وعليه : $x > 4$

إذن : $D_f =]4, +\infty[$

8) تكون f معرفة إذا وفقط إذا كان : $x^2 - 8x + 16 \neq 0$

أي : $(x-4)^2 \neq 0$ وعليه : $x - 4 \neq 0$

وبالتالي : $x \neq 4$ إذن : $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$

9) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ لأن : $x^2 + 1 \neq 0$ وعليه : $D_f = \mathbb{R}$

10) تكون f معرفة إذا وفقط إذا كان : $x^2 - 16 \geq 0$ وعليه :

x	$-\infty$	-4		4	$+\infty$
$x^2 - 16$	+	0	- - -	0	+

إذن : $D_f =]-\infty, -4] \cup [4, +\infty[$

تمرين 8 :

تعيين الدوال الزوجية و الفردية :

1) لدينا : $f(x) = -7x$. $D =]-\infty, +\infty[$.

من أجل $x \in D$: $-x \in D$ وَ $f(-x) = -7(-x) = 7x = -f(x)$

و منه f دالة فردية .

2) لدينا : $g(x) = 5x + 3$. $D =]-\infty, +\infty[$.

من أجل $x \in D$: $-x \in D$ وَ $g(-x) = 5(-x) + 3 = -5x + 3$

لدينا : $g(-x) \neq -g(x)$ و منه g ليست فردية .

لدينا : $g(-x) \neq g(x)$ و منه g ليست زوجية .

3) لدينا : $h(x) = x^2 - 16$. $D =]-\infty, +\infty[$.

من أجل $x \in D$: $-x \in D$ وَ $h(-x) = (-x)^2 - 16 = x^2 - 16 = h(x)$ و منه h دالة زوجية .

4) لدينا : $j(x) = -x^2 + 3x$. $D =]-\infty, +\infty[$.

من أجل $x \in D$: $-x \in D$ وَ $j(-x) = -(-x)^2 + 3x = -x^2 + 3x$

لدينا : $j(-x) \neq -j(x)$ و منه j ليست فردية .

لدينا : $j(-x) \neq j(x)$ و منه j ليست زوجية .

5) لدينا : $L(x) = \dfrac{-5}{x}$. $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

من أجل $x \in D$: $-x \in D$ وَ $L(-x) = \frac{-5}{-x} = -\frac{-5}{x} = -L(x)$

و منه : L دالة فردية .

6) لدينا : $V(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$. $D =]-\infty , +\infty[$.

من أجل $x \in D$: $-x \in D$ وَ

$$V(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+4} = \frac{x^2}{x^2+4} = V(x)$$

و منه V دالة زوجية.

تمرين 9 :

1) لدينا : $f(x) = 3x - 5$. $D =]-\infty , +\infty[$.

من أجل : $x_1 \in D , x_2 \in D$ وَ $x_1 \neq x_2$ لدينا :

$$\vartheta = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{3x_1-5-3x_2+5}{x_1-x_2} = \frac{3(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = 3$$

و منه : $\vartheta > 0$ و بالتالي : f دالة متزايدة تماماً على D .

2) لدينا : $g(x) = 3x^2$. $D =]-\infty , +\infty[$.

من أجل : $x_1 \in D , x_2 \in D$ وَ $x_1 \neq x_2$ لدينا :

$$\vartheta = \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{3(x_1)^2+3-3(x_2)^2-3}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{3(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2} = 3(x_1+x_2)$$

لما $x_1 \geq 0$ وَ $x_2 \geq 0$: $\vartheta > 0$ و منه g متزايدة تماما .

لما $x_1 \leq 0$ وَ $x_2 \leq 0$: $\vartheta < 0$ و منه g متناقصة تماما .

الدالة g متزايدة تماما على $[0 , +\infty[$ وَ متناقصة تماما على $]-\infty , 0]$.

3) لدينا : $h(x)=\frac{1}{x}$. $D=]-\infty\ ,\ 0[\cup]0\ ,\ +\infty[$

من أجل : $x_1\in D\ ,\ x_2\in D$ وَ $x_1\neq x_2$ لدينا :

$$\vartheta=\frac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{x_1-x_2}=\frac{\frac{x_2-x_1}{x_1\times x_2}}{x_1-x_2}=\frac{-1}{x_1\times x_2}$$

لما $x_1>0$ وَ $x_2>0$: $\vartheta<0$ و منه h متناقصة تماما.

لما $x_1<0$ وَ $x_2<0$: $\vartheta<0$ و منه h متناقصة تماما.

الدالة h متناقصة تماما على كل من المجالين : $]0\ ,\ +\infty[$; $]-\infty\ ,\ 0[$.

تمرين 10 :

لدينا : $f(x)=-x^2+4x$

1) دراسة التغيرات : * $D=]-\infty\ ,\ +\infty[$

- من أجل : $x_1\in D\ ,\ x_2\in D$ وَ $x_1\neq x_2$ لدينا :

$$\vartheta=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(-x_1^{\,2}+4x_1)-(-x_2^{\,2}+4x_2)}{x_1-x_2}$$

$$\vartheta=\frac{-x_1^{\,2}+4x_1+x_2^{\,2}-4x_2}{x_1-x_2}=\frac{-(x_1^{\,2}-x_2^{\,2})+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)[-(x_1+x_2)+4]}{x_1-x_2}=-(x_1+x_2)+4$$

ومنه : $\vartheta=(-x_1+2)+(-x_2+2)$

- لما $-x_1+2\geq 0$ أي $x_1\leq 2$ وَ $-x_2+2\geq 0$ أي $x_2\leq 2$

فإن : $\vartheta\geq 0$ و منه f متزايدة تماما على المجال $]-\infty\ ,\ 2]$.

- لما $-x_1+2\leq 0$ أي $x_1\geq 2$ وَ $-x_2+2\leq 0$ أي $x_2\geq 2$

فإن : $\vartheta\leq 0$ و منه f متناقصة تماما على المجال $[2\ ,\ +\infty[$.

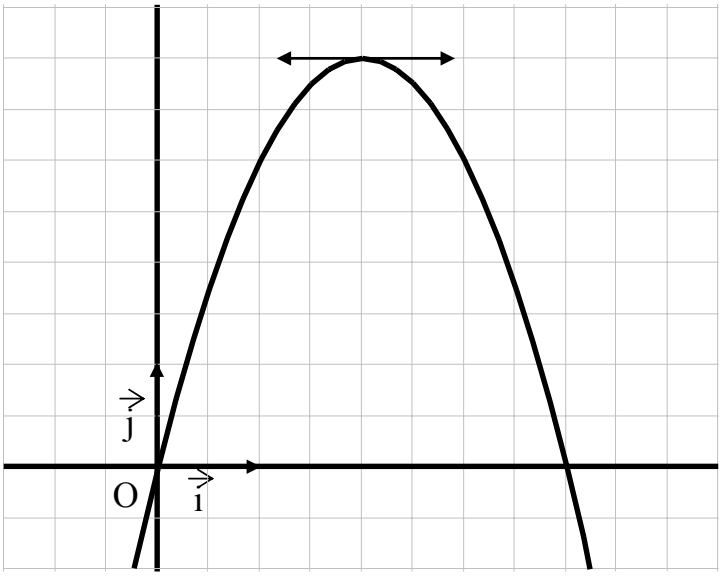
- جدول التغيرات

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)	↗	4	↘

2) إكمال الجدول :

x	- 1	0	2	3	4
f(x)	- 5	0	4	3	0

3) إنشاء المنحني (C) :



تمرين 11 :

لدينا : $f(x)=\dfrac{a}{x}$

1) مجموعة التعريف : $D=]-\infty\ ,\ 0[\cup]0\ ,\ +\infty[$.

2) تعيين a بحيث : $f(1)=-3$

لدينا : $f(1)=\dfrac{a}{1}=a$ ومنه : $a=-3$ و بالتالي : $f(x)=\dfrac{-3}{x}$.

3) دراسة التغيرات :

- من أجل : $x_1\in D\ ,\ x_2\in D$ وَ $x_1\neq x_2$ لدينا :

$$\vartheta = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\frac{-3}{x_1}-\frac{-3}{x_2}}{x_1-x_2} = \frac{\frac{-3x_2+3x_1}{x_1\times x_2}}{x_1-x_2} = \frac{3}{x_1\times x_2}$$

لما $x_1>0$ وَ $x_2>0$: $\vartheta>0$ و منه f متزايدة تماما .

لما $x_1<0$ وَ $x_2<0$: $\vartheta>0$ و منه f متزايدة تماما .

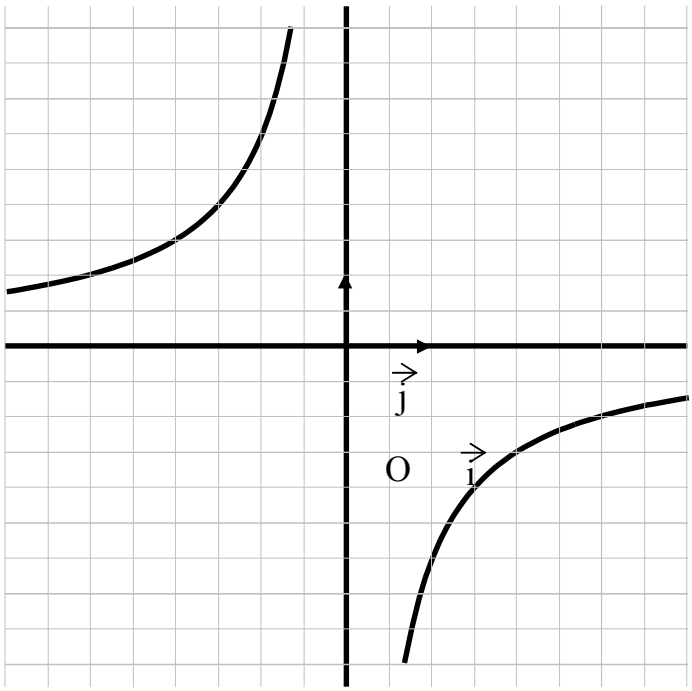
- جدول التغيرات :

X	- ∞	0	+ ∞
f(x)	↗	↗	

4) الحساب : $f(1) = -3$; $f(3) = -1$; $f(6) = \frac{-1}{2}$

$f(-1) = 3$; $f(-6) = \frac{1}{2}$

5) إنشاء البيان :



تمرين 12 :

1) تعيين a , b , c :

* f زوجية تعني أنه من أجل كل $x \in D$: $-x \in D$ وَ $f(-x) = f(x)$

لدينا : $D =]-\infty , +\infty[$ وَ $f(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c$

ومنه : $f(-x) = a x^2 - b x + c$ إذن : $f(-x) = f(x)$ تعني أن :

$a x^2 - b x + c = a x^2 + b x + c$ أي : $-b x = b x$

ومنه : $2bx = 0$ أي : $\boxed{b = 0}$ إذن : $f(x) = a x^2 + c$

* بما أن : $f(1) = 2$ فإن : $a(1)^2 + c = 2$ أي : $a + c = 2$ ... (1)

وبما أن : $f(-2) = 5$ فإن : $(-2)^2 + c = 5$ أي : $4a + c = 5$ ... (2)

نطرح (1) من (2) نجد : $3a = 3$ و منه : $\boxed{a = 1}$.

بالتعويض في (1) نجد : $1 + c = 2$ و منه : $\boxed{c = 1}$.

إذن : $f(x) = x^2 + 1$.

2) دراسة تغيرات f :

- من أجل : $x_1 \in D , x_2 \in D$ وَ $x_1 \neq x_2$ لدينا :

$$\vartheta = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1^2 + 1) - (x_2^2 + 1)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$$

لما $x_1 \geq 0$ وَ $x_2 \geq 0$: $\vartheta > 0$ و منه f متزايدة تماما.

لما $x_1 \leq 0$ وَ $x_2 \leq 0$: $\vartheta < 0$ و منه f متناقصة تماما.

الدالة f متزايدة تماما على $[0 , +\infty[$ وَ متناقصة تماما على $]-\infty , 0]$.

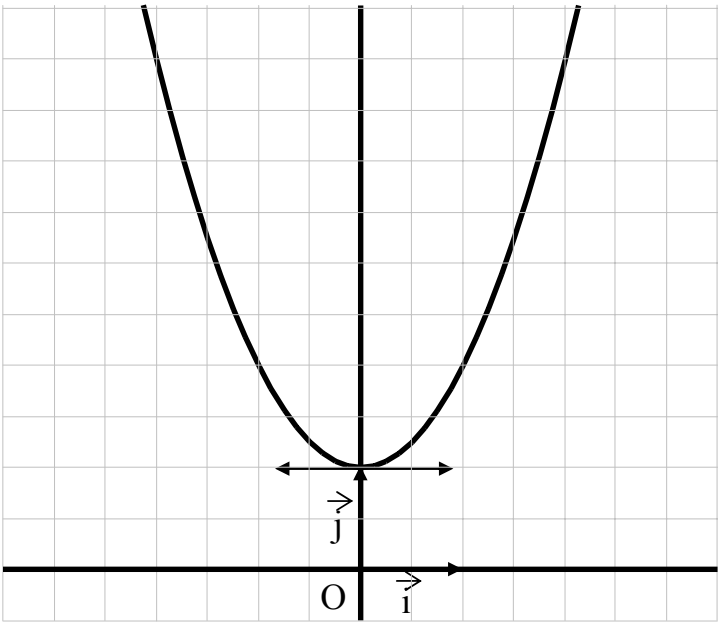
- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f (x)	↘		0	↗	

- قيم مساعدة لرسم المنحني :

x	-2	-1	0	1	2
F(x)	5	2	1	2	5

- رسم المنحني :



تمرين 13 :

1) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

* $D_f = [\ 0\ ,+\infty\ [$ لأن الدالة معرفة من أجل $x \geq 0$.

* نسبة التزايد : من أجل أي عددين x_1 , x_2 حيث : $x_1 \neq x_2$

لدينا : $\vartheta = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ وعليه : $\vartheta = \dfrac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{x_1 - x_2}$

ومنه :

$$\vartheta = \frac{\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)}{\left(x_1 - x_2\right)\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)} = \frac{x_1 - x_2}{\left(x_1 - x_2\right)\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)}$$

إذن : $\vartheta = \dfrac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$ وعليه : $\vartheta > 0$

إذن f متزايدة تماما على D_f .

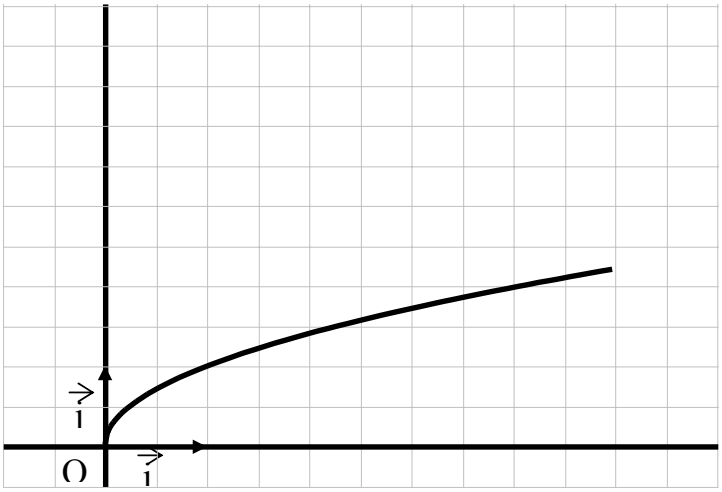
* جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
f(x)	0	

2) إكمال الجدول :

x	0	4	3	1
f(x)	0	2	$\sqrt{3}$	1

3) إنشاء (C) :



تمرين 14 :

1) اتجاه تغير الدالة f : $D_f = R^*$

* من أجل كل عددين حقيقيين x_1 , x_2 من R بحيث : $x_1 \neq x_2$

لدينا : $$\vartheta = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

وعليه :

$$\vartheta = \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a$$

إذن : إذا كان $a > 0$ فإن $\vartheta > 0$ وعليه f متزايدة تماما .

وإذا كان $a < 0$ فإن $\vartheta < 0$ وعليه f متناقصة تماما .

من أجل : $a > 0$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
f(x)	↗

من أجل : $a < 0$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
f(x)	↘

2) إنشاء (C) من أجل $a = -2$; $b = 1$: $f(x) = -2x + 1$

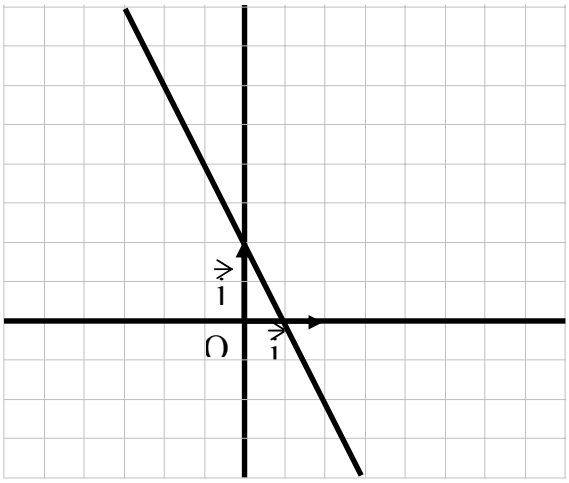
لدينا $a < 0$ وعليه يكون جدول التغيرات كما يلي :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
f(x)	↘

قيم مساعدة لرسم (C) :

x	0	-1
f(x)	1	3

رسم المنحني (C) :



تمرين 15 :

* دراسة تغيرات f : $f(x) = \cos x$

من خلال الدائرة المثلثية نلاحظ أنه من أجل أي عددين x_1 , x_2 من $[0 , \pi]$

إذا كان: $x_1 < x_2$ فإن : $f(x_1) > f(x_2)$

وعليه الدالة f متناقصة تماما على $[0 , \pi]$.

x	0	π
f(x)	1	- 1

- نبين أن f زوجية على R :

لدينا : من أجل أي عدد حقيقي x من R يكون

$-x \in R$ وَ $\cos(-x) = \cos x$.

وعليه : $f(-x) = f(x)$

ومنه : f زوجية .

- إنشاء التمثيل البياني للدالة f :

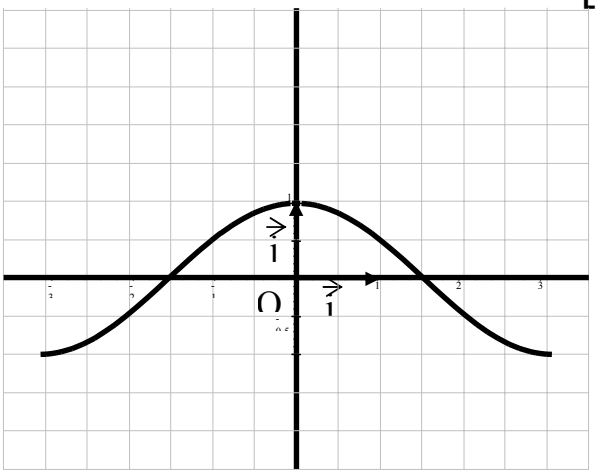
* قيم مساعدة من المجال $[0 , \pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
Cos x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	- 1

* الإنشاء على $[0 , \pi]$.

وبما أن الدالة f زوجية فإن (C) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب .

وعليه نستنتج (C) على $[-\pi , \pi]$.



تمرين 16 :

- دراسة تغيرات g حيث : $g(x) = \sin x$

من خلال الدائرة المثلثية نلاحظ أنه :

إذا كان : x_1 , x_2 عنصران من $\left[0 , \frac{\pi}{2} \right]$ بحيث : $x_1 < x_2$

فإن : $\sin x_1 < \sin x_2$ وعليه g متزايدة تماما على $\left[0 , \frac{\pi}{2} \right]$

وإذا كان : x_1 , x_2 عنصران من $\left[\frac{\pi}{2} , \pi \right]$ بحيث : $x_1 < x_2$

فإن : $\sin x_1 > \sin x_2$ وعليه g متناقصة تماما على $\left[\frac{\pi}{2} , \pi \right]$.

ومنه جدول التغيرات هو :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f(x)	0	↗	1	↘	0

- نبين أن g فردية على R :

لدينا : من أجل أي عدد حقيقي x من R

يكون : $-x \in R$ وَ $\sin(-x) = -\sin x$.

وعليه : $f(-x) = -f(x)$ ومنه f فردية .

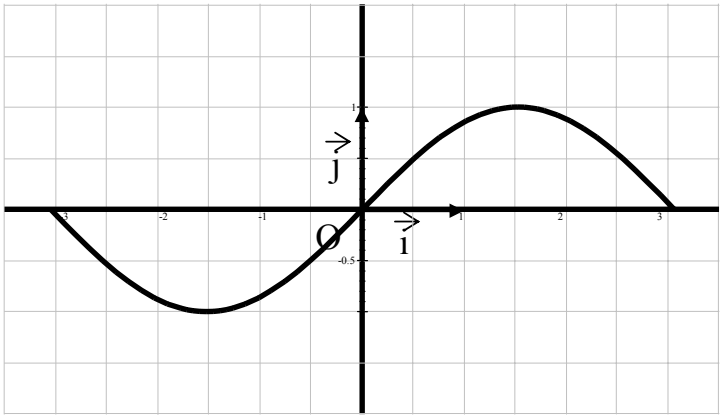
- إنشاء التمثيل البياني للدالة :

* قيم مساعدة من المجال $[0 , \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
Sin x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0

- الإنشاء على $[0 , \pi]$:

(C) متناظر بالنسبة إلى النقطة O وعليه نستنتج (C) على $[-\pi , \pi]$



تمرين 17 :

$D_f = R$

1) لدينا :

$$\begin{cases} f(x) = x \ , x \geq 0 \\ f(x) = -x \ , x \leq 0 \end{cases}$$

2) دراسة التغيرات :

من أجل $x \geq 0$: الدالة f متزايدة تماما

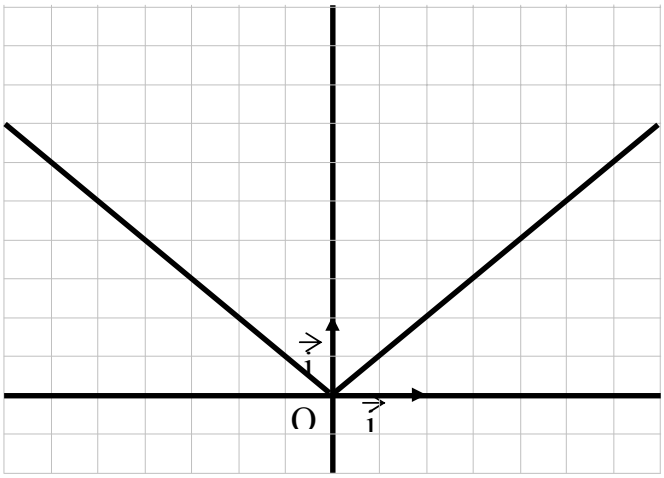
و من أجل $x \leq 0$: الدالة f متناقصة تماما

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘		↗

قيم مساعدة :

x	- 2	-1	0	1	2
f (x)	+ 2	1	0	1	2

التمثيل البياني :



تمرين 18 :

معادلات (Γ)

* في المجال $(\Gamma) :]-\infty, 0]$

فرع من قطع مكافئ و عليه : $f(x) = ax^2$

ولدينا : $f(0) = 0 \quad ; \quad f(-2) = 4 \quad ; \quad f(-3) = 9$

وبالتالي : $a = 1$ إذن : $f(x) = x^2$

* في المجال : $(\Gamma) : [0, 3]$ هي قطعة مستقيمة

وعليه معادلتها : $f(x) = ax + b$ وَ $x \in [0,3]$.

بما أن : $f(0) = 0$ وَ $f(3) = 1$ فإن : $b = 0$ وَ $a = \frac{1}{3}$.

ومنه : $f(x) = \frac{1}{3}x$.

* في المجال $(\Gamma) : [3, +\infty[$ هي نصف مستقيم

وعليه معادلته : $f(x) = \alpha x + \beta$ مع : $x \in [3, +\infty[$

لكن : $f(3) = 1$ وَ $f(5) = -2$

ومنه : $3\alpha + \beta = 1$ وَ $5\alpha + \beta = -2$ وبالطرح نجد : $2\alpha = -3$

وعليه : $\alpha = \frac{-3}{2}$ ومنه : $\beta = \frac{11}{2}$ وعليه : $f(x) = \frac{-3}{2}x + \frac{11}{2}$

وبالتالي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & , \quad x \in]-\infty, 0] \\ f(x) = \frac{1}{3}x & , \quad x \in [0, 3] \\ f(x) = \frac{-3}{2}x + \frac{11}{2} & , \quad x \in [3, +\infty[\end{cases}$$

تمرين 19 :

1) إنشاء (C) , (D) , (Δ) :

* جدول القيم المساعدة لإنشاء (C) : $f(x) = \frac{1}{x}$ ؛ $D_f = R$

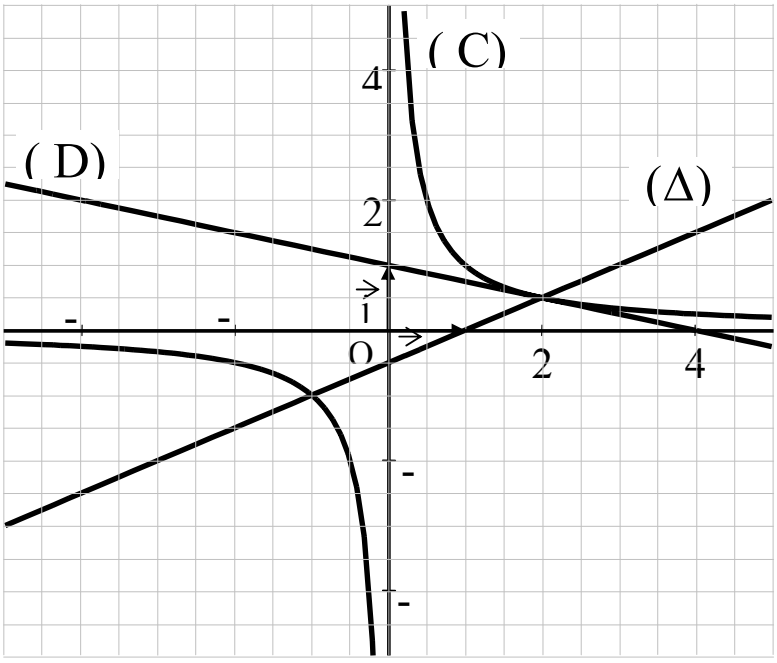
x	- 2	- 1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
f (x)	$\frac{-1}{2}$	- 1	- 2	2	1	$\frac{1}{2}$

* جدول القيم المساعدة لإنشاء (D) : $g(x) = \frac{-1}{4}x + 1$ ؛ $D_g = R$

x	0	2
g (x)	1	$\frac{1}{2}$

* جدول القيم المساعدة لإنشاء (Δ) : $h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ؛ $D_h = R$

x	0	2
h (x)	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$



2) * نبين أن : $f(x)-g(x)=\dfrac{(x-2)^2}{4x}$

لدينا : $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{-1}{4}x+1\right)=\dfrac{4+x^2-4x}{4x}$

$=\dfrac{x^2-4x+4}{4x}=\dfrac{(x-2)^2}{4x}$

* الحل الحسابي للمتراجحة : $f(x)\geq g(x)$

أي : $f(x)-g(x)\geq 0$ وعليه : $\dfrac{(x-2)^2}{4x}\geq 0$

ومنه ندرس إشارة : $\dfrac{(x-2)^2}{4x}$

x	$-\infty$		0		2	$+\infty$
$(x-2)^2$	+		+		+	
4x	-	‖	+		+	
$\dfrac{(x-2)^2}{4x}$	-	‖	+		+	

وعليه حلول المتراجحة هي قيم x حيث : $x\in\left]0,+\infty\right[$

3) الحل البياني للمتراجحة : $f(x)\geq g(x)$:

نلاحظ أنه في المجال $\left]-\infty,0\right[$: (C) يقع تحت (D) .

وفي المجال $\left]0,+\infty\right[$: (C) يقع فوق (D) .

وعند $x=2$: (C) يقطع (D) .

وعليه في المجال : $\left]0,+\infty\right[$ يكون $f(x)\geq g(x)$

إذن حلول المتراجحة هي الأعداد الحقيقية x بحيث : $x\in\left]0,+\infty\right[$.

4) * حساب A نقطة تقاطع (D) و (Δ) :

نضع : $h(x)=g(x)$ أي $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}x+1$

وعليه : $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=\frac{1}{2}+1$ ومنه : $\frac{3}{4}x=\frac{3}{2}$

وعليه : $x=\frac{3}{2}\div\frac{3}{4}$ أي : $\boxed{x=2}$.

وعليه : $y=\frac{1}{2}$ إذن : $A\left(2,\frac{1}{2}\right)$

ولدينا : $f(2)=\frac{1}{2}$ وعليه : $A\in(C)$

$f(x)=h(x)$ تعني أن : $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

وهذا يعني أن : $\frac{2-x^2+x}{2x}=0$ وعليه : $-\left(x^2-x+2\right)=0$

أي : $x^2-x+2=0$ ويعني أن : $(x+1)(x-2)=0$

* استنتاج النقطة الثانية G :

$f(x)=h(x)$ تعني أن : $x+1=0$ أو $x-2=0$.

ومنه : $x=-1$ أو $x=2$.

ولدينا : $f(-1)=-1$ ومنه : $G(-1,-1)$

5) * تعيين نقط تقاطع (D) مع المحورين .

لدينا : $y=\frac{-1}{4}x+1$ معادلة (D) .

a) التقاطع مع $(x'x)$: نضع $y=0$ ونجد : $x=4$.

وعليه : $(D)\cap(x'x)=\{B(4,0)\}$

b) التقاطع مع $(y'y)$: نضع $x=0$ ونجد : $y=1$.

وعليه : $(D)\cap(y'y)=\{C(0,1)\}$

* تعيين نقط تقاطع (Δ) مع المحورين :

لدينا : $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ معادلة (Δ) .

a) التقاطع مع $(x'x)$: نضع $y=0$ ونجد : $x=1$.

وعليه : $(\Delta)\cap(x'x)=\{E(1,0)\}$

b) التقاطع مع $(y'y)$: نضع $x=0$ ونجد : $y=\frac{-1}{2}$.

وعليه : $(\Delta)\cap(y'y)=\left\{F\left(0,\frac{-1}{2}\right)\right\}$

* نبين أن A منتصف $[BC]$:

$B(4,0)$; $C(0,1)$. منتصف [BC] هي النقطة I حيث :

$$x_I=\frac{x_B+x_C}{2} \quad و \quad y_I=\frac{y_B+y_C}{2}$$

وعليه : $x_I=\frac{4+0}{2}=2$; $y_I=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$

وعليه : $I(2,\frac{1}{2})$ و عليه : $I=A$

- نبين أن للقطعتين $[E\ F]$ و $[A\ G]$ نفس المنتصـف

$$G(-1,-1),A(2,\frac{1}{2}),F(0,-\frac{1}{2}),E(1,0)$$

* لتكن $M(x,y)$ منتصف $[E\ F]$ وعليه :

$x=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$ وَ $y=\frac{\frac{-1}{2}+0}{2}=\frac{-1}{4}$ إذن $M\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)$

* وليكن $N(x',y')$ منتصف $[A\ G]$

$$y' = \frac{-1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{-1}{4} \quad و \quad x' = \frac{+2-1}{2} = \frac{+1}{2}$$ وعليه :

$$N\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4} \right)$$ وعليه :

إذن : $M \equiv N$ وعليه : [EF] و [AG] لهما نفس المنتصف .

تمرين 20 :

لدينا : $f(x) = 2(x-1)^2$; $D_f = R$

1) حساب نسبة التزايد للدالة f :

من أجل العددين الحقيقيين x_1 , x_2 بحيث : $x_1 \neq x_2$

لدينا :

$$\vartheta = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2\left[(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 \right]}{x_1 - x_2}$$

$$\vartheta = \frac{2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2)}{x_1 - x_2}$$

ومنه : $\vartheta = 2(x_1 + x_2 - 2)$

إذن : $\vartheta = 2\left[(x_1 - 1) + (x_2 - 1) \right]$

وعليه من أجل $x_1 \geq 1$ و $x_2 \geq 1$ فإن $\vartheta > 0$

وأيضا من أجل $x_1 \leq 1$ و $x_2 \leq 1$ فإن $\vartheta < 0$

وبالتالي في المجال : $[1, +\infty[$ الدالة f متزايدة تماما.

و أيضا في المجال : $]-\infty, 1[$ الدالة f متناقصة تماما.

2) لدينا : $f(x) = 2(x-1)^2$

وعليه من أجل أي عدد حقيقي x فإن : $f(x) \geq 0$

وبالتالي العدد 0 هو قيمة حدية صغرى للدالة f .

3) إكمال الجدول :

x	- 1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
f (x)	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	2	8

4) إنشاء (C) :