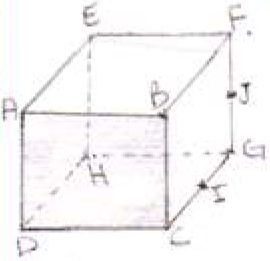
الهندسة الفضائية

1- المنظور المتساوي القياس

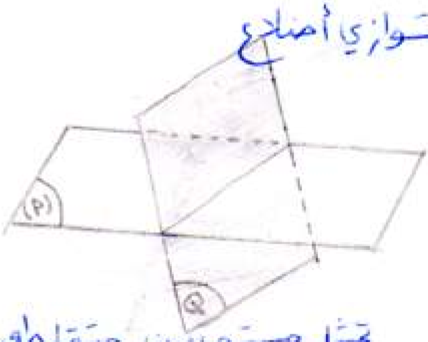
قواعد التمثيل: المنظور المتساوي القياس هو تقنية لتمثيل أشياء من الفضاء حيث:
- تمثل قطعة مستقيمة بقطعة مستقيمة.
- تمثل الخطوط المخفية بخطوط متقطعة.
- يحافظ على التوازي. - يحافظ على الاستقامية.
- يحافظ على منتصفات قطع مستقيم.
- يحافظ على الزوايا في الأوجه الموازية لحامل التمثيل.

مثال 1: الشكل المقابل هو تمثيل بالمنظور المتساوي القياس لمكعب طول حرفه 3,5cm



- I منتصف [CG] . J منتصف [FG]
- إذا كان K مركز المربع DCGH فإن النقط D ، K ، G على استقامة واحدة وتكون على استقامة واحدة كذلك في التمثيل بالمنظور المتساوي القياس.
- القطع [BF] و [CG] لها نفس طول القطعة [AB] إلا أن تمثيلها أقصر من [AB].
- الزاوية $\widehat{ADC}$ قائمة وتمثل بزاوية قائمة
- الزاوية $\widehat{FBC}$ غير موجودة في وجه يوازي حامل الوجه الأمامي فتمثل بزاوية لا تساوي $90°$.

مثال 2: في المنظور المتساوي القياس، يمثل المستوى بمتوازي أضلاع ويمثل المستقيم بقطعة مستقيم.

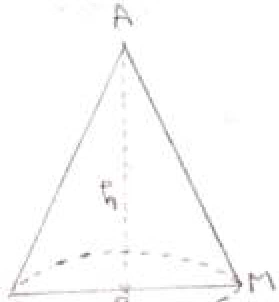


تمثيل مستويين متقاطعين .

تمثيل مستو و مستقيم متقاطعين

2- الأشكال الهندسية في الفضاء:

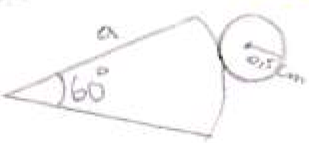
أ- المخروط الدوراني: المثلث ABM قائم في النقطة B .
عندما يدور المثلث ABM حول المستقيم (AB) دورة كاملة نحصل على شكل يسمى **المخروط** .



حجم المخروط: $V = \frac{1}{3} h \times B = \frac{1}{3} h \times \pi \times r^2$

h: الارتفاع
B: مساحة القاعدة (القرص)
r: نصف قطر الدائرة

مثال: إليك تصميما لمخروط دوراني
أحسب الطول a ثم الارتفاع h
أحسب حجم المخروط .



الحل: * حساب a :
لدينا: $2a\frac{\pi}{3} = 2\pi r$ ومنه: $\frac{a}{3} = r$ ومنه: $a = 1,5\,cm$.

* حساب h :
بتطبيق نظرية فيثاغورث نجد: $h^2 = (1,5)^2 - (0,5)^2$ ومنه: $h^2 = 2$ ومنه: $h = \sqrt{2}$.

* حساب V :
لدينا: $V = \frac{1}{3} h \cdot \pi r^2$ ومنه: $V = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times \pi \times (0,5)^2$ ومنه: $V = 0,37\,cm^3$

ب- الأسطوانة: إذا كان ABCD مستطيل فإنه عندما يدور المستطيل حول المستقيم (AB) دورة كاملة نحصل على أسطوانة محورها المستقيم (AB) وقاعدتاها قرص.

المساحة الجانبية: $S = 2\pi r h$

حجم الأسطوانة: $V = \pi r^2 \times h$

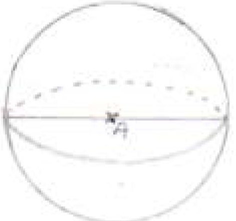
r نصف قطر الدائرة، h الارتفاع.

مثال: إليك تصميما لأسطوانة دورانية. أحسب حجمها.

لدينا: $V = \pi r^2 \times h$

ومنه: $P = 3,14 = 2\pi r$ (محيط الدائرة) $r = \frac{3,14}{2\pi}$

إذن: $V = \pi \times \left(\frac{3,14}{2\pi}\right)^2 \times 4$ ومنه: $V = 3,14\ cm^3$



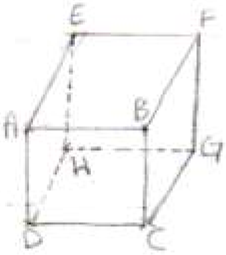
ج- الكرة: (C) دائرة قطرها [AB] بتدوير الدائرة (C) حول قطرها [AB] نصف دورة نحصل على شكل يسمى الكرة.

مساحة الكرة هي: $S = 4\pi r^2$

حجم الكرة هو: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

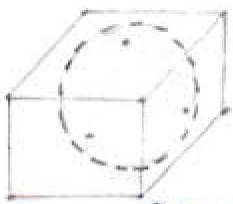
د- المكعب: هو شكل هندسي له ستة وجوه مربعة. نقرأ المكعب ABCDEFGH له ثمانية أحرف هي رؤوس المكعب. له 12 حرف (ضلع). أضلاعه متعامدة.

حجمه $V = a^3$ حيث a هو ضلع المكعب.



مثال: يمثل الشكل كرة نصف قطرها 1,5cm داخل مكعب بحيث تمس كل أوجه المكعب.

- أحسب الحجم المحصور بين الكرة والمكعب.

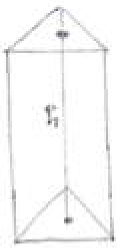


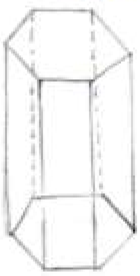
الحل: قطر الكرة هو طول ضلع المكعب أي: 3cm.

حجم الكرة: $V_1 = \frac{4}{3}\pi(1,5)^2$. وحجم المكعب هو: $V_2 = 3^3$

ومنه: $V_1 = 14,13$ ، $V_2 = 27$ (الوحدة هي cm^3)

إذن الحجم المحصور بين الكرة والمكعب هو: $V_2 - V_1$ أي $12,87\ cm^3$.



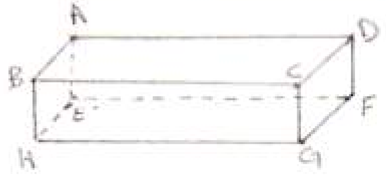


هـ- الموشور القائم: هو شكل مجسم له قاعدتان يمكن أن تكون مثلثا أو متوازي أضلاع أو مستطيلا أو مربعا... وله أوجه جانبية عمودية على القاعدة.

حجم الموشور القائم: $V = h \times S$

الارتفاع

مساحة القاعدة



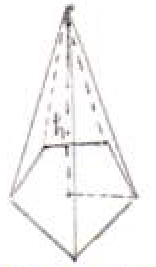
و- متوازي المستطيلات: هو شكل هندسي مجسم أوجهه هي مستطيلات. كل مستطيلين متقابلين لهما نفس القيس ومتوازيان له 12 حرفا وله ثمانية رؤوس

حجم متوازي المستطيلات هو: $V = a \times b \times c$

أو: $V = h \times S$.

الارتفاع

مساحة القاعدة.

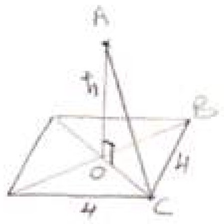


ز- الهرم: هو شكل هندسي مجسم له رأس وقاعدته شكل مضلع منتظم

حجم الهرم: $V = \frac{1}{3} \times h \times S$

الارتفاع

مساحة القاعدة.



مثال: ABCDE هو هرم منتظم قاعدته مربع. طول كل حرف هو: 4cm

O هو مركز القاعدة. أحسب حجم هذا الهرم.

الحل:

$OC = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

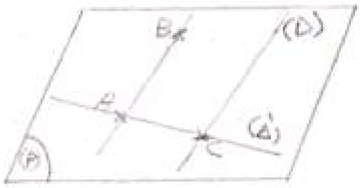
ومنه: $h^2 = 4^2 - (2\sqrt{2})^2$ ومنه: $h = 2\sqrt{2}$

إذن: $V = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times 16$.

3- تعيين المستقيم في الفضاء:

يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطتين متمايزتين في الفضاء.

4- تعيين المستوي:



- كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تعين مستويا واحدا في الفضاء.
- كل مستقيم (Δ) ونقطة A لا تنتمي إليه تعين مستويا واحدا.
- المستقيمان (Δ) و (Δ') المتقاطعان أو المتوازيان يعينان مستويا واحدا.

مثال: في الشكل السابق لدينا:

النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستويا نسميه (P).

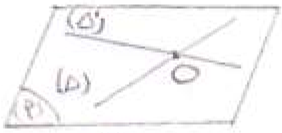
النقطتان المتمايزتان A و B تعينان مستقيما وحيدا.

المستقيمان (Δ) و (Δ') المتقاطعان في النقطة C يعينان المستوي (P).

المستقيمان (Δ) و (AB) المتوازيان يعينان المستوي (P).

5- الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء:

تعريف 1: المستقيمان المتقاطعان هما مستقيمان يقعان في مستو واحد ولهما نقطة مشتركة وحيدة.



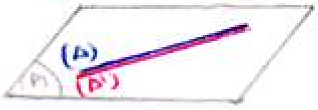
مثال: في الشكل المقابل المستقيمان (Δ) و (Δ') متقاطعان في النقطة O.

تعريف 2: المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان من نفس المستوي وغير متقاطعين

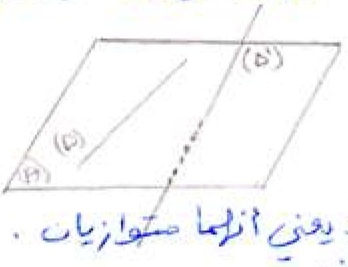
مثال: في الشكل المقابل المستقيمان (Δ) و (Δ') متوازيان

تعريف 3: المستقيمان المنطبقان هما مستقيمان كل نقاطهما مشتركة.

مثال: في الشكل المقابل المستقيمان (Δ) و (Δ') منطبقان.



تعريف 4: المستقيمان اللذان ليسا من مستو واحد: هما مستقيمان لا يشتركان في أي نقطة ولا يشملهما مستو واحد.



مثال: في الشكل المقابل المستقيمان (Δ') و (Δ) ليسا من مستو واحد.

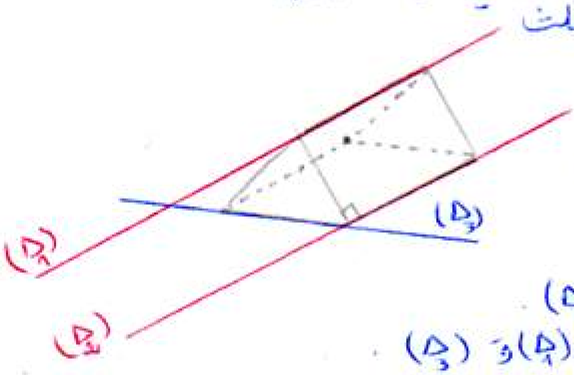
ملاحظة: المستقيمان الغير متقاطعان في الفضاء لا يعني أنهما متوازيان.

تطبيق: الشكل المقابل يمثل موشور قائم قاعدته مثلث

. أوجد مستقيمين متوازيين

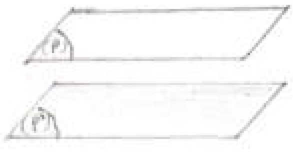
. " " متقاطعين

. " " ليسا من مستو واحد.



الحل:
- مستقيمين متوازيين هما: (Δ_1) و (Δ_2)
- مستقيمين متقاطعين هما: (Δ_2) و (Δ_3)
- مستقيمين ليسا من نفس المستوي هما: (Δ_1) و (Δ_3).

6. الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء:



- **المستويان المتوازيان:** هما مستويان لا يشتركان في أية نقطة.

مثال: في الشكل المقابل لا توجد أية نقطة مشتركة بين المستويين (P) و (P') فهما متوازيان.

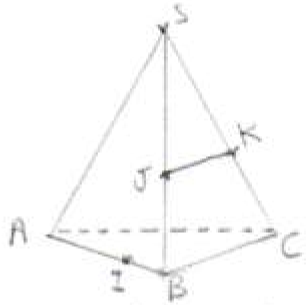
- **المستويان المنطبقان:** هما مستويان كل نقاطهما مشتركة.

مثال: في الشكل المقابل للمستويين (P) و (P') نفس النقاط
إذن: (P) = (P')

- **المستويان المتقاطعان:** هما مستويان يشتركان في مستقيم

مثال: في الشكل المقابل كل نقاط المستقيم (AB) مشتركة بين المستويين (P) و (P').

تطبيق: SABC رباعي أوجه، I، J، K نقاط من: [AB] ، [SB] ، [SC] على الترتيب
حيث: (JK) يوازي (BC).
- عين تقاطع المستوي (IJK) مع أوجه الرباعي الأربعة



حل:
- (JK) هو مستقيم تقاطع المستوي (IJK) مع الوجه (SBC).
- (IJ) " " " (IJK) " (SAB)
- المستقيم (JK) يوازي المستقيم (BC) إذن
(JK) يوازي تقاطع المستوي (ABC) مع المستوي (IJK)
- المستوي (IJK) يقطع المستوي (ABC) في المستقيم (IH) الذي يوازي (BC)

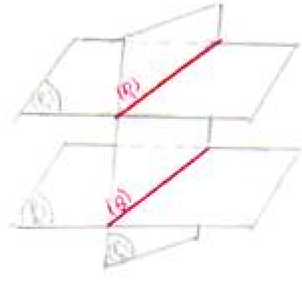
7. المستويات المتوازية:

نظرية 1: إذا كانا مستويان موازيين لمستوٍ ثالث فإنهما متوازيان.

مثال: في الشكل المقابل لدينا:

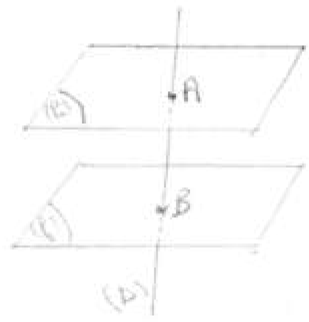
- المستويين (P_1) و (P_2) متوازيان.
- المستويين (P_2) و (P_3) متوازيان.
- إذن المستويين (P_1) و (P_3) متوازيان.
- وبالتالي المستويات الثلاثة متوازية.

نظرية 2: إذا قطع مستوٍ أحد المستويين المتوازيين فإنه يقطع المستوي الآخر
- إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن مستقيمي تقاطعهما متوازيان



مثال: في الشكل المقابل لدينا:
- (P_1) و (P_2) مستويان متوازيان
- (P_3) يقطع (P_1) في المستقيم (Δ_1)
فهو يقطع (P_2) في المستقيم (Δ_2).
- إذن المستقيمان: (Δ_1) و (Δ_2) متوازيان

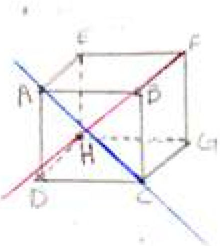
نظرية 3: إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الآخر.



مثال: في الشكل المقابل لدينا:
- المستويين (P_1) و (P_2) متوازيان.
- المستقيم (Δ) يشمل (P_1) في النقطة A
- المستقيم (Δ) يشمل (P_2) في النقطة B

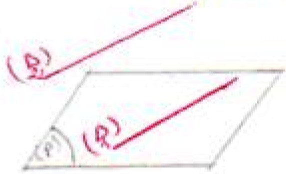
8- المستقيمات والمستويات المتوازية:

تعريف: يكون مستقيم ومستوٍ متوازيين إذا كانا منفصلين (أي لا توجد بينهما أية نقطة مشتركة).
أو كان المستوي يحتوي المستقيم



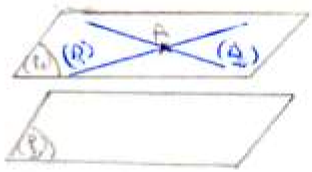
مثال: في الشكل المقابل نلاحظ أن:
- المستقيم (AC) يوازي كلا من المستويين (EFGH) و (ABCD)
- المستقيم (BF) يوازي كلا من المستويات (BFGC) و (BFEA) و (AEHD) و (HDCG).

نظرية 1: يكون مستقيم موازيا لمستوٍ إذا وفقط إذا كان موازيا لأحد مستقيمات هذا المستوي.



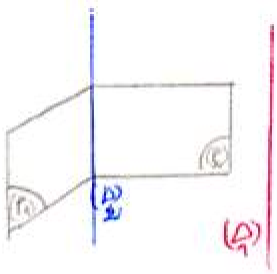
مثال: في الشكل المقابل لدينا:
- المستقيم (Δ_1) يوازي المستقيم (Δ_2).
- (Δ_1) مستقيم من المستوي (P)
إذن (Δ_2) يوازي المستوي (P).

نظرية 2: يكون مستويان متوازيين إذا شمل أحدهما مستقيمين متقاطعين يوازي كل منهما المستوي الثاني.



مثال: في الشكل المقابل لدينا:
- (Δ_1)، (Δ_2) مستقيمان من المستوي (P_1) متقاطعان.
ومنه: (Δ_1) يوازي (P_2).
(Δ_2) يوازي (P_2).
إذن: (P_1) يوازي (P_2).

نظرية 3: إذا كان مستقيم يوازي مستويين متقاطعين فإنه يوازي مستقيم تقاطع المستويين.

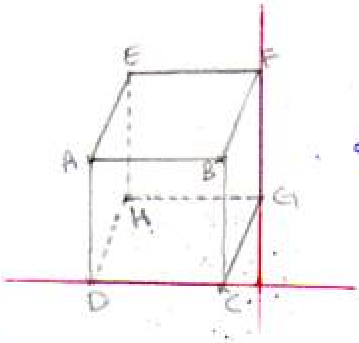


مثال: في الشكل المقابل لدينا:
- (Δ_1) مستقيم يوازي المستويين (P_1) و (P_2).
- إذن (Δ_1) يوازي (Δ_2) [مستقيم تقاطع (P_1) و (P_2)].

التعامد في الفضاء.

تعامد المستقيمات في الفضاء:

تعريف: يكون المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) متعامدين في الفضاء:
إذا كان المستقيمان الموازيان لهما من نفس النقطة متعامدين.



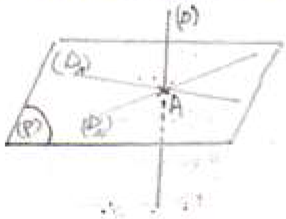
مثال: في الشكل المقابل المكعب ABCDEFGH فيه:
(DC) و (BC) متعامدان في النقطة C.
(BC) و (FG) متوازيان.
إذن: (DC) و (FG) متوازيان.

ملاحظة: في الهندسة الفضائية يمكن لمستقيمين أن يكونا متعامدين دون أن يكونا متقاطعين.
بينما في الهندسة المستوية إذا تعامد مستقيمان فإنهما متقاطعان.

تعامد المستقيمات والمستويات:

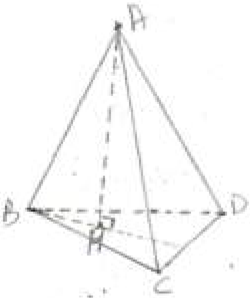
تعريف: يكون مستقيم يعامد مستو إذا قطعه وعامد مستقيمين متقاطعين منه.

مثال: (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان من المستوي (P) متقاطعان في A.
(Δ) مستقيم يعامد كل من (Δ_1) و (Δ_2) ويقطع المستوي (P).
إذن: (Δ) يعامد المستوي (P).



نظرية: إذا كان مستقيم يعامد مستو فإنه يعامد كل مستقيمات هذا المستوي.

تطبيق: ABCD هرم رباعي الوجوه.
(AB) مستقيم عمودي على المستقيم (CD)
(AH) هو الارتفاع المتعلق بالقاعدة (BCD)
بيّن أن المستقيم (CD) يعامد المستقيم (BH).

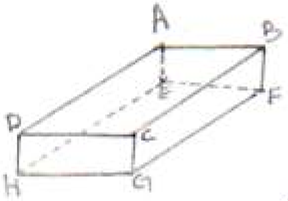


الحل:
يكفي إثبات أن (CD) عمودي على المستوي (ABH)
لدينا: (AH) عمودي على المستوي (BCD)
إذن: (AH) عمودي على كل مستقيم فيه. (أي المستوي (BCD))
ومنه: (AH) عمودي على (CD).
ومنه: (CD) عمودي على المستقيمين المتقاطعين (AH) و (AB).
ومنه: (CD) عمودي على (ABH) (المستوي المشكل من (AH) و (AB)).
وبالتالي: (CD) عمودي على (BH).

ملاحظة: لإثبات أن مستقيما (Δ) عمودي على مستوي (P) يكفي أن نبرهن أن:
(Δ) عمودي على مستقيمين متقاطعين من (P).

المستويات المتعامدة :

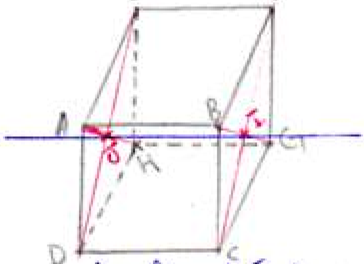
تعريف : يكون مستويان متعامدين إذا وفقط إذا كان أحدهما يحتوي على مستقيم عمودي على الآخر .



مثال : متوازي المستطيلات المقابل فيه :
المستوي (ABFE) عمودي على كل من المستويات الأربعة :
(HEIF) و (DACH) و (DABC) و (CBFI)

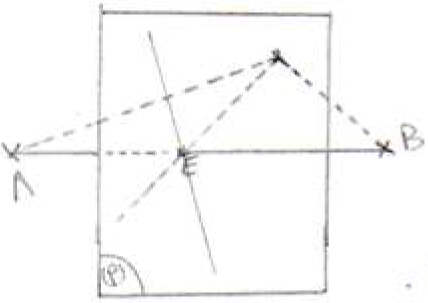
خواص :
1. المستوي العمودي على أحد مستويين متوازيين عمودي على الآخر .
2. المستوي العمودي على مستويين متقاطعين يكون عموديا على مستقيم تقاطعهما .
3. إذا كان (P_1) و (P_2) مستويان متعامدين فإن أي مستقيم يشمل نقطة من المستوي (P_1) وعمودي على المستوي (P_2) هو مستقيم محتوى في (P_1) .

تطبيق : ABCDEFGH مكعب .
- عين ثم ارسم تقاطع المستويين (ABG) و (EFC)
- أثبت أن هذا التقاطع يعامد كلا من الوجهين BFGC ، AEHD .



الحل :
I هي نقطة تقاطع (FC) و (BG)
J هي نقطة تقاطع (ED) و (AH)
تقاطع المستويين (EFC) و (ABG) هو المستقيم (IJ) .
لأن (IJ) هو جزء من كل منهما .
. بما أن I هي منتصف القطران [BG] و [CF] .
. و J هي منتصف القطران [AH] و [BE] .
- والمربعات AEHD و BFGC متقابلان فإن (IJ) عمودي على كل منهما .

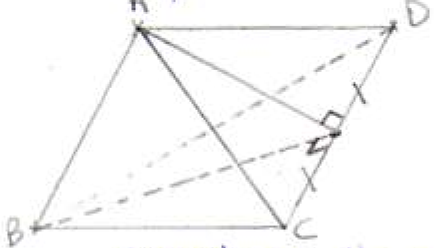
المستوي المحوري لقطعة مستقيم :



A ، B نقطتان مختلفتان
نسمي مستويا محوريا لقطعة مستقيم [AB] .
المستوي العمودي على القطعة [AB] في منتصفها .
نستنتج أن :
مجموعة نقط الفضاء المتساوية البعد عن نقطتين مختلفتين A ، B هي المستوي المحوري للقطعة [AB] .
(لاحظ الشكل) .

تطبيق :
ABCD رباعي وجوه منتظم ، M منتصف [CD] .
أ. بين أن المستقيم (CD) عمودي على المستوي (ABM) .
ب. ما هي مجموعة نقط الفضاء المتساوية المسافة عن طرفي قطعة المستقيم [CD] .

الحل :



أ: كل من المثلثات ACD و BCD متقايسا الأضلاع
و M منتصف [CD] . ومنه كل من (AM) و (BM)
محوراً للقطعة [CD] وبالتالي (CD) عمودي
على كل من (AM) و (BM) .
بما أن (AM) و (BM) مستقيمان متقاطعان في النقطة M من المستوي (ABM)
فإن المستقيم (CD) عمودي على المستوي (ABM)
ب: مجموعة النقط المتساوية المسافة عن C و D هي المستوي المحوري للقطعة [CD]
أي هي المستوي (ABM) .