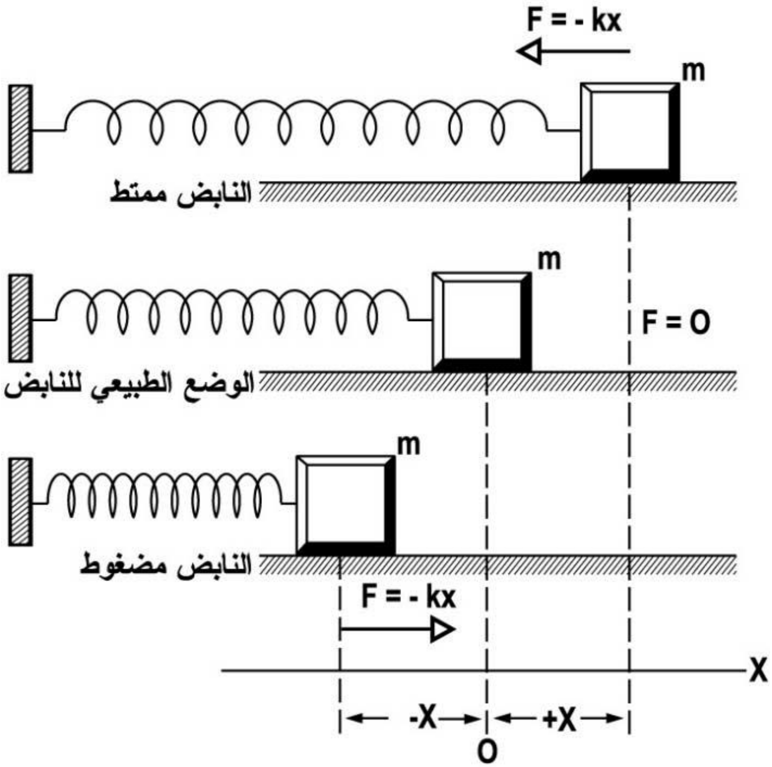
تطبيقات على الحركة التوافقية البسيطة

الحركة الاهتزازية البسيطة في منظومة "كتلة - نابض" :
THE SHM IN THE MASS-SPRING SYSTEM

يوضح الشكل بعد قليل رسماً مبسطاً لحركة منظومة "الكتلة-النابض"، وهي عبارة عن جسم كتلته m يتحرك على سطح أفقي أملس بسبب تأثير نابض مربوط بالجسم.



من قانون "هوك": **F=-kx**

حيث k هو "ثابت القوة" للنابض.

ووفق " قانون نيوتن الثاني" فإن **F=ma**

$$a = -\frac{k}{m}\,.x$$

أي أن:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

وبالتالي نحصل على:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية, والحل وفق العلاقة:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \emptyset)$$

وهذا يعني أن:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \emptyset)$$

كما أن:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \emptyset)$$

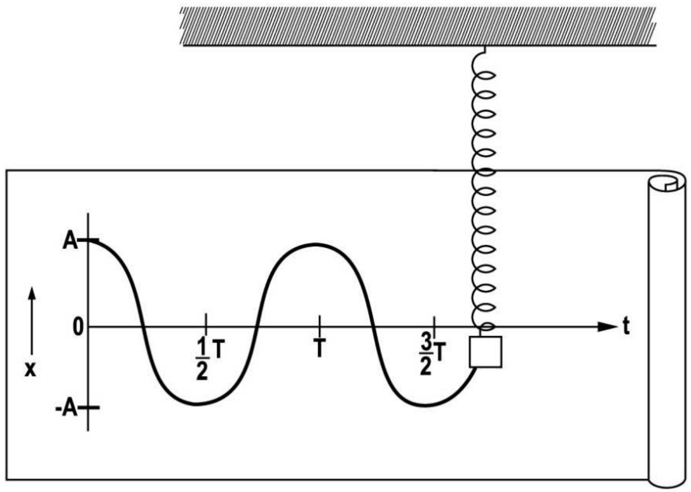
وهاتان النتيجتان هما نفس المعادلتين للسرعة والعجلة للحركة التوافقية البسيطة التي استنتجنا سابقاً, وتوضح معادلة العجلة أن القوة المؤثرة على جسم ستؤدي إلى إزاحته في اتجاه معاكس, وهذا يؤكد أن الجسم سيقوم بحركة اهتزازية بسيطة زمنها الدوري هو:

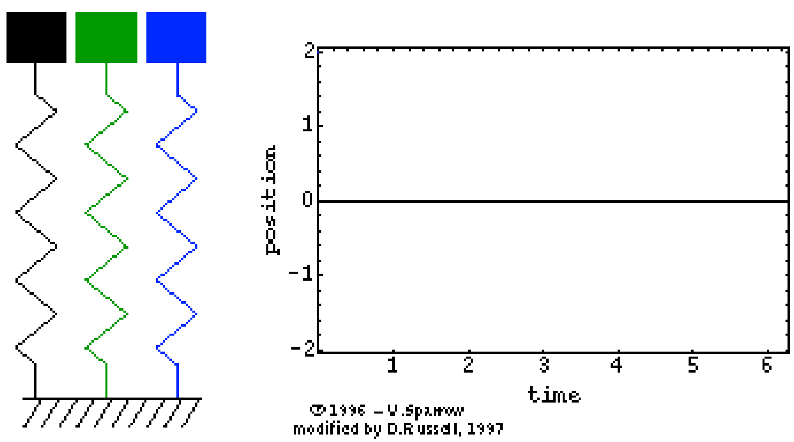
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

وترددها هو:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

إن نموذج أو منظومة "الكتلة – النابض" تطبق عملياً بكثرة في صناعة بعض (الراسمات والمسجلات التشابهية) ومخططات القلب والدماغ, وكذلك في تسجيل اهتزازات القشرة الأرضية وبعض بيانات الأرصاد الجوية حيث يربط فلم يقوم برسم الإشارة المسجلة كما هو موضح في الشكل التالي:





الطاقة الحركية لمهتز توافقي بسيط:
THE ENERGY OF A SIMPLE HARMONIC OSCILLATOR

تعطى "الطاقة الحركية" K كما يلي:

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 sin^2(\omega t + \emptyset)$$

أما "طاقة الوضع" فهي على النحو التالي:

$$PE = \Delta U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 cos^2(\omega t + \emptyset)$$

وبالتالي فإن "الطاقة الكلية" E هي:

$$E = KE + PE = KE + \Delta U = \frac{1}{2}kA^2[sin^2(\omega t + \emptyset) + cos^2(\omega t + \emptyset)]$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

وهذا يعني أن "الطاقة الكلية" (الميكانيكية) تساوي طاقة الوضع القصوى المختزنة في النابض.

عندما x = ± A , فإن:

$$v = 0 \quad , \quad K = 0 \quad , \quad E = PE$$

أما عندما تكون x=0 , فإن PE=0 , وبالتالي تكون:

$$E = KE$$

أي أن:

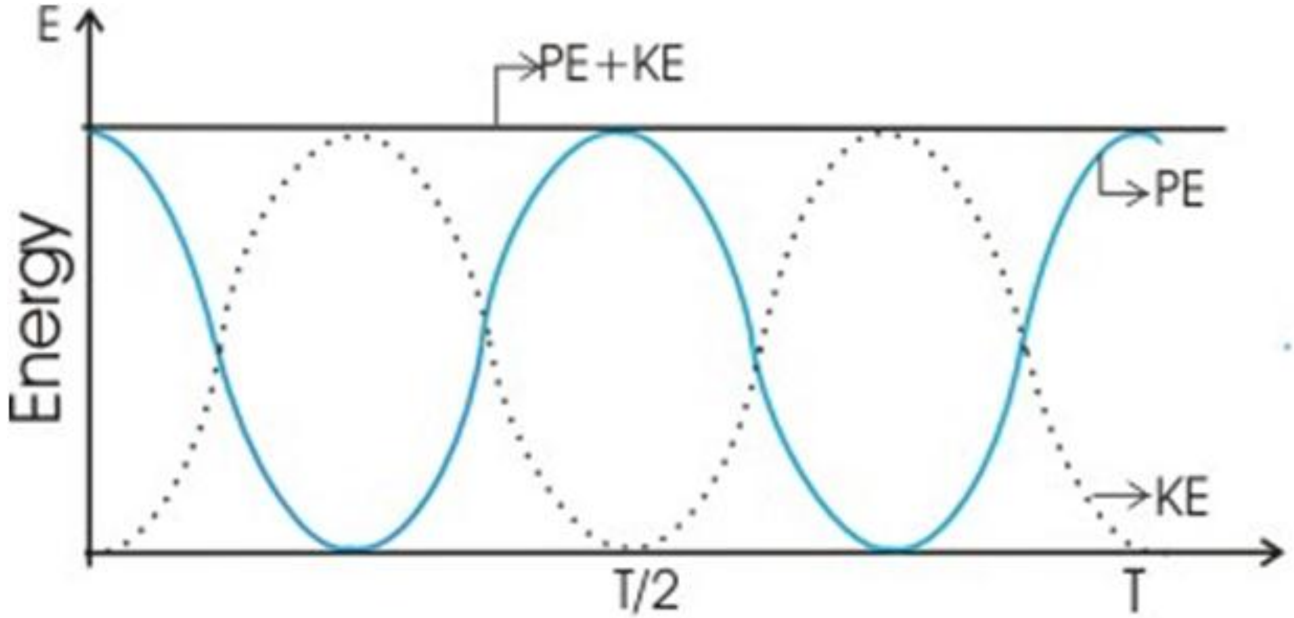
$$E = \frac{1}{2} m\, v_{max}^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}\,(A^2 - x^2)}$$

أي أن:

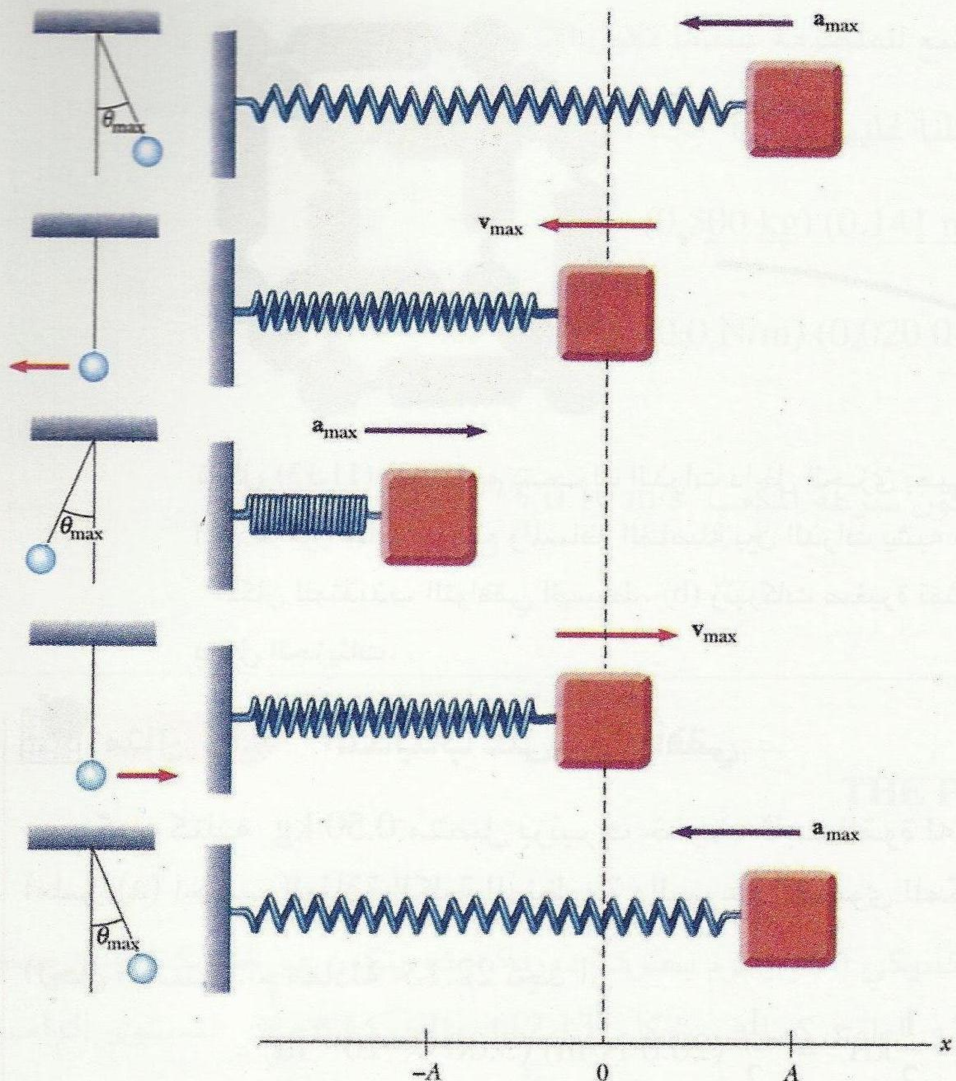
$$v = \pm \sqrt{\omega (A^2 - x^2)}$$

يوضح الشكل التالي تغيرات "طاقة الوضع" و " الطاقة الحركية" معاً, وهي تغيرات تبادلية بين شكلي الطاقة كما هو متوقع وفق "قانون حفظ الطاقة"



طاقة الحركة وطاقة الوضع مع الزمن لمتذبذب توافقي بسيط

الحركة التوافقية البسيطة لمنظومة المكعب والزنبرك وعلاقته بحركة البندول البسيط.
البارامترات بالجدول تشير إلى منظومة المكعب-الزنبرك بفرض أن $x=A$, $t=0$ ومن ثم
$x=A\cos\omega t$



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

مثال (1):

- مكعب كتلته 0.50 kg متصل بزنبرك خفيف ثابت القوة له 20.0 N/m يتذبذب على سطح أفقي أملس

(a) احسبي الطاقة الكلية للمنظومة والسرعة القصوى للمكعب. إذا كانت سعة الذبذبة 3.0 cm

الحل:

باستخدام معادلة 22.13 نجد أن

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(20.0\,N/m)(3.00 \times 10^{-2}m)^2$$

$$= 9.00 \times 10^{-3}\mathrm{J}$$

عندما يكون المكعب عند الوضع x=0 نعلم أن U=0 و $E = \frac{1}{2}mv^2{}_{max}$ إذن

$$\frac{1}{2}mv^2{}_{max} = 9.00 \times 10^{-3}\mathrm{J}$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{18.0 \times 10^{-3}\mathrm{J}}{0.500\,kg}} = 0.190\,m/s$$

(b) ما هي سرعة المكعب عندما تكون الإزاحة 2.0 cm

الحل:

نستخدم المعادلة :

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{20.0\ N/m}{0.500\ kg}\left[\,(0.030\,0\ \mathrm{m})^2 - (0.020\,0\ \mathrm{m})^2\,\right]}$$

$$= \pm\,0.141\ \mathrm{m/s}$$

الإشارتان الموجبة والسالبة تبين أن المكعب يمكن أن يكون متحركاً نحو اليمين ونحو اليسار في تلك اللحظة.

(c) طاقة الحركة وطاقة الوضع للمنظومة عندما تكون الإزاحة 2.0 cm.

الحل:

باستخدام النتيجة التي حصلنا عليها في b نجد أن

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.500\ kg)(0.141\ m/s)^2 = 5.00 \times 10^{-3}\text{J}$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(20.0\ N/m)(0.020\,0\ m)^2 = 4.00 \times 10^{-3}\text{J}$$

لاحظي أن K + U = E

مثال (2):

- كتلة مقدارها 200 g مربوطة بزنبرك ثابت القوة له k=5 N/m. إذا كانت تبعد مسافة قدرها 5 cm من نقطة الاتزان, ثم تركت تتذبذب بحرية أفقياً على سطح أملس.

(a) أوجدي الزمن الدوري للحركة.

الحل:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{5}{200 \times 10^{-3}}} = 5\ rad/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = 1.26\ s$$

(b) السرعة القصوى للحركة

الحل:

$$v_{max} = \omega A = 5 \times 5\ 10^{-2} = 0.25\ m/s$$

(c) ماهو أقصى تسارع للكتلة

الحل:

$$a_{max} = \omega^2 A = (5)^2 \times 5\ 10^{-2} = 1.25\ m/s^2$$

(d) عبري عن الموقع والسرعة والتسارع كدوال في الزمن.

الحل:

$$x = A.\cos \omega t = 0.05\ cos5t$$

$$v = -\omega.\mathrm{A}.\,sin\,\omega t = -(0.25)\ sin5t$$

$$a = -\omega^2.\mathrm{A}.\,cos\,\omega t = -1.25\ cos5t$$