Chapitre 1

Nombres réels

1.1 $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Il contient l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, et est muni de deux opérations, addition : $x,\ y \mapsto x+y$ et multiplication : $x,\ y \mapsto x \cdot y$, qui vérifient les propriétés suivantes.

1. L'addition est associative :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x+y)+z = x+(y+z).$$

2. L'addition a un éléments neutre 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x+0 = 0+x = x.$$

   L'élément neutre est unique car si $0'$ avait la même propriété que 0, on aurait

$$0' = 0' + 0 = 0.$$

3. Tout nombre réel a un opposé pour l'addition :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, \quad x+y = y+x = 0.$$

   l'opposé d'un nombre réel x est unique : si y et z vérifient tous les deux $x+y = y+x = 0$ et $x+z = z+x = 0$, alors

$$y = y+0 = y+(x+z) = (y+x)+z = 0+z = z.$$

   On désigne par $-x$ l'opposé de x.

4. L'addition est commutative :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad x+y = y+x.$$

   On exprime les propriétés 1–4 en disant que $(\mathbb{R}, +)$ est un *groupe commutatif.*

5. La multiplication est associative :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

6. La multiplication a un éléments neutre 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

L'élément neutre pour la multiplication est unique car si $1'$ avait la même propriété que 1, on aurait

$$1' = 1' \cdot 1 = 1.$$

7. La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z \\ (y + z) \cdot x &= y \cdot x + z \cdot x. \end{aligned}$$

8. La multiplication est commutative :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

On exprime les propriétés 1–8 en disant que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un *anneau commutatif*.

9. 0 est différent de 1 et tout nombre réel x différent de 0 a un inverse pour la multiplication :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R}, \quad x \cdot y = y \cdot x = 1)).$$

l'inverse d'un nombre réel x est unique (même démonstration que pour l'opposé pour l'addition) et on le note x^{-1}.
$1^{-1} = 1$, en effet

$$1^{-1} = 1^{-1} \cdot 1 = 1.$$

$\mathbb{R}$ est un corps commutatif, comme autre corps il y a le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

10. $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$:

$$\begin{array}{rll} \forall x \in \mathbb{R}, & x \leq x & \text{(réflexivité) ;} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}, & ((x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z) & \text{(transitivité) ;} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, & ((x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y) & \text{(antisymétrie).} \end{array}$$

11. L'ordre $\leq$ est total :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

12. L'ordre $\leq$ est compatible avec l'addition

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z).$$

13. Le produit de deux nombres réels positifs ou nuls est positif ou nul :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad ((0 \leq x \text{ et } 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y).$$

Un corps muni d'une relation d'ordre vérifiant les propriétés (10–13) est dit totalement ordonné. les corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des corps totalement ordonnés, par contre, le corps $\mathbb{C}$ n'est pas totalement ordonné.

On utilise les notations habituelles pour la soustraction et la division : $x - y$ désigne $x + (-y)$ et x/y désigne $x \cdot y^{-1}$ et on omet le plus souvent le symbole $\cdot$ de la multiplication.

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Soit a et b deux nombre réels vérifiant $a \leq$. Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ de l'une des formes suivantes

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, intervalle fermé (segment).
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, intervalle semi ouvert.
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, intervalle semi ouvert.
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, intervalle ouvert.
$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$, intervalle fermé.
$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, intervalle ouvert.
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, intervalle fermé.
$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, intervalle ouvert.
$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, intervalle ouvert.

Notons en particulier que $\varnothing =]a, a[$ est un intervalle ouvert et que le singleton $\{a\} = [a, a]$ est un intervalle fermé.

Theorem 1.1. *Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tout $x, y \in I$ vérifiant $x < y$, alors l'intervalle $[x, y]$ est inclus dans I.*

1.3 $\mathbb{R}$ est valué

On définie la valeur absolue $|x|$ de $x \in \mathbb{R}$ par

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \\ -x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

De la définition résulte les propriétés suivantes

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad |xy| = |x||y|.$
3. $\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y|.$

1.4 Bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$

Définition 1.1. Soit E une partie de $\mathbb{R}$. On dit que E est majorée (resp. minorée) s'il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que $\forall x \in E : x \leq M$ (resp. $m \leq x$). Dans ce cas on dit que M est un majorant (resp. m est un minorant) de E. On dit que E est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Définition 1.2. Soit E une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$. On dit que E possède un plus grand (resp. petit) élément s'il existe un majorant (resp. minorant) de E appartenant à E. Un tel élément est souvent dit maximum (resp. minimum) et est noté $\max E$ (resp. $\min E$).

Theorem 1.2. *Si E possède un plus grand (resp. petit) élément celui-ci est unique.*

Démonstration. exercice □

Définition 1.3. Soit E une partie majorée de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des majorants de E possède un plus petit élément, celui-ci est appelé borne supérieure de E et est noté $\sup E$.

Exemple 1.1. 1 est une borne supérieure de $]0,\ 1[$.

Theorem 1.3. *Soit E une partie majorée de $\mathbb{R}$. Alors, $M = \sup E$ si, et seulement si,*

$$\begin{cases} \forall x \in E \quad x \leq M \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists x_0 \in E \quad M - \epsilon < x_0. \end{cases}$$

Démonstration. exercice □

On définie d'une manière analogue la borne inférieure d'une partie minorée de $\mathbb{R}$.

Définition 1.4. Soit E une partie minorée de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des minorants de E possède un plus grand élément, celui-ci est appelé borne inférieure de E et est noté $\inf E$.

Theorem 1.4. *Soit E une partie minorée de $\mathbb{R}$. Alors, $m = \inf E$ si, et seulement si,*

$$\begin{cases} \forall x \in E \quad m \leq x \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists x_0 \in E \quad x_0 < m + \epsilon. \end{cases}$$

Démonstration. exercice □

Theorem 1.5. *En cas de l'existence, la borne supérieure (resp. inférieure) est unique.*

Démonstration. exercice □

Nous admettrons comme propriété essentiel de $\mathbb{R}$ que :

Toute partie *majorée non vide* de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

De cette propriété on déduit aussitôt le

Theorem 1.6. *Toute partie* minorée non vide *de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Démonstration. En effet l'ensemble des minorants est majorée, elle admet donc une borne supérieure, celui-ci est bien la borne inférieure de l'ensemble en question. □

1.5 $\mathbb{R}$ est un corps archimédien

Theorem 1.7. *$\mathbb{R}$ est un corps archimédien, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}, \quad ny > x.$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}, \quad ny > x$$

est fausse, cela signifie que sa négation est vraie, c'est-à-dire

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad ny \leq x.$$

Notons $A = \{ny,\ n \in \mathbb{N}\}$ A est donc une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure M. Comme $M - y < M$ il existe $x_0 \in A$ tel que $M - y < x_0$. Or $x_0 \in A$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 = n_0 y$, d'où $M - y < n_0 y$. Il en résulte que $M < n_0 y + y$ c'est-à-dire $M < (n_0 + 1)y$, c'est contradictoire, car $(n_0 + 1)y \in A$. $\square$

Corollary 1.8. *$\mathbb{N}$ n'est pas majorée.*

Démonstration. Appliquer le théorème avec $y = 1$. $\square$

Theorem 1.9. *Soit x un nombre réel et $a > 0$. Il existe un nombre unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$ka \leq x < (k+1)a.$$

Démonstration. exercice $\square$

Définition 1.5. Soit x un nombre réel. On appelle partie entière de x et on note $\mathrm{E}(x)$ l'unique nombre entier vérifiant

$$\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x) + 1.$$

Le réel $\{x\} = x - \mathrm{E}(x)$ est appelé partie fractionnaire de x.

1.6 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Theorem 1.10. *L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, autrement dit entre deux nombres réels il y a toujours un nombres rationnel. Plus précisément*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q},\ x < r < y.$$

Démonstration. Il suffit d'étudier le cas $0 \leq x < y$, en effet si $x < 0 < y$, $r = 0$ et si $x < y \leq 0$ on travaille avec les opposés $0 \leq -y < -x$.

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(y - x) > 1$. Soit m le plus petit entier tel que $nx < m$ alors $m - 1 \leq nx$ donc

$$nx < m = (m-1) + 1 \leq nx + 1 < nx + n(y - x) = ny$$

par suite

$$x < \frac{m}{n} < y,$$

on prend $r = \dfrac{m}{n}$. $\square$

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Généralités

Définition 2.1. On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note une suite numérique, qui à l'entier naturel n fait correspondre le nombre u_n par $(u_n)_n$ et on dit que u_n est son terme général.

Remarque 2.1. Soit $N \in \mathbb{N}$. Nous appellerons encore suites numériques les applications de $\{n \in \mathbb{N}, N \leq n\}$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Une telle suite sera notée $(u_n)_{n \geq N}$.

Une suite numérique $(u_n)_n$ est dit réelle si elle est à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, complexe si elle est à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il est essentiel de ne pas oublient que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, donc toute suite réelle est aussi complexe.

Les suites considérées tout au long de ce cours sont des suites réelles.

Exemple 2.1.

1. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
2. $u_n = 3n$. Une telle suite est dite arithmétique.
3. $v_n = a^n$ où a est nombre réel ou complexe. Une telle suite est dite géométrique.
4. $v_n = a$ où a est nombre réel ou complexe. Une telle suite est dite constante.

Remarque 2.2. Il est essentiel de noter qu'il faut distinguer une suite numérique $(u_n)_n$, qui est une application de son image $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, qui est un sous-ensemble de $\mathbb{K}$.

Définition 2.2. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle (suite)

1. somme de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ la suite numérique de terme général $u_n + v_n$;
2. produit de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ la suite numérique de terme général $u_n v_n$;
3. multiplication de $(u_n)_n$ par λ, $(\lambda \in \mathbb{K})$, la suite numérique du terme général λu_n.

Définition 2.3. On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ est stationnaire s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n = \lambda$.

Définition 2.4. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. $(u_n)_n$ est dite minorée si son image est minorée. Autrement dit s'il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $m \leq u_n$.
2. $(u_n)_n$ est dite majorée si son image est majorée. Autrement dit s'il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \leq M$.

Définition 2.5. On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ est bornée si son image est bornée, c'est-à-dire s'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_n| \leq M$.

Remarque 2.3. Vous pouvez, aisément, vérifier qu'une suite réelle est bornée si, et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

2.2 Suites convergentes

Définition 2.6. On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

On dit que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ, qui est *limite* de la suite.

Theorem 2.1. *Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. Si $(u_n)_n$ est convergente, sa limite est unique.*

Démonstration. Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ et vers ℓ' et soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_1$ et $|u_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_2$. Soit n un nombre naturel plus grand que $\max(n_1, n_2)$. On a

$$|\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| < \varepsilon.$$

Ainsi $|\ell - \ell'| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, donc $|\ell - \ell'| = 0$, ce qui montre que $\ell = \ell'$. □

Theorem 2.2. *Toute suite numérique convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite numérique convergente de limite ℓ. Par définition, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < 1$, pour tout $n \geq n_0$. D'après la deuxième inégalité triangulaire, on a

$$|u_n| - |\ell| \leq |u_n - \ell|,$$

par suite $|u_n| < |\ell| + 1$, pour tout $n \geq n_0$. Soit

$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|, |\ell| + 1\}.$$

On a $|u_n| \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre le théorème. □

Remarque 2.4. La réciproque n'est pas exacte. Un contre exemple est la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = (-1)^n$.